

## 12. hét - $L^p$ , Csebisev egyenlőtlenség

1. Legyen  $f_\alpha = x^\alpha$  és  $f_\alpha : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Milyen  $\alpha$ -ra és  $p$ -re  $L^p$ -beli  $f$ , azaz milyen  $\alpha$  és  $p$  esetén igaz hogy  $f_\alpha \in L^p([1, +\infty), \mathfrak{B}_{([1, +\infty[)}, \lambda)$  (ahol  $\lambda$  a Lebesgue mérték)? Ha igen  $\|f_\alpha\|_p = ?$

*Megoldás.*

Be kell látnunk, hogy az  $\|f_\alpha\|_p < \infty$

- Első esetként tegyük fel hogy  $p \neq \infty$

$$(\|f_\alpha\|_p)^p = \int_{\Omega} |f_\alpha(x)|^p \underbrace{dP}_{=dx \text{ mert } P=\lambda} = \int_1^\infty x^{\alpha p} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{-\alpha p}} dx$$

, ami akkor véges ha  $-\alpha p > 1$  (és persze ekkor véges  $\|f_\alpha\|_p$  is). Ekkor

$$\|f\|_p = \left( \frac{1}{1 + \alpha p} \right)^p$$

Indoklás: emlékeztető - improprius integrálok

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^t} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-t} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-t+1}}{-t+1} \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-t}}{1-t} - \frac{1}{1-t}$$

Ha  $t < 1$  akkor a limes  $= \infty$ , ha  $t > 1$  akkor a limes  $= -\frac{1}{1-t} = \frac{1}{t-1}$

- Ha  $p = \infty$   $\beta \stackrel{\circ}{=} -\alpha p$  ekkor

$$\left\| \frac{1}{\beta} \right\|_\infty = \begin{cases} 1 & \text{ha } \beta > 1 \\ 1 & \text{ha } \beta = 1 \\ 1 & \text{ha } 0 < \beta < 1 \\ \infty & \text{ha } \beta < 0 \end{cases}$$

2. Legyen  $f_\alpha = x^\alpha$  és  $f_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  (Legyen  $f(0) = 1$ ) Milyen  $\alpha$ -ra és  $p$ -re  $L^p$ -beli  $f$ ?

*Megoldás.*

Az előző feladathoz hasonlóan járjunk el.

$$(\|f_\alpha\|_p)^p = \int_0^1 x^{\alpha p}$$

Tudjuk hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^t} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^{-t} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{-t+1}}{-t+1} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-t} - \frac{c^{1-t}}{1-t}$$

ami divergens ha  $t > 1$ ,  $t \leq 1$  esetén a limes pedig  $\frac{1}{1-t}$ . Tehát  $f_\alpha$   $[0, 1]$ -en  $L^p$ -beli ha  $-\alpha p < 1$

3. Legyen  $f = \frac{\sin(x)}{x}$ . Mit tudunk mondani  $p > 1$  illetve  $p = 1$  esetén  $f$   $L^p$ -beliségéről? (illetve 0-ban legyen 1, bár mindegy)

*Megoldás.* Kérdés: Milyen  $p$ -re  $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

- $p > 1$  esetén Tudjuk hogy

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|^p < \infty$$

pl  $p = 2$ -re

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right|^2 \leq \frac{1}{x^2}$$

persze nekünk az egész  $\mathbb{R}$ -en kell valamit mondanunk..

$$\int_{-\infty}^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|^p dx = \int_{-\infty}^{-1} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|^p dx + \int_{-1}^1 \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|^p dx + \int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|^p dx$$

Az első tagot megvizsgálva: Mivel  $\sin(x)$  páratlan fv ( $\sin(-x) = -\sin(x)$ ), ahogy az identitás  $(x)$  is az és páratlan fv / páratlan fv = páros fv,  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$ , ezért az első és az utolsó tag kiejti egymást. A középső tag pedig maximum 2, ezért  $p > 1$ -re

$$\frac{\sin(x)}{x} \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$$

- $p = 1$ -re nem: lásd a jegyzetet - Improprius Riemann és Lebesgue integrálhatóság kapcsolata.
4. Egy pályaudvaron egy újságárus 1 óra alatt eladott újságjainak száma Poisson eloszlású valószínű (ξ) λ = 64 paraméterrel. Adjunk alsó becslést a

$$P(48 < \xi < 80)$$

valószínűségre!

