

ANALÍZIS A KOMPLEX FREKVENCIATARTOMÁNYBAN: LAPLACE TRANSZFORMÁCIÓ

(gyakorlati anyag)

Az egyoldalas Laplace transzformáció definíciója:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

ahol az $s = \sigma + j\omega$ a komplex frekvencia.

Vedd észre:

A fenti transzformáció csak a $0 < t < \infty$ tartományra vonatkozik. Ezért a $t \leq 0$ tartományra semmit se tudunk mondani. Ezt a tényt sok tankönyv úgy veszi figyelembe, hogy a válaszjelet beszorozza az $u(t)$ belépő függvénnyel. Ez azért helytelen, mert a belépő függvénnyel való szorzás a $t \leq 0$ tartományra 0-át ad, ami nem feltétlen igaz. Lásd a 2. feladatot.

A Laplace transzformációnak van egy kétoldalas változata is, ahol $-\infty < T < \infty$. Mi **csak** a belépő függvényekre definiált **egyoldalas** Laplace transzformációval foglalkozunk.

A kétoldalas Fourier transzformációt tekinthetjük a Laplace transzformáció egy speciális esetének amikor az $s = j\omega$ tehát:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Az egyoldalas Fourier transzformáció a kétoldalastól abban különbözik, hogy más az értelmezési tartománya. Vedd észre, az alsó integrálási határ kétoldalas esetben $-\infty$, míg egyoldalasnál $0+$!

~~A~~ Laplace a teljes s síkon értelmezve van ~~addig~~ ^{mindig} a Fourier csak a $j\omega$ tengelyen. Általánosságban a Fourier az állandósult állapot vizsgálatára jó míg a Laplace inkább a belépő függvények által generált tranziens viselkedés analízisére amelyben a kezdeti értékekkel is figyelembe kell venni.

Néhány alapvető függvény egyoldalas Laplace transzformáltja ahol az alsó integrálási határban a $0+$ és 0 között nem teszünk különbséget:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} \cdot 0 + \frac{1}{s} \cdot 1 = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt =$$

$$\frac{1}{2j} \int_0^\infty [e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}] dt = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

[Házi feladat ugyanígy határozd meg a $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}=?$]

Akkor ezek után határozzuk meg az $f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}$ fgv. Laplace transzformáltját ha $t > 0$. Lineáris tulajdonságát felhasználva:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} + \mathcal{L}\{2u(t)\} - 3\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = 1 + 2\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+2} = \frac{s^2 + s + 4}{s(s+2)}$$

A Laplace transzformáció tulajdonságai a következő oldalon bemutatott táblázatban láthatók.

Példaként a differenciálásra vonatkozó összefüggés igazolása:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \left[\frac{df(t)}{dt}\right] e^{-st} dt \quad (1)$$

Egy szorzat deriválása:

$$\frac{d}{dt}(xy) = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

$x = f(t)$ és $y = e^{-st}$ behelyettesítéssel élve és átrendezve kapjuk

$$\frac{df(t)}{dt} e^{-st} = \frac{d}{dt} [f(t)e^{-st}] - f(t)(-se^{-st}) = \frac{d}{dt} [f(t)e^{-st}] + f(t)(se^{-st}) \quad (2)$$

Behelyettesítve (2)-öt (1)-be kapjuk

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} [f(t)e^{-st}] dt + \int_0^\infty f(t)(se^{-st}) dt$$

$$= f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = 0 - f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

[Házi feladat ugyanígy az időbeli integrálás levezetése.]

