Házi feladat a Laplace-transzformáció témakörében

1. Adja meg a következő *x(t)* jel Laplace-transzformáltját a definíció segítségével! Mennyi ennek az értéke s=-a esetén?

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & o \leq t \leq T \\ 0 & különben \end{cases}$$

Megoldás:

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^T e^{-t(a+s)} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\right]_0^T = \frac{1}{s+a} \cdot \left[1 - e^{-(s+a)t}\right]$$

Ha itt –a-t helyettesítünk be, elsőre úgy tűnhet, hogy itt nem konvergens a függvény, hiszen $\infty \cdot 0$ típusú. Ez azonban nem így van, amit akkor láthatunk, ha behelyettesítjük –a-t az integrálba:

$$X(-a) = \int_0^T e^{-at} \cdot e^{at} dt = \int_0^T e^0 dt = [t]_0^T = T$$

A transzformációval kapott általános képletre ha a L'Hospital szabályt alkalmazzuk, ugyanerre az eredményre jutunk.

2. Adja meg a következő, frekvenciatartományban levő jelek inverz Laplace-transzformáltját a táblázat segítségével!

(a) $X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$

(b) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2}$

(c) $X(s) = \frac{2+2se^{-2s}+4e^{-4s}}{s^2+4s+3}$

Megoldás:

(a) Parciális törtekre bontás:

$$X(s) = \frac{2s+4}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

$As + 3A + Bs + 1B = 2s + 4$

$A + B = 2$

$3A + 1B = 4$

$A = 2 - B$

$3(2 - B) + B = 6 - 2B = 4$

$B = 1$

$A = 1$

Behelyettesítve a táblázatból:

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

(b) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2} = \frac{2(s+2)-3}{s+2} = 2 - \frac{3}{s+2}$

$x(t) = 2\delta(t) - 3e^{-2t}u(t)$

(c) Linearitás miatt:

$X(s) = X_1(s) + X_2(s)e^{-2s} + X_3(s)e^{-4s}$

Ahol $X_1(s) = \frac{2}{s^2+4s+3}$

$X_2(s) = \frac{2s}{s^2+4s+3}$

$X_3(s) = \frac{4}{s^2+4s+3}$

Az időeltolás miatt pedig:

$x(t) = x_1(t) + x_2(t-2) + x_3(t-4)$

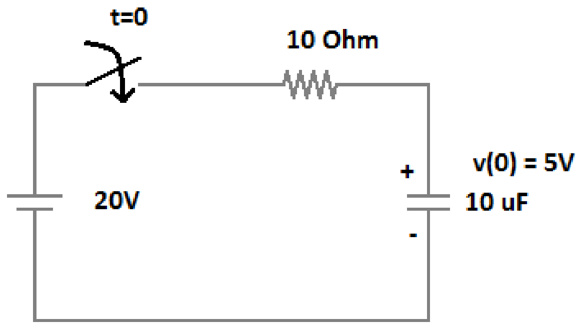
(a) alapján:

$$X_1(s) = \frac{2}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

$$x_1(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$
$$X_2(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+3}$$
$$x_2(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$$
$$X_3(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+3}$$
$$x_3(t) = 2(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

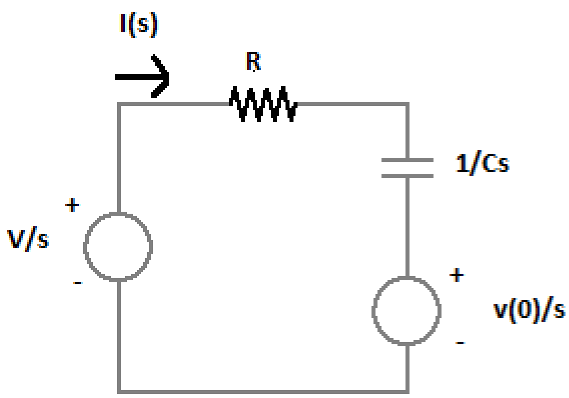
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t-2) + x_3(t-4) =$$
$$= (e^{-t} - e^{-3t})u(t) + \left(-e^{-(t-2)} + 3e^{-3(t-2)}\right)u(t-2) + 2\left(e^{-(t-4)} - e^{-3(t-4)}\right)u(t-4)$$

