

Valószínűségszámítás gyakorlat MO

Csercsik Dávid

2017 ősz

1. hét: Alapfogalmak és kombinatorika ismételés

1. $\Omega = \{A, B, C\}$. Szigma algebrák-e a következő halmazok Ω felett? Ha nem mi az általuk generált szigma-algebra?

- (a) $\mathfrak{F}_1 = \{ \emptyset \}$
- (b) $\mathfrak{F}_2 = \{ \emptyset, \Omega \} = \{ \emptyset, \{A, B, C\} \}$
- (c) $\mathfrak{F}_3 = \{ \emptyset, \{A\}, \{A, B, C\} \}$
- (d) $\mathfrak{F}_4 = \{ \emptyset, \{A\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \}$
- (e) $\mathfrak{F}_5 = \{ \emptyset, \{B\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \}$

Megoldás. A szigma algebra definícióját kell alkalmaznunk. A gyakorlatban azt kell megnéznünk, hogy az adott algebra zárt-e a komplementer képzésre, azaz minden halmaznak a komplementere benne van-e az algebrában. Szigma algebrát pedig úgy tudunk generálni, hogy kiegészítjük a halmazt a részhalmazok komplementereivel. Ezek alapján:

- (a) Nem szigma algebra, mert $\emptyset^C \notin \mathfrak{F}_1$ az általa generált szigma algebra: $\mathfrak{F}_1 = \{ \emptyset, \Omega \}$. Másrészt a szigma-algebrától alapvetően megköveteljük hogy Ω legyen benne (lásd a jegyzet 1.2-es definícióját).
- (b) Igen, szigma algebra.
- (c) Nem szigma algebra, mert $\{A\}^C = \{B, C\} \notin \mathfrak{F}_3$ az általa generált szigma algebra: $\mathfrak{F}_4 = \{ \emptyset, \{A\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \}$
- (d) Igen, szigma algebra.
- (e) Nem szigma algebra, mert $\{B\}^C = \{A, C\} \notin \mathfrak{F}_5$ az általa generált szigma algebra: $\mathfrak{F}_5 = \{ \emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \} = 2^\Omega$

2. $\Omega = \{A, B, C\}$, $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \{A\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}$ Mérhető fv-e?

- (a) $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(A) = 1$, $f_1(B) = 2$, $f_1(C) = 3$
- (b) $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(A) = 0$, $f_2(B) = 0$, $f_2(C) = 0$
- (c) $f_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(A) = 0$, $f_3(B) = 1$, $f_3(C) = 1$
- (d) $f_4 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_4(A) = 3$, $f_4(B) = 3$, $f_4(C) = -1$

Megoldás. Azt kell megnéznünk, hogy minden Borel halmaz ősképe $\mathfrak{F}$ -beli-e. Jelen esetben a kérdéses Borel-halmazok, amiket vizsgálunk kell: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. De persze vizsgálhatjuk a $] -0.5, 0.5]$, $]0.5, 1.5]$, $]1.5, 2.5]$, $]2.5, 3.5]$ Borel halmazokat is, lényeg hogy olyat keserünk aminek az ősképe nincs a szigma algebrában. Ha nem találunk, akkor nem mérhető a fv. Figyeljünk oda, hogy azonos érték több elemhez is tartozhat (a függvény nem feltétlenül injektív), ekkor az elemek uniójának kell $\mathfrak{F}$ -belinek lennie definíció alapján (jegyzet 1.7-es definíció).

- (a) Nem, mert $\{B\} \notin \mathfrak{F}$ (B a $\{2\}$ Borel halmaz ősképe)
- (b) Igen, mérhető fv. Kétféle Borel halmazt vizsgálhatunk: Amiben nincs benne a $\{0\}$ (ennek az ősképe $\emptyset$), vagy amiben benne van (egy ilyen ősképe $\{A, B, C\}$) az 1.7-es definíció alapján.
- (c) Igen, mérhető fv.
- (d) Nem, mert $\{A, B\} \notin \mathfrak{F}$

3. Hányféleképpen rakhatunk ki a magyar kártyából 8 piros és 8 zöld lapot, ha egymás után különböző színű lapokat kell elhelyeznünk?