Property	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	$\delta(t)$	1
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	t	$\frac{1}{s^2}$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	$t^n e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$		
Time integration	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
Time periodicity	$f(t) = f(t + nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s)$		

Az inverz Laplace transzformáció, azaz visszatérés az idő tartományába:

$$f(t)u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

ahol a $\sigma > \sigma_0$. De a mérnöki gyakorlat inkább a résztörtekre bontás majd táblázat használata. Tekintsük a következő példát, ahol keressük az inverzét a következő Laplace transzformált függvénynek: $F(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+4}\right\} = 3u(t) - 5e^{-t} + 3\sin(2t)$$

Nézzünk még egy példát, legyen most az $F(s) = \frac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)}$ keressük az inverz Laplace transzformáltját: (ehhez résztörtekre kell bontani)

$$\frac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} = \frac{A(s+2)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+2)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$s^2 + 12 = A(s^2 + 5s + 6) + B(s^2 + 3s) + C(s^2 + 2s)$$

$$\text{konstans: } 12 = 6A \Rightarrow A = 2$$

$$s: 0 = 5A + 3B + 2C \Rightarrow 3B + 2C = -10$$

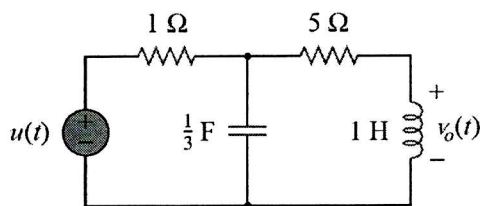
$$s^2: 1 = A + B + C \Rightarrow B + C = -1$$

Tehát $A = 2$, $B = -8$ és $C = 7$ így az $F(s)$ átírva $F(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{s+2} + \frac{7}{s+3}$, így az inverze:

$$f(t) = 2u(t) - 8e^{-2t} + 7e^{-3t}, \quad t > 0.$$

[Házi feladat ugyanez a következő Laplace transzformált függvényre: $F(s) = \frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}$]

1. feladat:



Határozd meg $v_o(t)$ -t $t > 0$ időtartományra abban az esetben, ha minden kezdeti értéket nullának tekintünk (azaz $v_c(0) = 0$ és $i_L(0) = 0$). Mivel az összes idáig tanult hálózati tétel és módszer igaz itt is használjuk a hurok áramok módszerét.

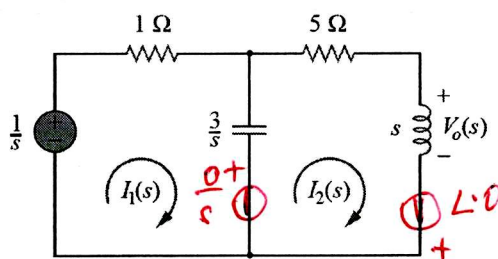
Megoldás:

Első lépésként végezzük el a Laplace transzformációt:

$$\begin{aligned} u(t) &\Rightarrow \frac{1}{s} \\ 1H &\Rightarrow sL = s \cdot 1 = s \\ \frac{1}{3}F &\Rightarrow \frac{1}{sC} = \frac{3}{s} \end{aligned}$$

$R \Rightarrow R$

a két hurokáramot is bejelölve:



AZÉRT ILYEN,
MERT VALAMENNYI
KEZDETI FELTÉTEL
NULLA VOLT!

A két hurokra akkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} I_1: \quad 0 &= -\frac{1}{s} + \left(1 + \frac{3}{s}\right) I_1 - \frac{3}{s} I_2 & I_2: \quad 0 &= -\frac{3}{s} I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right) I_2 \\ \frac{1}{s} &= \left(1 + \frac{3}{s}\right) I_1 - \frac{3}{s} I_2 & I_1 &= \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3) I_2 \end{aligned}$$

A 2. hurokárambók kifejezett I_1 -et visszahelyettesítve majd $3s$ -el felszorozva:

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right) \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3) I_2 - \frac{3}{s} I_2$$

$$3 = (s^3 + 8s^2 + 18s) I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s} = \frac{3}{s(s^2 + 8s + 18)}$$

Ekkor a második hurok áram és az induktivitás impedanciájával kifejezve a $V_o(s)$:

$$V_o(s) = sI_2 = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s + 4)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

