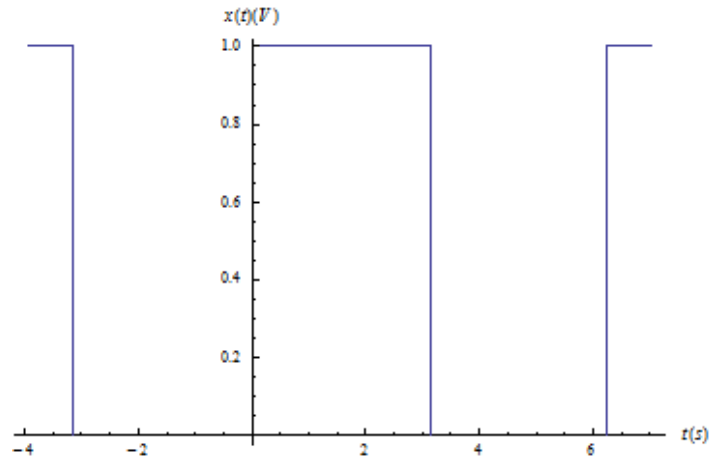


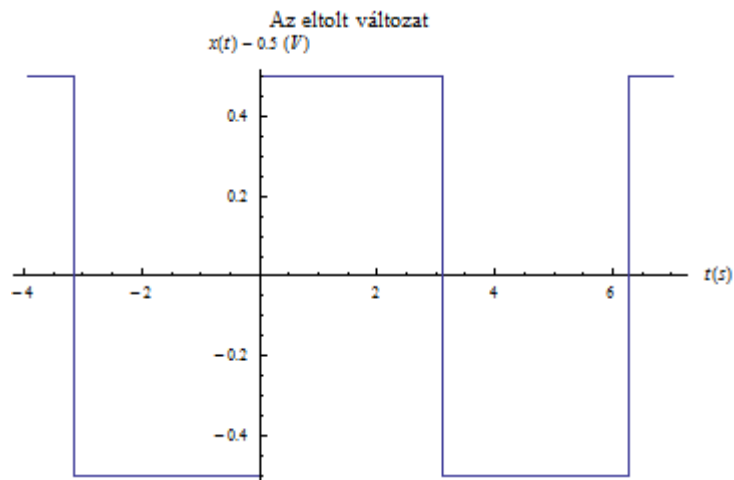
6. Házi feladat megoldásai

1. Feladat

- Az adott képlet alapján a jel egy 2π periódusú négyzögjel, 0 és 1 V közt:



- A közelítéshez Fourier-sorba fejtjük a négyzögjelet (előbb trigonometrikus, majd harmonikus alakba). Itt kihasználjuk, hogy a jelet -0.5 V-tal eltolva az y tengely mentén páratlan jelet kapunk, ekkor $a_k = 0 \forall k \in \mathbb{Z}^+$.



- A jel periódusideje: $T_0 = 2\pi$ s.
- A jel körfrekvenciája: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ Hz.
- $$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi 0.5 \sin(kt) dt + \int_\pi^{2\pi} -0.5 \sin(kt) dt \right] =$$

$$\frac{0.5}{\pi} \left\{ \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi + \left[\frac{\cos(kt)}{k} \right]_\pi^{2\pi} \right\} = \frac{0.5}{\pi} \left[\frac{-\cos(k\pi) + \cos(k \cdot 0) + \cos(k \cdot 2\pi) - \cos(k\pi)}{k} \right] =$$

$$\frac{1 - \cos(k\pi)}{k\pi} = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}.$$
- Így az eltolt jel Fourier-sora:

$$x(t) - 0.5 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \sin(kt) \text{ [V]}$$

Innen az eredeti jel Fourier-sora:

$$x(t) = 0.5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \sin(kt) \text{ [V]}$$

- FIGYELEM! Az áramköri számítást már az eredeti jel sorával kell elvégezni!

