

# Valószínűségszámítás gyakorlat MO

Csercsik Dávid

2017 ősz

## 13. hét - Nagy számok törvénye, CHT

1. Egy gyárban 300 egyforma gép van, átlagosan 210 működik. Hány gép számára kell elegendő energiát biztosítani ha azt szeretnénk elérni hogy 99 %-os valószínűséggel minden működőképes gép működni tudjon? Mekkora ez az érték ha csak 98 %-os illetve 99.9 %-os valószínűséget szeretnénk?

*Megoldás.*

Legyen  $\xi$  a működő gépek száma  $\xi = \sum_{i=1}^{300} \xi_i$ . Ahol  $\xi_i = 1$  ha az  $i$ -ik gép működik

Ekkor  $E(\xi_i) = p = \frac{210}{300}$ ,  $\sigma^2(\xi_i) = p(1-p)$  (binomiális eo.)

A CHT-ből származtatható Moivre-Laplace tétel alakja ha  $P(\xi_i = 1) = p$ ,  $P(\xi_i = 0) = 1 - p$ :

$$S \doteq \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightarrow N(0,1) \quad \text{ahol } \sqrt{p(1-p)} = \sigma\xi_i$$

$$\Rightarrow F_{S_n}(x) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

$$P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < y\right) \approx \Phi(y)$$

$$P(\xi < np + y\sqrt{np(1-p)}) = P(\xi < 210 + 7.93y) \approx \Phi(y)$$

$$\Phi(2.33) \approx 0.99 \rightarrow y = 2.33$$

Így a válasz (hány gép számára kell energiát biztosítani):

$$x = 210 + 2.33 \cdot 7.93 = 228.5 \rightarrow 230$$

Ha 98%-os valószínűséggel szeretnénk:  $\Phi(2.06) \cong 0.98 \rightarrow 226$  db

Ha 99.9%-os valószínűséggel szeretnénk:  $\Phi(3) \cong 0.999 \rightarrow 234$  db

2. Egy esemény bekövetkezési valószínűsége 0.6, Ha 2000 kísérletet végzünk, mi lesz a valószínűsége hogy az esemény relatív gyakorisága 0.58 és 0.62 közé esik? Becsülje meg Csebisev egyenlőtlenség és CHT alkalmazásával is!

*Megoldás.*

- *Csebisev*

$\xi$  binomiális eloszlású (2000, 0.6) paraméterű

$$\rightsquigarrow E(\xi) = np = 1200, \sigma^2(\xi) = np(1-p) = 2000 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 480$$

$$P\left(0.58 < \frac{\xi}{2000} < 0.62\right) = P(1160 < \xi < 1240)$$

$$= P(-40 < \xi - E(\xi) < 40) = P(|\xi - E(\xi)| < 40)$$

tudjuk hogy

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|\xi - E(\xi)| \geq 40) \leq \frac{480}{40^2} = 0.3$$

$$\rightsquigarrow P(|\xi - E(\xi)| < 40) > 0.7$$

(ebben az esetben nem használtuk azt a tudást hogy a valószínűsége sok kis komponensből áll össze, csak az eloszlására vonatkozó paramétereket)

- *CHT*

Hozzuk a

$$P_1 = P\left(\frac{\sum \xi_j}{2000} < 0.58\right) = P\left(\sum \xi_j < 2000 \cdot 0.58\right)$$

illetve a

$$P_2 = P\left(\frac{\sum \xi_j}{2000} < 0.62\right) = P\left(\sum \xi_j < 2000 \cdot 0.62\right)$$

valószínűségeket CHT-alakra:

$$P_1 = P\left(\frac{\sum \xi_j - 2000 \cdot 0.6}{\sqrt{2000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} < \underbrace{\frac{0.58 \cdot 2000 - 2000 \cdot 0.6}{\sqrt{2000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}}_{-1.8257}\right) \approx \Phi(-1.8257)$$

$$P_2 = P\left(\frac{\sum \xi_j - 2000 \cdot 0.6}{\sqrt{2000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} < \underbrace{\frac{0.62 \cdot 2000 - 2000 \cdot 0.6}{\sqrt{2000 \cdot 0.6 \cdot 0.4}}}_{1.8257}\right) \approx \Phi(1.8257)$$

A megoldás tehát

$$P_2 - P_1 = \Phi(1.8257) - \Phi(-1.8257) = \Phi(1.8257) - (1 - \Phi(1.8257)) = 0.93$$

3. Egy szerezsendió szállítmányban a szemek átlagos tömege 5 gr, és 5%-uk több mint 6 gr. Mennyi a szemek tömegének szórása, ha az eloszlás normálisnak tekinthető?