Utolsó lépés pedig az inverz Laplace transzformációval visszatérni az idő tartományba:

$$v_o(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin \sqrt{2}t \quad t > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{s} & -\frac{3}{s} \\ -\frac{3}{s} & s + 5 + \frac{3}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Segítség: Operátoros impedanciák a kezdeti értékekkel (feszültség- majd áramforrás)

Időtartomány

Ellenállás

$$v_R(t) = R i_R(t)$$

Induktivitás

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

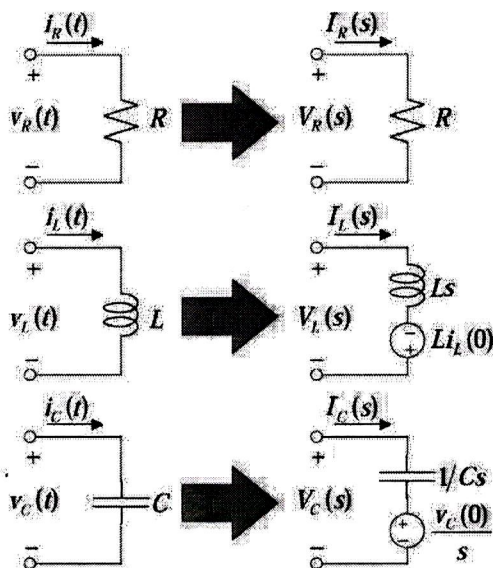
$$i_L(0+) = i_L(0)$$

Kapacitás

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

$$+ v_C(0)$$

$$v_C(0+) = v_C(0)$$



$$V_R(s) = R I_R(s)$$

$$V_L(s) = sL I_L(s) - L i_L(0)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s}$$

Ellenállás

$$i_R(t) = \frac{1}{R} v_R(t)$$

Induktivitás

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(\tau) d\tau$$

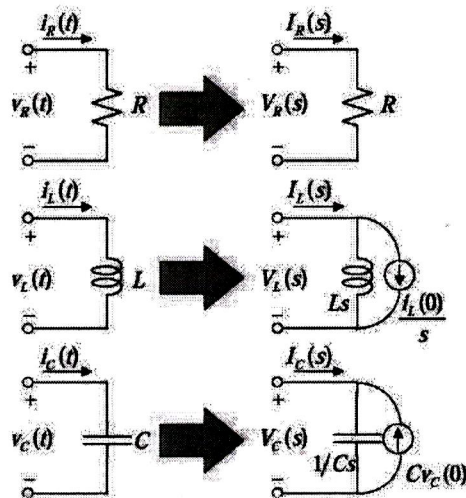
$$+ i_L(0)$$

$$i_L(0+) = i_L(0)$$

Kapacitás

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_C(0+) = v_C(0)$$



$$I_R(s) = \frac{1}{R} V_R(s)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_L(s) + \frac{i_L(0)}{s}$$

$$I_C(s) = sC V_C(s) - C v_C(0)$$

Laplace transzformációra vonatkozó tételek és mellettük a legfontosabb időfüggvények Laplace transzformáltjai ($t > 0$ -ra)

Property	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	$\delta(t)$	1
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	t	$\frac{1}{s^2}$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Time integration	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
Time periodicity	$f(t) = f(t + nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$		
Convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s)$		

2. feladat:

Vigyázz:

- az $u(t) = 1(t)$ egységugrás függvénynek kétféle definíciója van
- az egyoldalas Laplace transzformáció értelmezése körül nagy a kavarodás

Megoldás:

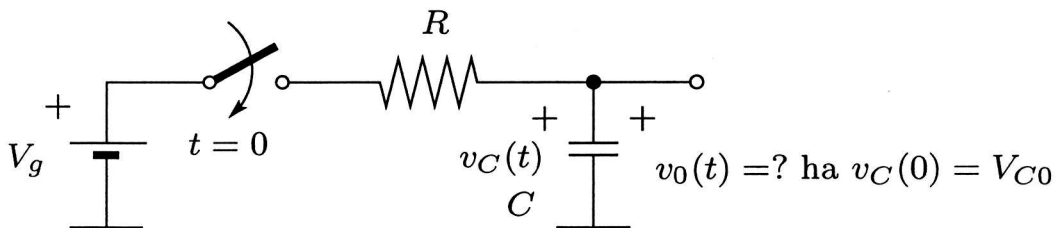
- Oppenheim értelmezését és definícióit követjük
- aktualizált anyagok a tárgy honlapjáról letölthetők és értelmezendők

Példa célja:

- egyszerű példa kapcsán a különböző módszerek
 - használhatóságának és
 - korlátainak

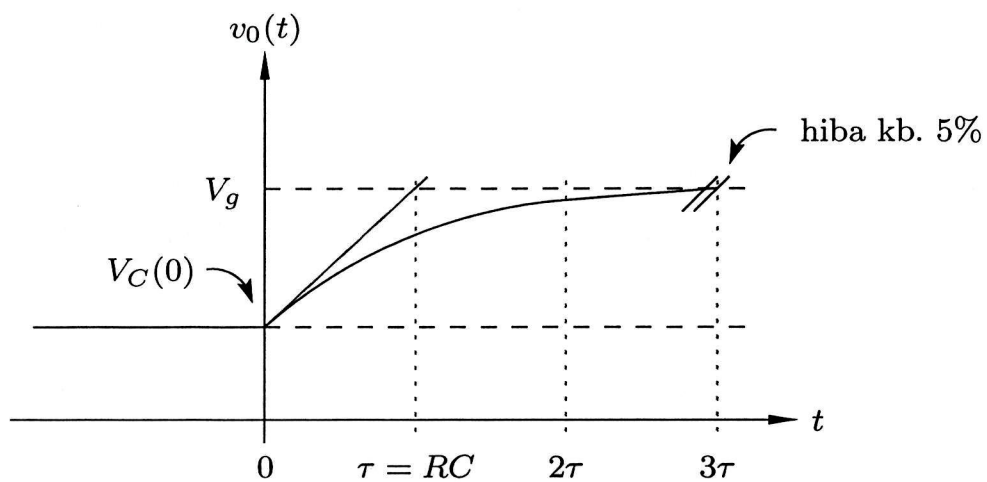
bemutatása

A megoldandó példa:



1.) Megoldás az időtartományban

Megoldás fizikai kép alapján. Egy időállandós (elsőrendű) áramkör.



2.) Fourier transzformáció

Nem használható, mivel a C kondenzátor nem energiamentes a $t = 0$ időpillanatban.

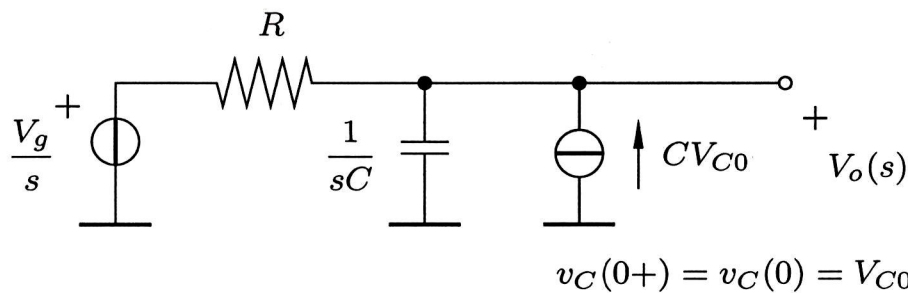
3.) Laplace transzformáció

Vedd észre:

$$F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

A Laplace minden jelet, a kezdeti értéket is, belépő jelnek tekint, tehát az eredmény csak a $t > 0$ tartományra igaz.