3. Adja meg az áramkörben folyó áram értékét az időtartományban, ha a kapcsoló t=0-ban átkapcsol!



Megoldás:

A transzformált áramkör:



$$Ri(t) + v_c(t) = v_g(t)$$

$$RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v_C(0)}{s} = \frac{V}{s}$$

$$I(s) = \frac{V - v_C(0)}{s} \cdot \frac{1}{\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{V - v_C(0)}{R} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

Inverz Laplace-transzformált:

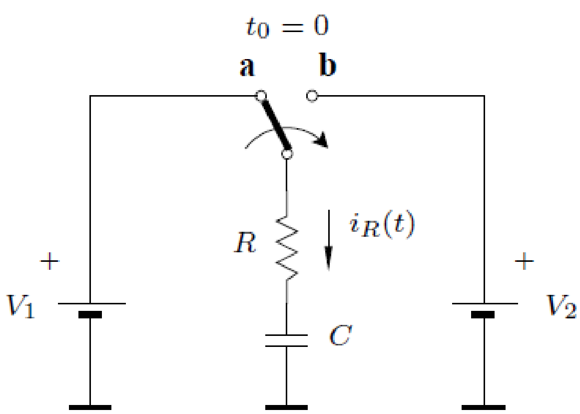
$$i(t) = \frac{V - v_C(0)}{R} e^{-t/_{RC}} \cdot u(t)A$$

Behelyettesítve:

$$i(t) = \frac{20-5}{10} e^{-t/_{10^{-4}}} = 1{,}5e^{-10^4 t}A \quad t \geq 0$$

4. Ez a feladat korábbi vizsgapélda volt:

Az alábbi áramkörben az igen hosszú ideje a baloldali, azaz „a” állásban lévő kapcsolót a $t_0 = 0$ időpillanatban átváltjuk a „b” jobboldali állásba.



$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$

$C = 1\ \mu\mathrm{F}$

$V_1 = -5\ \mathrm{V}$

$V_2 = 5\ \mathrm{V}$

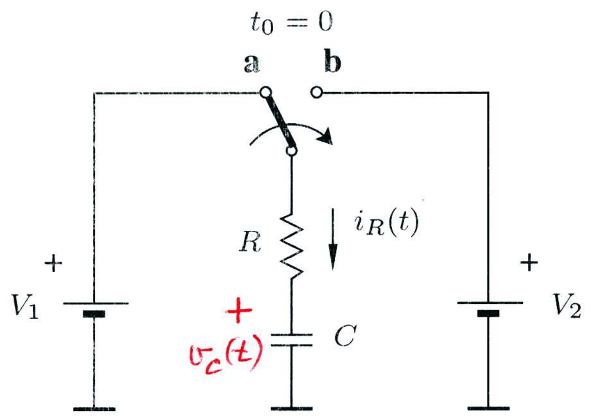
(a) Az **egyoldalas Laplace transzformáció** segítségével határozza meg az $i_R(t)$ áram értékét az **időtartományban.**
(10 pont)

(b) Adja meg azt a t időtartományt, amelyre az $i_R(t)$ áram meghatározható az egyoldalas Laplace transzformáció segítségével.
(4 pont)

(c) Az egyoldalas Laplace transzformációra vonatkozó **végérték tételek** alkalmazásával határozza meg az $i_R(t)$ áram értékét a $t \to 0$ és $t \to \infty$ időpillanatokban.
(6 pont)

(d) A fizikai kép alapján határozza meg az $i_R(t)$ áramot a $t \leq 0$ tartományban, majd a 2.1 pontban kapott eredmény felhasználásával, az exponenciális függvényre vonatkozó szabályok szerint, **méretarányosan** rajzolja fel az $i_R(t)$ áram alakját a $-5\ \mathrm{ms} \geq t \geq 5\ \mathrm{ms}$ tartományban.
(5 pont)