A diókat kettesével csomagolják. Mi lesz 1-1 csomag várható tömege és szórása?

A szállítmány egyik dobozában 1002 gr dió van. Mennyi a valószínűsége, hogy nem lesz elég 100 csomagra?

*Megoldás.*

Legyen  $\xi$  egy szem tömege.  $E(\xi) = 5$  és  $\sigma(\xi) = ?$ .

Tudjuk, hogy 5 százaléknál több, mint hat gramm, ez a következőt jelenti:  $P(\xi > 6) = 0.05$

$$\begin{aligned} P(\xi > 6) &= 1 - P(\xi \leq 6) = 1 - P(\xi = 6) - P(\xi < 6) = 1 - 0 - F_{\xi}(6) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{6-5}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma(\xi)}\right) = 0.05 \end{aligned}$$

$$0.95 = \Phi(1.645) \rightsquigarrow \frac{1}{\sigma(\xi)} = 1.645 \rightsquigarrow \sigma(\xi) = 0.68 \rightsquigarrow \sigma^2(\xi) = 0.4624$$

Legyen  $\xi_{cs}$  egy csomag tömege  $E(\xi_{cs}) = 10$  (gr). Az egybecsomagolt két dió tömege függetlennek tekinthető, így a csomag tömegének szórásnégyzete:

$$\sigma^2(\xi_{cs}) = 2\sigma^2(\xi) = 0.9248 \text{ a szórás ennek a gyöke} = 0.9617.$$

Legyen  $\eta_i$  az  $i$ . csomag tömege. Annak a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 100 csomagra elég:

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} \eta_i > 1002\right)$$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{100} \eta_i > 1002\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} \eta_i - 100 \cdot 10}{\sqrt{100} \cdot 0.9617} > \underbrace{\frac{1002 - 100 \cdot 10}{\sqrt{100} \cdot 0.9617}}_{0.208}\right) \approx \\ &\approx 1 - \Phi(0.208) = 1 - \Phi(0.21) = 1 - 0.5832 = 0.4168 \end{aligned}$$

4. A menzán egy adag leves átlagosan 3 dl, 0.2 dl szórással. Mennyi a valószínűsége hogy 30 liter levesből legalább 102 adagot mérnek ki?

*Megoldás.*

Legyen  $\xi_i$  az  $i$ . levesadag mennyisége.

$$P\left(\sum_{i=1}^{102} \xi_i \leq 300\right) = ?$$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{102} \xi_i \leq 300\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{102} \xi_i - 102 \cdot 3}{\sqrt{102} \cdot 0.2} < \underbrace{\frac{300 - 102 \cdot 3}{\sqrt{102} \cdot 0.2}}_{-2.9704}\right) = \Phi(-2.9704) = \\ &\approx \Phi(-2.9) = 1 - 0.9981 = 0.0019 \end{aligned}$$

Azaz, gyakorlatilag szinte sosem fordul elő, hogy 102 adag is kiteljen.

5. Az operában 2 ruhatár van. A Siegfried-re 1000 néző érkezik, akik egyenlő valószínűséggel helyezik el kabátjukat a két ruhatárban. Mi a valószínűsége hogy az egyik ruhatárban legalább 515 kabát lesz?

*Megoldás.*

Legyen  $\xi_i = 1$  az  $i$ . kabát a bal oldali ruhatárba kerül. Az egyenlő valószínűség miatt  $P(\xi_i = 0) = P(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}$ .

$$E(\xi_i) = \frac{1}{2} \cdot 1 \rightarrow E^2(\xi_i) = \frac{1}{4} \quad E(\xi_i^2) = \frac{1}{2} \cdot 1^2$$

$$\sigma^2(\xi_i) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \sigma(\xi_i) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{1000} \xi_i \geq 515\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} \xi_i - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \cdot \frac{1}{2}} > \underbrace{\frac{515 - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \cdot \frac{1}{2}}}_{\approx 0.95}\right) = 1 - \Phi(0.95) = 0.028$$