Az áramkör Laplace transzformált ekvivalense $t > 0$ -ra:



VEDD ÉSZRE, NEM KELL KÜLÖN TRANZIENT ÉS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTOT VIZSGÁLNI

Feszültségosztó tételét alkalmazva az operátoros impedanciák tartományában és kihasználva a szuperpozíció tételét:

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \frac{V_g}{s} + \left(R \parallel \frac{1}{sC} \right) CV_{C0} = \frac{V_g}{s(1 + sRC)} + \frac{RC}{1 + sRC} V_{C0} \\ &= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) V_g + \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} V_{C0} \end{aligned}$$

**RÉSZTÖRTEK-
TÉTEL
BONTÁS:** ahol az egyszerű inverz transzformáció miatt az első tagot rész törtre bontottuk. Visszatérve az időtartományba

$$\frac{1}{s(1 + sRC)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + sRC} \Rightarrow$$

9 $1 = A + sARC + sB$

$s^0: A = 1$

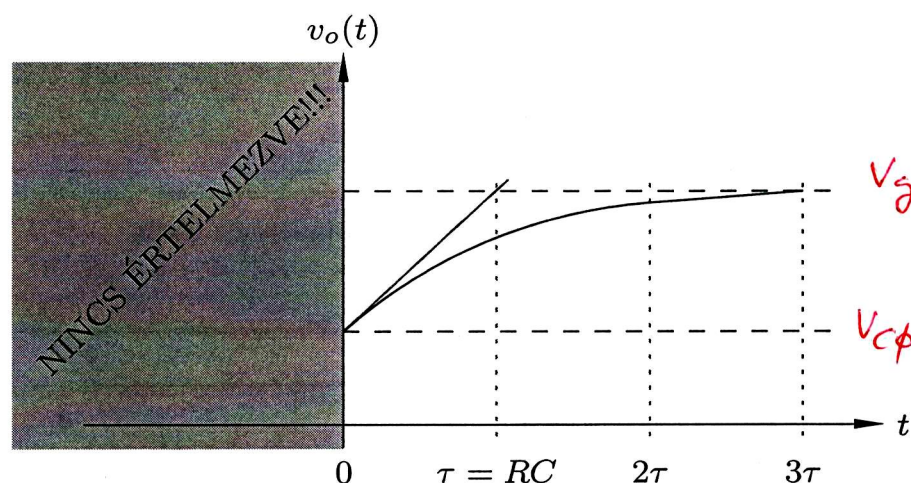
$s^1: 0 = ARC + B = RC + B \Rightarrow B = -RC$

$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_o(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{V_g}{s} - \frac{V_g}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{V_{C0}}{s + \frac{1}{RC}}\right\}$$

$$= V_{C0}e^{-\frac{t}{RC}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)V_g \quad \text{ahol } t > 0$$

Vedd észre, $v_o(t)$ csak $t > 0$ esetén van értelmezve.

Ábrázoljuk $v_o(t)$ -t:



Vedd észre, hogy a $t < 0$ tartományra semmit sem tudunk mondani az egyoldalas Laplace transzformáció alapján!

Ellenőrzés:

$$v_o(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} \{v_o(t)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sV_o(s)\}$$

$$= \left[\frac{sV_g}{s(1 + sRC)} + \frac{sRC}{1 + sRC} V_{C0} \right] \Big|_{s \rightarrow \infty} = 0 + 1 \cdot V_{C0} = V_{C0} \quad \checkmark$$

$$v_o(t \rightarrow \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{v_o(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{sV_o(s)\}$$