A 2011. január 7-i vizsga ZH 3. feladatának megoldása



$R = 1\ \mathrm{k\Omega}$

$C = 1\ \mu\mathrm{F}$

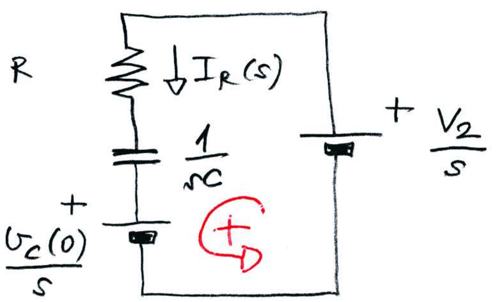
$V_1 = -5\ \mathrm{V}$

$V_2 = 5\ \mathrm{V}$

3.1 MIVEL AZ ÁTKAPCSOLÁS ELŐTT A KAPCSOLÓ MÁR IGEN HOSSZÚ IDEJE AZ "a" ÁLLÁSBAN VOLT, ÉS A KONDENZÁTOR FESZÜLTSÉGE AZ IDŐNEK FOLYTONOS FÜGGVÉNYE

$$\underline{v_C(0+)} = v_C(0) = v_C(0-) = V_1 = \underline{-5V}$$

A $t>0$ IDŐTARTOMÁNYRA ÉRVÉNYES MODELL A KONDENZÁTORRA VONATKOZÓ KEZDETI ÉRTÉK FIGYELEMBE VÉTELÉVEL:



$$R I_R(s) + \frac{1}{sC} I_R(s) + \frac{v_C(0)}{s} - \frac{V_2}{s} = 0$$

$$I_R(s) = \frac{V_2 - v_C(0)}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} = 10 \frac{1}{s+\tau} \ \mathrm{mA}$$

$$\underline{\tau} = RC = \underline{1\,ms}$$

$$\underline{i_R(t)} = \mathcal{L}^{-1}\{I_R(s)\} = \underline{10\, e^{-\frac{t}{\tau}}\ \mathrm{mA}, \quad t>0} \quad (\tau = 1\,ms)$$

3.2 AZ EGYOLDALAS LAPLACE TRANSZFORMÁCIÓ A $t>0$ $(0+ \le t < \infty)$ IDŐTARTOMÁNYRA VAN CSAK ÉRTELMEZVE. A $t \le 0$ TARTOMÁNYRA AZ EGYOLDALAS LAPLACE TRANSZFORMÁCIÓ SEMMIT SE MOND, AZT KÜLÖN KELL MEGHATÁROZNI.

3.3 VÉGÉRTÉK TÉTELEK ALKALMAZÁSA:

$$\underline{\underline{\lim_{t \to 0} \{ i_R(t) \}}} = i_R(0+) = \lim_{s \to \infty} \{ s\, I_R(s) \} = \lim_{s \to \infty} \left\{ 10 \frac{s}{s+\tau} \right\} =$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left\{ 10 \frac{1}{1+\frac{\tau}{s}} \right\} = \underline{\underline{10\,mA}}$$

$$\underline{\underline{\lim_{t \to \infty} \{ i_R(t) \}}} = \lim_{s \to 0} \{ s\, I_R(s) \} = \lim_{s \to 0} \left\{ 10 \frac{s}{s+\tau} \right\} = \underline{\underline{0\,mA}}$$

3.4 MIVEL A KAPCSOLÓ MÁR IGEN HOSSZÚ IDEJE AZ "a" ÁLLÁSBAN VOLT

$-5ms \leq t \leq 0$ => DC ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTÚ ÁRAMKÖR => A C

KONDENZÁTOR SZAKADÁSKÉNT VISELKEDIK => $i_R(t) = 0\,mA$

2.1 ALAPJÁN $0 < t \leq 5\,ms$

$$i_R(t) = 10\, e^{-\frac{t}{\tau}}\ mA, \quad \tau = 1\,ms$$