Valószínűségszámítás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 ősz

11. hét - Transzformált valváltozók (vektoriális eset), feltételes sűrűségfüggvény, kovariancia

1. A (ξ, η) kétdimenziós valváltozó lehetséges értékeit és eloszlását a következő táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	p	p
1	p	3p
2	2p	4p

Számítsuk ki a

(a) $\alpha_1 = \xi + \eta$

(b) $\alpha_2 = \xi\eta$

valváltozók eloszlását!

Megoldás.

(a) α_1 lehetséges értékei 0,1,2,3. α_1 eloszlása:
$P(\alpha_1 = 0) = P(\xi = 0, \eta = 0) = p = \frac{1}{12}$
$P(\alpha_1 = 1) = P(\xi = 1, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 1) = 2p = \frac{2}{12}$
$P(\alpha_1 = 2) = P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 2, \eta = 0) = 5p = \frac{5}{12}$
$P(\alpha_1 = 3) = P(\xi = 2, \eta = 1) = 4p = \frac{4}{12}$

(b) $P(\alpha_2 = 0) = \frac{5}{12}; P(\alpha_2 = 1) = \frac{3}{12}; P(\alpha_2 = 2) = \frac{4}{12}$

2. Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{3}, & \text{ha } 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

(a) Valóban sűrűségfüggvény-e?

(b) Írjuk fel az $f(x|y_0)$ feltételes sűrűségfüggvényt!

Megoldás.

(a)

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{1+xy}{3} dydx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{6}xy^2\right]_0^1 dx = \int_0^2 \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x\ dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^2\right]_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{12} = 1$$

Valóban sűrűséfgüggvény.

(b) Ehhez kell az $f_\eta(y)$ peremsűrűségfüggvény.

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1+xy}{3} dx = \frac{2+2y}{3} & \text{ha } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f(x|y_0) = f(x, y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_\eta(y_0)} = \begin{cases} \frac{1+xy_0}{2+2y_0}, & \text{ha } 0 < x < 2, 0 < y_0 < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

3. ξ és η együttes eloszlása a következő:

ξ \ η	-1	0	1
-1	0.05	0.1	0.2
0	0.05	0.2	0.1
1	0.2	0.05	0.05

(a) Mennyi a kovarianciájuk?

(b) Mennyi $E(\eta|\xi = 1)$?

Megoldás.

(a)

$$E(\xi) = (-1)0.35 + 0(0.35) + 1(0.3) = -0.05$$
$$E(\eta) = (-1)0.3 + 0(0.35) + 1(0.35) = 0.05$$
$$E(\xi\eta) = (-1)(-1)0.05 + (-1)(0)0.1 + (-1)(1)0.2 + ...$$
$$+ (1)(-1)0.2 + (1)(0)0.5 + (1)(1)0.05 = -0.3$$
$$cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = -0.3 - ((-0.05)0.05) = -0.2975$$

Kovariancia becslése mért értékek sorozata esetén (ha x_i-t és y_i-t egyszerre mértük az i-ik időpontban):

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n}$$

Legyen pl a mért értékek sorozata:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} \xi & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \eta & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

(ez pont a fenti eloszlás szerinti)

ekkor

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n} = -0.2975$$

(b) $-1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.05$

4. Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

Megoldás.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{6}{5}\left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right) \qquad \text{ha 0<x<1}$$

$$\text{hasonlóan } f_2(y) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right) \qquad \text{ha 0<y<1}$$

$$E(\xi\eta) = \frac{6}{5}\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y^2)dxdy = \frac{6}{5}\int_0^1 \left[\frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2}{2}y^3\right]_0^1 dy$$

$$= \frac{6}{5}\int_0^1 \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}ydy = \frac{6}{5}\left[\frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{6}y^2\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left(\frac{3}{24} + \frac{4}{24}\right) = \frac{7}{20}$$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = \frac{6}{5}\int_0^1 x(x+\frac{1}{3})dx = \frac{6}{5}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$E(\xi^2) = \frac{6}{5}\int_0^1 x^2(x+\frac{1}{3})dx = \frac{6}{5}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{9}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\frac{13}{36} = \frac{13}{30}$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)} \approx 0.271$$

$$E(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)dy = \frac{6}{5}\int_0^1 y\left(\frac{1}{2} + y^2\right)dy = \frac{6}{5}\left[\frac{y^2}{4} + \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{6}{5}\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

$$E(\eta^2) = \frac{6}{5}\int_0^1 y^2\left(\frac{1}{2} + y^2\right)dy = \frac{6}{5}\left[\frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\frac{11}{30} = \frac{11}{25}$$

$$\sigma(\eta) = \sqrt{E(\eta^2) - E^2(\eta)} \approx 0.283$$

$$R(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} = \frac{E(\xi,\eta) - E(\xi)E(\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} \approx 0.522$$

5. A szecsői lámpagyár villanykörtéinek izzóoszálában szennyeződésként kén is található, véletlen mennyiségben. A kén miligrammokban mért mennyisége exponenciális eloszlású 2 paraméterrel. Ha z gramm kén van az izzószálban, akkor a körte élettartama (pl hónapokban értve) z paraméterű exponenciális eloszlásnak tekinthető.

   (a) Határozza meg egy véletlenül választott izzó élettartamának sűrűségfüggvényét!