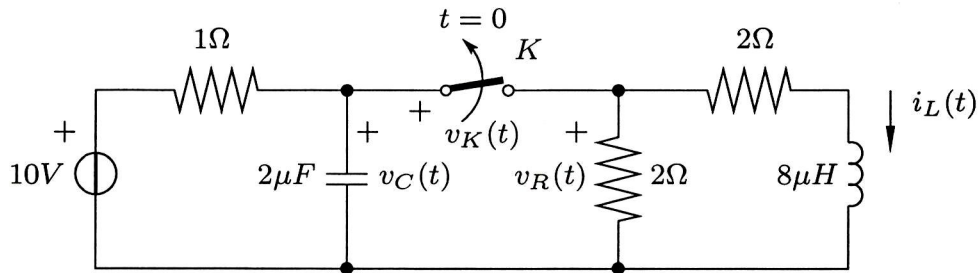
$$= \left[\frac{sV_g}{s(1 + sRC)} + \frac{sRC}{1 + sRC} V_{C0} \right] \Big|_{s \rightarrow 0} = V_g + 0 = V_g \quad \checkmark$$

L'HOSPITAL SZABÁLY $\frac{\infty}{\infty}$ ÉS $\frac{0}{0}$ ESETÉBEN:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Big|_{x=a}$$

3. feladat:

Az alábbi áramkörben a kapcsolót $t = 0$ időpillanatban nyitjuk. A megadott mérőirány mellett határozza meg a kapcsolón mért $v_K(t)$ feszültséget a $t > 0$ időtartományra. A megoldást igazolja a fizikai kép alapján a $-\infty < t < +\infty$ időtartományra a $v_C(t)$ és $v_R(t)$ feszültségek ábrázolásával.



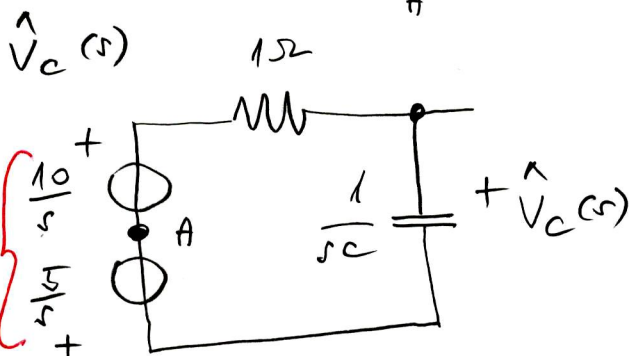
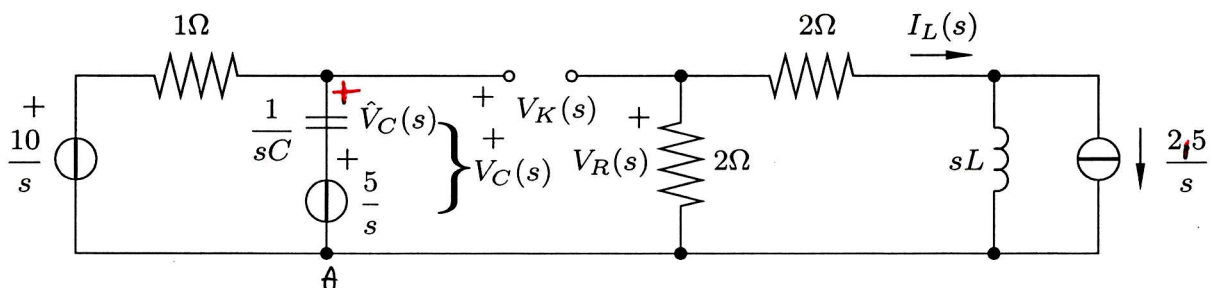
A kapcsoló már nagyon régóta zárt állapotban volt. Ekkor a kezdeti feltételek meghatározását az állandósult DC áramkörökre vonatkozó behelyettesítések alapján (C szakadás, L rövidzár):

$$v_C(0) = 10V \frac{2 \parallel 2}{1 + 2 \parallel 2} = 5V \quad i_L(0) = \frac{5V}{2\Omega} = 2,5 \text{ A}$$

