

Házi feladat a Laplace-transzformáció témakörében

1. Adja meg a következő $x(t)$ jel Laplace-transzformáltját a definíció segítségével! Mennyi ennek az értéke $s=-a$ esetén?

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

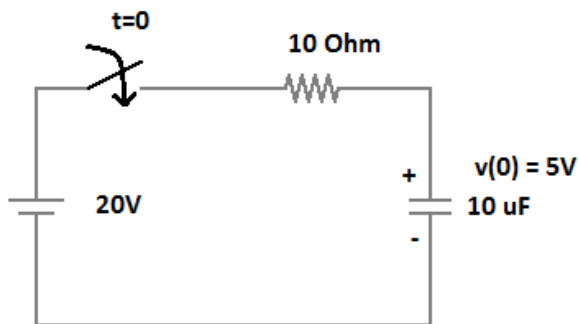
2. Adja meg a következő, frekvenciatartományban levő jelek inverz Laplace-transzformáltját a táblázat segítségével!

(a) $X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$

(b) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2}$

(c) $X(s) = \frac{2+2se^{-2s}+4e^{-4s}}{s^2+4s+3}$

3. Adja meg az áramkörben folyó áram értékét az időtartományban, ha a kapcsoló $t=0$ -ban átkapcsol!

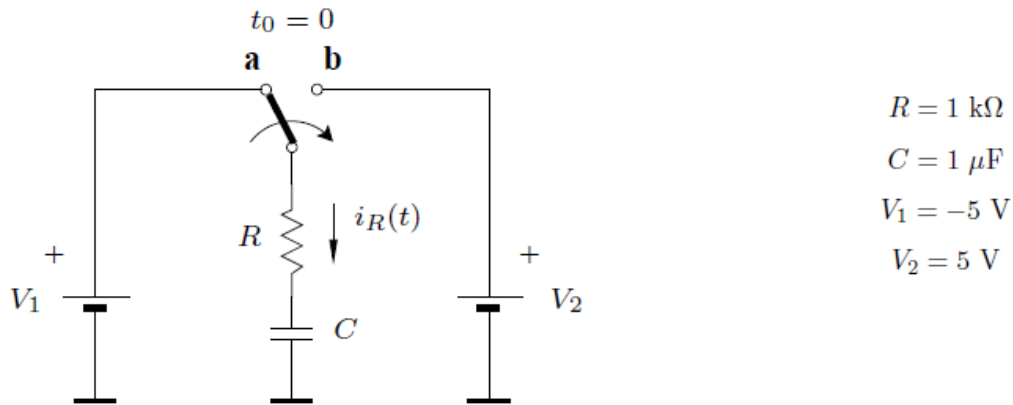


Laplace transzformációra vonatkozó tételek és mellettük a legfontosabb időfüggvények Laplace transzformáltjai ($t > 0$ -ra)

Property	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	$\delta(t)$	1
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	t	$\frac{1}{s^2}$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$		
Time integration	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
Time periodicity	$f(t) = f(t + nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s)$		

4. Ez a feladat korábbi vizsgapélda volt:

Az alábbi áramkörben az igen hosszú ideje a baloldali, azaz „a” állásban lévő kapcsolót a $t_0 = 0$ időpillanatban átváltjuk a „b” jobboldali állásba.



- (a) Az egyoldalas Laplace transzformáció segítségével határozza meg az $i_R(t)$ áram értékét az időtartományban.
(10 pont)
- (b) Adja meg azt a t időtartományt, amelyre az $i_R(t)$ áram meghatározható az egyoldalas Laplace transzformáció segítségével.
(4 pont)
- (c) Az egyoldalas Laplace transzformációra vonatkozó végérték tételek alkalmazásával határozza meg az $i_R(t)$ áram értékét a $t \rightarrow 0$ és $t \rightarrow \infty$ időpillanatokban.
(6 pont)
- (d) A fizikai kép alapján határozza meg az $i_R(t)$ áramot a $t \leq 0$ tartományban, majd a 2.1 pontban kapott eredmény felhasználásával, az exponenciális függvényre vonatkozó szabályok szerint, méretarányosan rajzolja fel az $i_R(t)$ áram alakját a $-5 \text{ ms} \geq t \geq 5 \text{ ms}$ tartományban.
(5 pont)

..