*Megoldás.* Poisson eloszlás alapján  $E(\xi) = 64$ ,  $\sigma^2(\xi) = 64$  a Csebisev egyenlőtlenség alapján:

$$P(|\xi - 64| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2} \rightarrow P(|\xi - E(\xi)| \geq 16) \leq \frac{\sigma^2(\xi)}{16^2} = \frac{4 \cdot 16}{16^2} = \frac{1}{4}$$

nekünk ezen esemény komplementerének a valószínűségét kell becsülnünk:

$$P(|\xi - E(\xi)| < 16) > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

5. Egy gyufagyárban a dobozokat automata gép tölti. Az egyes dobozokban lévő gyufaszálak száma valváltozó ( $\xi$ ), a következő eloszlással:

|    |      |     |      |     |      |     |      |
|----|------|-----|------|-----|------|-----|------|
| db | 47   | 48  | 49   | 50  | 51   | 52  | 53   |
| P  | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.4 | 0.15 | 0.1 | 0.05 |

Adjunk becslést a  $P(48 < \xi < 52)$  valószínűségre, majd számítsuk ki ezt pontosan is!

*Megoldás.*

$E(\xi) = 50$   $\sigma^2(\xi) = 2$  Ebből a becslés:

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq 2) \leq \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow P(|\xi - E(\xi)| < 2) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Az érték valójában pedig:

$$P(48 < \xi < 52) = P(49) + P(50) + P(51) = 0.15 + 0.4 + 0.15 = 0.7$$

6. Automata minőségvizsgáló  $n=100\,000$  elemű mintát ellenőriz le egy gyártósoron előállított alkatrésztömegből. A vizsgálat után milyen valószínűséggel állíthatjuk hogy a mintából meghatározott selejtarány a készlet elméleti  $p$  selejtvalószínűségétől legfeljebb 0.01-el tér el (használjuk fel hogy  $p - p^2 < 0.25$  ha  $p \in [0, 1]$ )?

*Megoldás.*

Legyen  $\xi$  a selejtes termékek száma. A selejtarány a mintában:  $\frac{\xi}{10^5}$ . Tekintve, hogy egy minta vagy selejtes vagy nem ezért:  $\xi \in B(10^5, p)$  binomiális eloszlás.

Az alábbi kifejezést akarjuk becsülni:

$$P\left(\left|\frac{\xi}{10^5} - p\right| < 0.01\right)$$

látszik hogy ennek a komplementerével kell dolgoznunk, az lesz Csebisev formájú:

$$P\left(\left|\frac{\xi}{10^5} - p\right| \geq 0.01\right) = P(|\xi - 10^5 p| \geq 1000) \leq \frac{10^5 p(1-p)}{10^6} = \frac{p(1-p)}{10}$$

Ebből a becslés az eredeti mennyiségre:

$$P\left(\left|\frac{\xi}{10^5} - p\right| < 0.01\right) > 1 - \frac{p(1-p)}{10} > 1 - \frac{0.25}{10}$$

7. Egy hangyaboly 30%-a katona. Véletlenszerűen kiválasztunk 10 000 hangyát. Mi lesz a katonák várható száma? Mi lesz a valószínűsége hogy a katonák számának valódi értéke a fenti várható értéktől 5%-al kevesebbel tér el? *Megoldás.* Legyen a  $\xi$  kiválasztott katonák száma a 10000 kiválasztott hangya közt. Ekkor  $\xi$  binomiális eloszlású, így  $E(\xi) = np = 3000$  és  $\sigma^2(\xi) = npq = 2100$ . Mivel 3000-nek 5%-a 150, ezért

$$P(|\xi - 3000| \geq 150) \leq \frac{2100}{150^2} = \frac{2100}{22500} \rightsquigarrow P(|\xi - 3000| < 150) > 1 - \frac{2100}{22500} = 0.9067$$

8. Egy üzemben a termékek 95%-a hibátlan. Az üzemnek meghatározott idő alatt 100 000 db terméket kell készítenie. Legalább mennyi a vésése, hogy a legyártott termékek közül 93 000 és 97 500 közé esik a hibátlan termékek száma?

*Megoldás.*

$$E(\xi) = np = 9500$$

$$\sigma^2(\xi) = np(1 - p) = 4750$$

$$P(93000 < \xi < 97500) \geq P(93000 < \xi < 97000) = P(|\xi - 95000| < 2000) \geq 1 - \frac{4750}{2000^2} = 0.9988$$