A K kapcsoló nyitása után két független, egyidőállandós áramkört kapunk, ahol

$$v_K(t) = v_C(t) - v_R(t) \Rightarrow V_K(s) = V_C(s) - V_R(s)$$

A két egyidőállandós áramkör a kezdeti feltételekkel:



$$= \frac{10}{s} - \frac{5}{s} = \frac{5}{s}$$

amelyből a feszültségosztó tétellel:

$$V_C(s) = \frac{5}{s} + \hat{V}_C(s) = \frac{5}{s} + \underbrace{\left(\frac{10}{s} - \frac{5}{s}\right)}_{\frac{5}{s}} \frac{\frac{1}{sC}}{1 + \frac{1}{sC}} = 5 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s} \frac{5 \cdot 10^5}{s + 5 \cdot 10^5} \right) \text{ V}$$

ahol a bal oldali áramkör időállandója: $\tau_b = RC = 2 \mu\text{s}$

Áramosztó tétellel:

$$V_R(s) = -\frac{2,5}{s} \frac{sL}{sL + 4} \cdot 2 = -5 \frac{1}{s + 5 \cdot 10^5} \text{ V}$$

A jobb oldali áramkör időállandója: $\tau_j = \frac{L}{4} = 2 \mu\text{s} \equiv \tau_b$

A kapcsolón mért feszültség a komplex frekvenciatartományban:

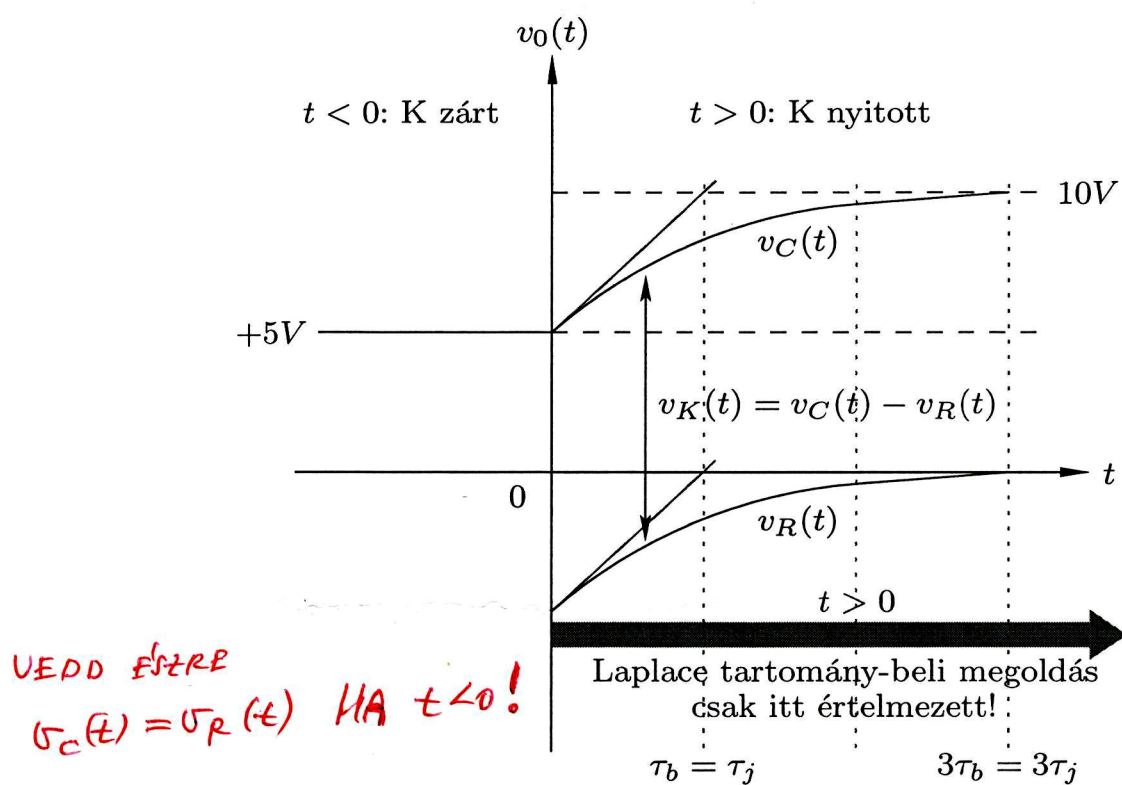
$$\begin{aligned} V_K(s) &= V_C(s) - V_R(s) = \frac{5}{s} + \frac{5}{s} \frac{5 \cdot 10^5}{s + 5 \cdot 10^5} + 5 \frac{1}{s + 5 \cdot 10^5} \quad \frac{s}{s} \\ &= \frac{5}{s} + \frac{\cancel{5(s + 5 \cdot 10^5)}}{s(s + 5 \cdot 10^5)} = \frac{10}{s} \text{ V} \end{aligned}$$

