

Valószínűesszámitás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 ősz

2. hét: Alapfogalmak és kombinatorikus valószínűség MO

1. $\Omega = \{A, B, C\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$ Mérték-e, illetve valószínűségi mérték-e?

(a) $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu_1(X) = |X|$ (az X halmazhoz X elemszámát rendeli)

(b) $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu_2(X) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \in X \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

(c) $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu_3(X) = \begin{cases} 1 & \text{ha } X = \Omega \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

Megoldás.

(a) Mérték, de nem valószínűségi mérték.

(b) Speciális nevén A-ra koncentrált Dirac mérték, valószínűségi mérték.

(c) Nem mert nem teljesül a szigma additivitás (particionáljuk Ω -t tetszőlegesen 2 nemüres részhalmazzra).

2. Általában nem követeljük meg, hogy Ω -n bármilyen művelet vagy akár rendezés értelmezve legyen, de ha van, akkor ezeket felhasználhatjuk a mérték(jelöltek) definíciójához: $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$ Mérték-e, illetve valószínűségi mérték-e?

(a) $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu_1(X) = 0$ ha $X = \emptyset$ egyébként $\mu_1(X) = \max(X)$ (nemüres halmaz esetén a halmazban szereplő legnagyobb értékű elem - mint szám - értékét rendeli a halmazhoz)

(b) $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu_2(X) = 0$ ha $X = \emptyset$ egyébként $\mu_2(X) = \sum_i i \in X$ (nemüres halmaz esetén a halmaz elemeinek - mint számoknak - az összegét rendeli a halmazhoz)

- (c) $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$,
- $$\mu_3(X) = \begin{cases} 0 & \text{ha } X = \emptyset \\ w_1 & \text{ha } X = \{1\} \\ w_2 & \text{ha } X = \{2\} \\ w_3 & \text{ha } X = \{3\} \\ w_1 + w_2 & \text{ha } X = \{1, 2\} \\ w_2 + w_3 & \text{ha } X = \{2, 3\} \\ w_1 + w_3 & \text{ha } X = \{1, 3\} \\ w_1 + w_2 + w_3 & \text{ha } X = \Omega = \{1, 2, 3\} \end{cases}$$
- w_1, w_2, w_3 valós számok. meg tudjuk-e őket úgy választani hogy μ_3 (valószínűségi) mérték legyen?

Megoldás.

- (a) Nem, mert $\mu\{1\} + \mu\{2\} = 3$ de $\mu\{1, 2\} = 2$ szigma additivitás nem teljesül.
- (b) Mérték, de nem valószínűségi mérték, mert $\mu\{\Omega\} \neq 1$.
- (c) Mérték, és valószínűségi mérték akkor, ha pl.: $w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{3}$.
3. A MATEMATIKA szó betűit összekeverjük és a betűket véletlenszerűen egymás mellé rakjuk. Mi a valószínűsége, hogy visszkapjuk az eredeti szót?
- Megoldás.* Az összes eset száma ismétléses permutáció: $\frac{10!}{2!3!2!}$ így a megoldás: $\frac{1}{\frac{10!}{2!3!2!}}$.
4. 10 ember szeretne leülni egy asztalhoz. A helyeket véletlenszerűen foglalják el. Mi a valószínűsége, hogy A és B egymás mellé fog ülni, ha
- (a) az asztal kör alakú?
- (b) az asztal hagyományos, egyenes, de csak az egyik felére ülnek?

Megoldás.

- (a) Az összes eset $(10-1)! = 9!$, A és B-t rögzítve az esetek száma $8!$, és A és B helyet is cserélhetnek, így a jó esetek száma $2 \cdot 8!$. A megoldás: $\frac{2 \cdot 8!}{9!}$.
Másképpen: A leül valahová (kör alakú az asztal, így nem számít hogy pontosan hová). B 9 lehetséges helyre ülhet, amiből 2 szomszédos A-val.
- (b) Ebben az esetben sorban ülnek le, így sima sorbarendezés történik: $\frac{2 \cdot 9!}{10!}$.
5. Mi a valószínűsége annak, hogy egy dobókockával egymás után háromszor dobva az összeg 17?
- Megoldás.* Háromféleképpen jöhet ki az összeg 17-re: $\{6, 6, 5\}; \{6, 5, 6\}; \{5, 6, 6\}$. Az összes eset ismétléses variáció: 6^3 . A megoldás: $\frac{3}{6^3}$.
6. Egy urnában 10 piros és 10 zöld golyó van. Határozza meg az alábbi két esemény valószínűségét.
- (a) Visszatevéses eljárással (visszatevéses mintavétel) 5-ször húzva 3-szor kapunk pirosat

- (b) Visszatevés nélkül eljárással (visszatevés nélküli mintavétel) 5-ször húzva 3-szor kapunk pirosat

Megoldás.

- (a) Öt húzás közül ki kell választanunk azt a hármat, amely piros lesz. Ezek után a három piros helyre 10-10 lehetséges labda jut, míg a két nem piros helyre 10-10 lehetséges labda jut, az ismétléses variáció alapján. Tehát a jó esetek száma: $\binom{5}{3}10^310^2$ Az összes eset száma pedig szintén ismétléses variáció: 20^5 .

A megoldás így: $\frac{\binom{5}{3}10^310^2}{20^5}$.

- (b) Ebben az esetben a piros helyek kiválasztása után ismétlés nélküli variációkkal számolunk, így a megoldás: $\frac{\binom{5}{3} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9}{\frac{20!}{15!}}$.

Oldja meg a feladataot 100-100 illetve 1000-1000 piros illetve zöld golyó esetén is!

7. Mi a valószínűsége a lottón az 5-ösnek, 4-esnek, 3-asnak, 2-esnek?

Megoldás. Az ötösnél egy jó esetünk van, a négyesnél a jó esetek úgy jönnek létre, hogy a kihúzott öt számból választottunk négyet, a maradék nem nyertes számokból pedig egyet. A többinél ehhez hasonlóan. Sorban (5-ös, négyes,...):

$$\binom{90}{5}^{-1}; \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}; \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}; \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}; \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}$$