Megoldás. Bontsuk két esetre a megoldást, aszerint hogy melyik színnel kezdünk. Ezek után az első színből nyolcat, mellé a másodikból is nyolcat, majd az első színből hetet ... tehetünk le. A színek ismétléses nélküli permutációja áll elő. Tehát a megoldás $2 \cdot 8! \cdot 8!$

4. Egy 12 tagú társaság kerek asztalnál foglal helyet. Hányféle sorrendben ülhetnek le, ha a helyek nem számozottak?

Megoldás. Többféleképpen is nekikezdhethetünk a feladatnak. Vegyük a köralakú asztalt és egyenesítsük ki, ekkor $12!$ féleképp ülhetnek le, ha ezt újra összefűzzük, nem számít, hogy melyik helyen kezdődött, azaz 12 darab forgatás történhet, amelyet nem tekintünk új esetnek, ezért a megoldás: $\frac{12!}{12} = 11!$.

5. Egy pont egységnyi lépéseket tesz meg a számegegyenesen, pozitív vagy negatív irányban. Hányféleképpen juthat el az origóból 15 lépésben a $+3$ pontba?

Megoldás. Ehhez ki kell számolnunk, hogy hány pozitív és hány negatív lépésre lesz szükségünk. Ezt az alábbi egyenletrendszer mondja meg (x - pozitív lépések száma, y - negatív lépések száma).

$$\begin{aligned} x + y &= 15 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

Az egyenletrendszer megoldása $x=9$ $y=6$. Innen többféleképp is tovább mehetünk. Egyik megoldás alapján a lépéseket ismétléseken permutáljuk, azaz $\frac{15!}{9!6!}$. A másik esetben a 15 lépésből kiválasztjuk a hat negatív lépést, azaz $\binom{15}{6}$.

6. Hányféleképpen helyezhetünk 5 különböző, de nem névre vagy címre szóló levelet 16 levelesládába úgy, hogy egy levelesládába (a) legfeljebb egy levelet teszünk, (b) több levelet is tehetünk?

Megoldás.

(a) A feladatot tekinthetjük úgy, hogy minden egyes levélhez egy postaládát szeretnénk rendelni. Ekkor ismétlés nélküli variációt kapunk, azaz $\frac{16!}{(16-5)!}$

(b) Ismétléses variáció: 16^5 .

7. Hányféleképpen helyezhetünk 5 egyforma szórólapot 16 levelesládába úgy, hogy egy levelesládába (a) legfeljebb egy szórólapot teszünk, (b) több szórólapot is tehetünk?

Megoldás.

(a) 16 postaládából kell kiválasztanunk 5-t. Ismétlés nélküli kombináció: $\binom{16}{5}$.

(b) 16 postaládából kell kiválasztanunk 5-t, de egyet többször is választhatunk. Ötödosztályú ismétléses kombináció: $\binom{16+5-1}{5} = \binom{20}{5}$.

8. Egy községben 35 vezetékes telefon van. Hányféle helyi telefonbeszélgetés létesülhet?

Megoldás. 35 vezetékes telefonból $\binom{35}{2}$ féleképpen választhatunk ki 2-t.

9. Egy rejtvénypályázaton 3 különböző díjat sorsolnak ki a 78 helyes megfejtő között. Hányféle eredményt hozhat a sorsolás, ha

(a) a díjak különbözők és mindegyik helyes megfejtő legfeljebb egyet kaphat

(b) a díjak különbözők és egy díjazott több díjat is kaphat

(c) a díjak egyformák és mindegyik helyes megfejtő legfeljebb egyet kaphat

(d) a díjak egyformák és egy díjazott több díjat is kaphat

Megoldás.

(a) Ismétlés nélküli variáció: $78 \cdot 77 \cdot 76$

(b) Ismétléses variáció: 78^3

(c) A díjak sorrendje nem számít és hármat kell kiválasztani, ismétlés nélküli kombináció: $\binom{78}{3}$

(d) Ismétléses kombináció: $\binom{78+3-1}{3}$

10. Csak az 1, 2, 3, 4 számjegyekből legalább hány jegyből álló számokat kell felírunk ahhoz, hogy legalább 1000 különböző számot kapjunk?

Megoldás. Ismétléses variáció k jegyű szám esetén 4^k lehetséges felírás van. A megoldás a következő egyenlet megoldása: $4^k > 1000$.

11. Hányféleképpen lehet 4 egyenlő részre osztani a 32 lapos magyar kártyát úgy, hogy a négy ász ugyanabba a részbe kerüljön?

Megoldás. Rögzítsük a négy ászt. Ekkor már csak három csoportot kell összeállítanunk. Az első csoportba, amelyekben az ászok vannak 28-ból kell választanunk még négy lapot, a másodikba 24 lapból és a harmadikba pedig 16 lapból 8-t 8-t. A negyedik csoport a maradék 8 lap. Így a megoldás: $\binom{28}{4} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8}$.