

Valószínűesszámítás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 ősz

10. hét - Együttes eloszlások/2, függvényre vonatkoztatott várható érték, valváltozók transzformációja (skalár eset)

1. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1-x), \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

(a) Írjuk fel ξ és η perem-sűrűségfüggvényét

(b) Írjuk fel a

$$P\left(\xi < x, \quad 1 < \eta < \frac{3}{2}\right)$$

valószínűséget, mint az x változó függvényét!

Megoldás

A ξ perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{2(1-x)} 1 dy = 2 - 2x, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

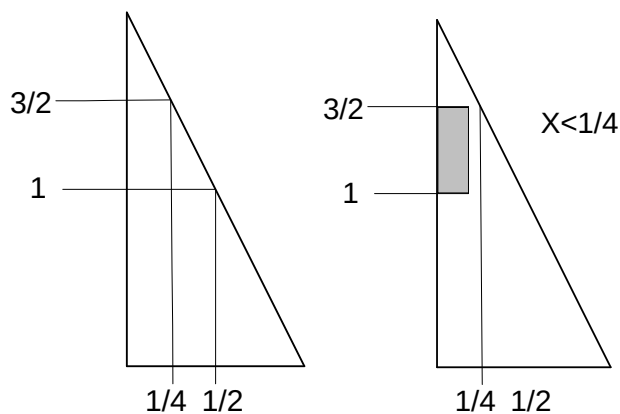
Az η perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^{1-\frac{y}{2}} 1 dx = 1 - \frac{y}{2}, & \text{ha } 0 < y < 2 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A $P(\xi < x, 1 < \eta < \frac{3}{2})$ valószínűség, mint x függvénye: Általában

$$P(\xi < x, 1 < \eta < \frac{3}{2}) = \int_{-\infty}^x \int_1^{\frac{3}{2}} f(u, v) dv du$$

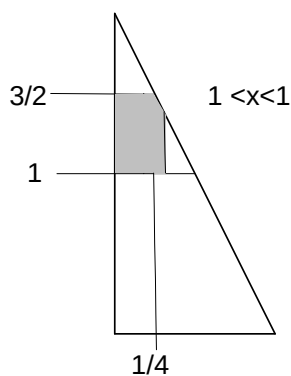
tehát ha $x \leq 0$, akkor a valószínűség 0. Másrészt



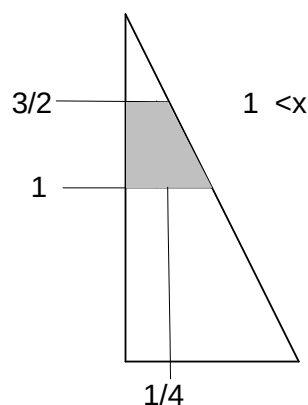
Tehát ha $0 < x \leq \frac{1}{4}$

$$\int_{-\infty}^x \int_1^{\frac{3}{2}} f(u, v) dv du = \int_{-\infty}^x \underbrace{\int_1^{\frac{3}{2}} dv}_{\frac{1}{2}} du = \frac{x}{2}$$

Ha $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \int_1^{\frac{3}{2}} f(u, v) dv du &= \int_0^{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_1^{\frac{3}{2}} dv}_{0.5} du + \int_{\frac{1}{4}}^x \int_1^{2-2u} dv du = \frac{1}{8} + \int_{\frac{1}{4}}^x [v]_1^{2-2u} du \\ &= \frac{1}{8} + \int_{\frac{1}{4}}^x (1 - 2u) du = \frac{1}{8} + [u - u^2]_{\frac{1}{4}}^x = \frac{2}{16} + \left(x - x^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \right) = -x^2 + x - \frac{1}{16} \end{aligned}$$



Ha $\frac{1}{2} < x$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \int_1^{\frac{3}{2}} dvdu + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_1^{2-2u} dvdu + \int_{\frac{1}{2}}^x \int_1^{\frac{3}{2}} 0 dvdu =$$

$$\frac{1}{8} + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (1 - 2u) dv = \frac{1}{8} + [u - u^2]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \right) = \frac{3}{16}$$

2. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Számítsuk ki $\xi + \eta$ és $\xi\eta$ várható értékét!