   (b) Mi a valsége hogy egy körte nem éri meg a 10 hónapot?

   (c) Javítja vagy rontja a kén a körték várható élettartamát? (számoljuk ki az élettartam feltételes várható értékét!)

Megoldás.

(a) Legyen ξ : ennyi mg kén és legyen η: élettartam.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_{\eta|\xi=z}(y) = ze^{-zy}$$

$$f_{\eta|\xi=z} = \frac{f(z,y)}{f_\xi(z)} \forall z \to f_{\eta|\xi=x} = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}$$

Ezért:

$$f(x,y) = f_{\eta|\xi=x} \cdot f_\xi(x) = 2e^{-2x}xe^{-xy}$$

Ebből pedig η peremeloszlása:

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^\infty 2e^{-2x}xe^{-xy}dx = 2\int_0^\infty \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^{-x(2+y)}}_{g'}dx =$$

$$\rightsquigarrow g = \frac{e^{-x(2+y)}}{-(2+y)}$$

$$= 2\left(\left[\frac{xe^{-x(2+y)}}{-(2+y)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x(2+y)}}{-(2+y)}dx\right) = 2\left[\frac{e^{-x(2+y)}}{(-(2+y))^2}\right]_0^\infty = \frac{2}{(2+y)^2}$$

(b)

$$P(\eta < 10) = \int_0^{10} f_\eta(y) = \left[-\frac{2}{2+y}\right]_0^1 = -\frac{2}{12} + 1$$

(c)

$$E(\eta|\xi = x) = \int_0^\infty yf_{\eta|\xi=x}(y)dy = \int_0^\infty yxe^{-xy}dy = x\int_0^\infty ye^{-xy}dy =$$

$$= x\left(\underbrace{\left[y\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_0^\infty}_{0-0} - \int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{-x}dy\right) = -x\left[\frac{e^{-xy}}{(-x)^2}\right]_0^\infty = -x\left(0 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x}$$

Láthatóan fordított arányosság áll fenn a kéntartalom és az élettartam között. Minél inkább nő az x annál inkább csökken az élettartam.

6. Egy m kg-os labdát eldobunk átlagosan 20 m/s sebességgel, 2 m/s szórással (a sebesség eloszlása normális eloszlással modellezhető). Legyen η a labda mozgási energiája. Határozzuk meg η sűrűségfüggvényét!
Megoldás.

Legyen ξ: Labda sebessége.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x - E(\xi))^2}{2\sigma^2}\right) \qquad E(\xi) = 20 \qquad \sigma = 2$$

ekkor legyen az energiája: $\eta = \frac{1}{2}m\xi^2$. Azaz $y = h(x) = \frac{1}{2}mx^2 \rightsquigarrow x = h^{-1}(y) = \sqrt{\frac{2y}{m}}$

Ebből:

$$(h^{-1}(y))' = \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{m} = \frac{1}{\sqrt{2my}}$$

(Összetett fv deriváltja: Külső fv deriváltja szorozva a belső fv deriváltjával.) Ekkor a g(y) az alábbi módon alakul:

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1}(y))'| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2} \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\frac{2y}{m}} - 20\right)^2}{2 \cdot 2^2}\right) \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{2my}}\right|$$

(lásd: integrálttranszformáció)

7. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a (0,0), (1,0), (1,1) pontok által meghatározott háromszögön. Határozzuk meg $\alpha = \frac{\eta}{\xi}$ eloszlását!
Megoldás.

Az intervallumokból következik, hogy $0 < \eta < \xi < 1 \rightarrow 0 < \alpha < 1$

$$F_\alpha(z) = P(\alpha < z) = P\left(\frac{\eta}{\xi} < z\right) = P(\eta < z\xi)$$

A teljes háromszög területe $T_\triangle = \frac{1}{2}$, a kedvező háromszög területe:
$T_{\triangle k} = \{(x, y) : y < zx\}\frac{z}{2}$. A valség a területek aránya, azaz

$$F_\alpha(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z < 0 \\ \frac{\frac{z}{2}}{\frac{1}{2}} = z & \text{ha } 0 < z < 1 \\ 1 & \text{ha } z > 1 \end{cases}$$

8. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 3e^{-3x-y}, & \text{ha } 0 < x,\ 0 < y, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

határozzuk meg a peremeloszlásokat és az

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 3\xi + \eta \\ \alpha_2 &= e^{\eta} \end{aligned}$$

transzformáció által kapott valváltozó sűrűségfüggvényét!

Megoldás.

$$f_{(\alpha_1,\alpha_2)}(u,v) =?$$

$$u = 3x + y \quad v = e^y$$

Ebből átrendezve:

$$y = \ln(v) \to x = \frac{x - \ln(v)}{3}$$

Keressük még a Jacobi determinánst. Lásd, mint analízisből, a koordinátatranszformáció többes integrálok esetén: (Analízis II. jegyzet 2.2 fejezet)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3v} \\ 0 & \frac{1}{v} \end{pmatrix}$$

$$|det(J)| = |\frac{1}{3v}|$$

$$g(u,v) = f(h^{-1}(u,v))\,|J| = \begin{cases} |\frac{1}{3v}|3e^{-\frac{3(u-\ln(v))}{3}-\ln(v)} = \frac{1}{v}e^{-u} & \text{ha } u > 0, v > 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$