- A számítás során elsőrendű közelítést kell alkalmazni, azaz $x(t)$ -t közelítjük az $x(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(1 * t) + b_1 \sin(1 * t) [V] = 0.5 + \frac{1 - (-1)^1}{1 * \pi} * \sin(1 * t) [V] = 0.5 + \frac{2}{\pi} \sin(t) [V]$ alakban.
- A harmonikus alak együtthatói, és a harmonikus alak fázisszöge:

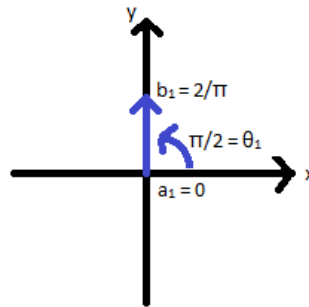
$$C_0 = \frac{a_0}{2} = 0.5 [V]$$

$$C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2} = \left|\frac{2}{\pi}\right| = \frac{2}{\pi} [V]$$

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \arctg\left(\frac{2/\pi}{0}\right) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

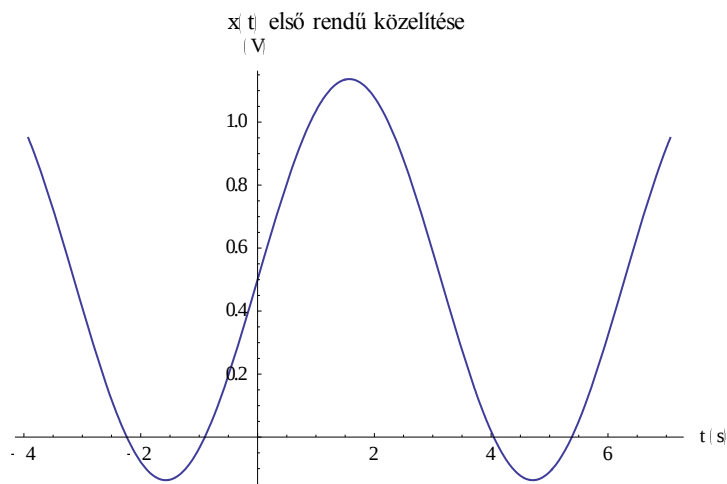
FIGYELEM! A harmonikus alak együtthatói NEM lehetnek NEGATÍVAK! Ugyanis ha a gyökjel alatt negatív szám szerepel, akkor is: $\sqrt{(x)^2} = |x|$.

A harmonikus alak együtthatóinak és fázisszögeinek kiszámítását szemléletesen úgy lehet elképzelni, mintha egy (a_k, b_k) koordináta mátrixú vektor polár koordinátáit számolnánk ki (a vektor abszolút értéke, és x tengely pozitív irányával bezárt szöge).

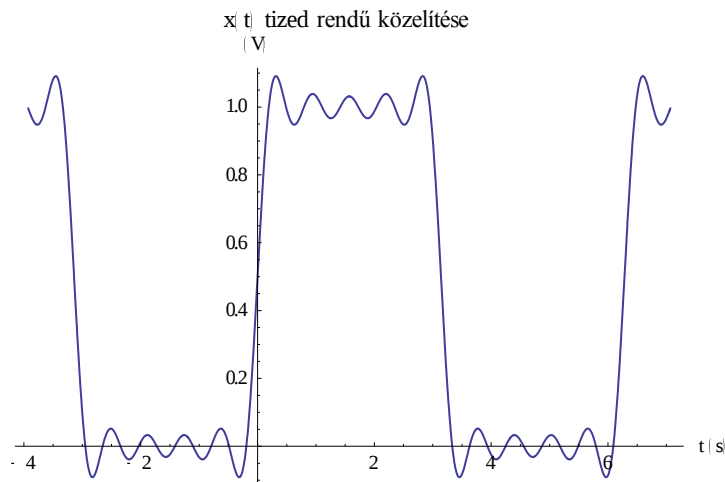


- Azaz $x(t)$ közelítése a harmonikus alak első két tagjával: $x(t) \approx C_0 + C_1 \cos(t - \theta_1) [V] = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) [V]$

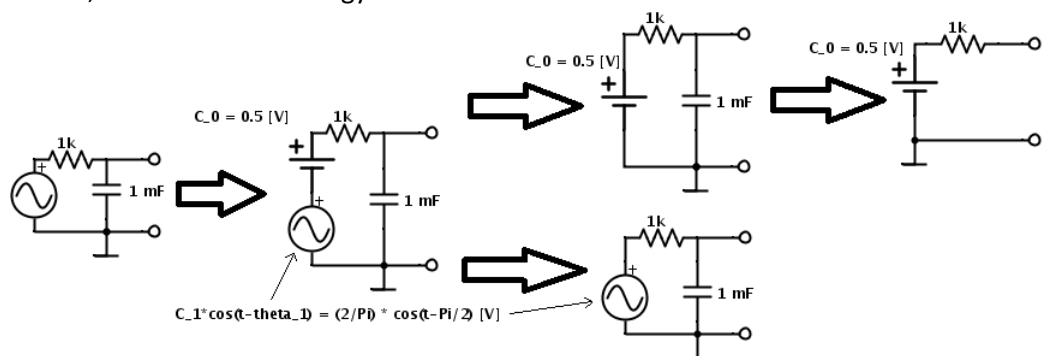
Ez kirajzolva:



Láthatóan ez igen pontatlan, a szemléltetés kedvéért viszont itt a tizedrendű közelítés, ami jóval pontosabb:



- A Fourier-sorba fejtett jellel való gerjesztését úgy lehet elképzelni, hogy egy az, $x(t)$ jelet előállító forrás helyébe végtelen sok ($x(t)$ -vel azonos típusú) forrást kapcsolunk (illetve annyit, amekkora a közelítés rendje). Ezek közül a források közül az első egyenfeszültséget/egyenáramot szolgáltat, aminek nagysága C_0 , a második $C_1 \sin(1 * \omega_0 * t)$, a harmadik $C_2 \sin(2 * \omega_0 * t)$, stb. váltakozó feszültséget/áramot szolgáltat (attól függően, hogy $x(t)$ feszültség, vagy áramforrás volt). Innentől kezdve pedig a szuperpozíció tételét használjuk ki, ami azt jelenti, hogy lineáris rendszert gerjesztő jelek összegére adott válasz egyenlő az egyes jelekre külön-külön adott válaszok összegével. (Tulajdonképpen ez egyben a linearitás definíciója.)
- Emiatt, az eredeti áramkör így írható át:



- Előbb 0-vá tesszük a váltakozó áramú forrás gerjesztését. Ekkor egy állandósult állapotú egyenáramú hálózatot kell kiszámolni (a kondenzátor szakadás). Mivel az ellenálláson nem folyik áram, a rajta eső feszültség 0 [V], így a kimeneten a huroktörvény miatt a gerjesztő forrás feszültségével azonos feszültség esik.
- Most az egyenáramú forrás gerjesztését tesszük 0-vá, ekkor egy állandósult állapotú, AC (szinuszos gerjesztésű) hálózat kimenetét kell kiszámolni.

$$\frac{2}{\pi} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \angle -\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \angle -90^\circ$$

$$Y = \frac{2}{\pi} \angle -90^\circ * \frac{Z_{C1}}{Z_R + Z_{C1}} = \frac{2}{\pi} \angle -90^\circ * \frac{\frac{1}{j*10^{-3}}}{1000 + \frac{1}{j*10^{-3}}} = \frac{2}{\pi} \angle -90^\circ * \frac{1}{1 + j*1000*10^{-3}} =$$

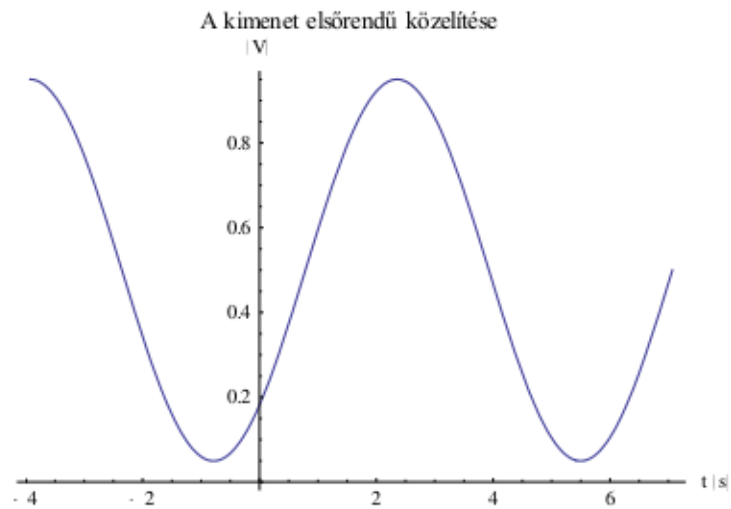
$$\frac{2}{\pi} \angle -90^\circ * \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2} \angle -135^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \angle \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \angle \frac{3\pi}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) [V]$$

- A kimenet a két számolt kimenet összege:

$$y(t) \approx 0.5 + \frac{\sqrt[2]{2}}{\pi} \cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) [V]$$

Ez kirajzolva:



Az alábbi ábrán a TINA programmal készült szimuláció eredménye látható, a függőleges tengely osztása: 1 V/osztás; a vízszintes tengelyé: 2 s/osztás. VF1 a forrás ($x(t)$) jelalakja, VF2 a kimenet ($y(t) = V_{C1}$).