Megoldás.

$$E(\xi + \eta) = \int_0^1 \int_0^1 (x + y)(x + y) dx dy = \int_0^1 \underbrace{\left[\frac{x^3}{3} + 2y \frac{x^2}{2} + y^2 x \right]_0^1}_{\frac{1}{3} + y + y^2} dy =$$

$$\left[\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y \right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$E(\xi\eta) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) dx dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} y + \frac{x^2}{2} y^2 \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} dy$$

$$= \left[\frac{1}{6} y^2 + \frac{1}{6} y^3 \right]_0^1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $(0 < x < 1, 0 < y < x)$ háromszögön. Számítsuk ki a következő várható értékeket $(n > 0, k > 0)$:

(a) $E(\xi^n \eta^k)$

(b) $E(\xi^n)$

(c) $E(\eta^k)$

Megoldás. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < x, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(\xi^n, \eta^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f(x, y) dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^x x^n y^k dy dx = 2 \int_0^1 x^n \left[\frac{y^{k+1}}{k+1} \right]_0^x dx \\ &= 2 \int_0^1 x^n \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) dx = \frac{2}{k+1} \left[\frac{x^{n+k+2}}{n+k+2} \right]_0^1 = \frac{2}{(k+1)(n+k+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\xi^n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n 2 dy dx = 2 \int_0^1 \int_0^x x^n dy dx \\ &= 2 \int_0^1 x^n [y]_0^x dx = 2 \int_0^1 x^{n+1} dx = 2 \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{2}{n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\eta^k) &= 2 \int_0^1 \int_0^x y^k dy dx = 2 \int_0^1 \left[\frac{y^{k+1}}{k+1} \right]_0^x dx = 2 \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} dx \\ &= \frac{2}{k+1} \left[\frac{x^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

4. Legyen ξ a $[0; 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Mi lesz $\eta = 3\xi + 2$ illetve $\alpha = \xi^2$ eloszlása?

Megoldás

Folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlását az eloszlásfüggvénnyel adjuk meg. ξ eloszlása:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ x & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

$\eta = 3\xi + 2$ eloszlása:

$$P(\eta < y) = P(3\xi + 2 < y) = P(\xi < \frac{y-2}{3})$$

$$\frac{y-2}{3} \in [0, 1] \rightarrow y-2 \in [0, 3] \rightarrow y \in [2, 5]$$

$$G_{\eta}(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 2 \\ \frac{y-2}{3} & \text{ha } 2 < y \leq 5 \\ 1 & \text{ha } 5 < y \end{cases}$$

$\alpha = \xi^2$ eloszlása:

$$H_{\alpha}(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \leq 0 \\ \sqrt{z} & \text{ha } 0 < z \leq 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < z \end{cases}$$

5. Legyen ξ 2-paraméterű exponenciális eloszlású. Mi lesz $\eta = \xi^2$ illetve $\alpha = 2\xi$ eloszlása?

Megoldás.

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

$$G_{\eta}(y) = P(\eta < y) = P(\xi^2 < y) = P(\xi < \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0 \\ 1 - e^{-2\sqrt{y}} & \text{ha } y \geq 0 \end{cases}$$

$$H_{\alpha}(z) = P(\zeta < z) = P(2\xi < z) = P(\xi < \frac{z}{2}) = F\left(\frac{z}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z \leq 0 \\ 1 - e^{-z} & \text{ha } z \geq 0 \end{cases}$$

6. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon. Határozzuk meg az $\eta = a \sin(\xi)$ ($a > 0$) valószínű eloszlás és sűrűségfv-ét!

Megoldás.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{x+\pi/2}{\pi} & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

$$G(y) = P(\eta < y) = P(a \sin \xi < y) = P\left(\xi < \arcsin\left(\frac{y}{a}\right)\right) = F\left(\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)\right)$$

$$\arcsin\left(\frac{y}{a}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \frac{y}{a} \in [-1, 1] \rightarrow y \in [-a, a]$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq -a \\ \frac{1}{a\pi} \left(\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)\right) + \frac{1}{2} & \text{ha } -a < y \leq a \\ 1 & \text{ha } a < y \end{cases}$$

ebből a sűrűségfüggvény deriválással származtatható ($\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$):

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{a\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}} & \text{ha } |y| < a \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

másrésről, a sűrűségfüggvények közti összefüggések alapján:

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

itt $h^{-1}(y) = \arcsin\left(\frac{y}{a}\right)$, $f(h^{-1}(y)) = \frac{1}{\pi}$ mert f konstans $\frac{1}{\pi}$ (ahol nem 0)