$$v_K(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_K(s)\} = 10u(t) \text{ V}, \quad t > 0$$

Tehát a kapcsolón mért $v_K(t)$ feszültség a $t > 0$ időtartományban egy állandó feszültség.

Viszont a $v_C(t)$ és $v_R(t)$ nem állandóak.

Az eredmény igazolása az egyidőállandós rendszerek fizikai képe alapján:

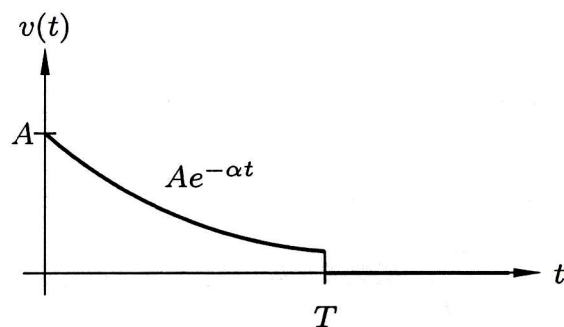


4. feladat:

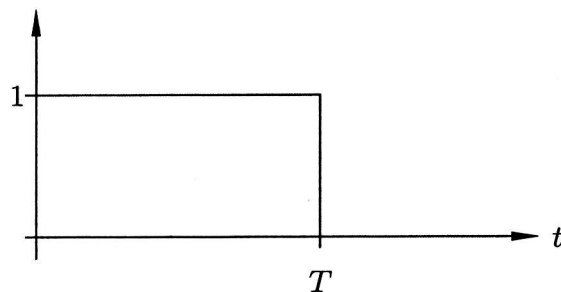
Eltolás az időtartományban tétel alkalmazása.

4.(a) Jelalak konstruálása

Az időtartományban hozza létre az alábbi ábrán bemutatott jelalakot, majd határozza meg annak Laplace transzformáltját.



$$v(t) = \underbrace{[u(t) - u(t - T)]}_{\text{ablakozó függvény:}} Ae^{-\alpha t}, \quad t > 0$$



$$\mathcal{L}\{u(t) Ae^{-\alpha t}\} = \frac{A}{s + \alpha}$$

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{u(t) Ae^{-\alpha t} - u(t - T) Ae^{-\alpha t}\} \cdot \underbrace{e^{-\alpha T} e^{\alpha T}}_{e^0 = 1} \\ &= \frac{A}{s + \alpha} - e^{-\alpha T} \mathcal{L}\{u(t - T) Ae^{-\alpha(t - T)}\} \end{aligned}$$

Az eltolási tétellel:

$$V(s) = \frac{A}{s + \alpha} - \frac{Ae^{-\alpha T}}{s + \alpha} e^{-sT}$$

14

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\{u(t - T) Ae^{-\alpha(t - T)}\} \cdot e^{-\alpha T} \\ &\quad \uparrow \text{NEM FÜGG } t - T \text{ ÖL} \\ &= e^{-\alpha T} \mathcal{L}\{u(t - T) Ae^{-\alpha(t - T)}\} \end{aligned}$$

4.(b) Eltolási tétel alkalmazása inverz Laplace transzformáció esetén

Határozza meg az alábbi függvény inverz Laplace transzformáltját:

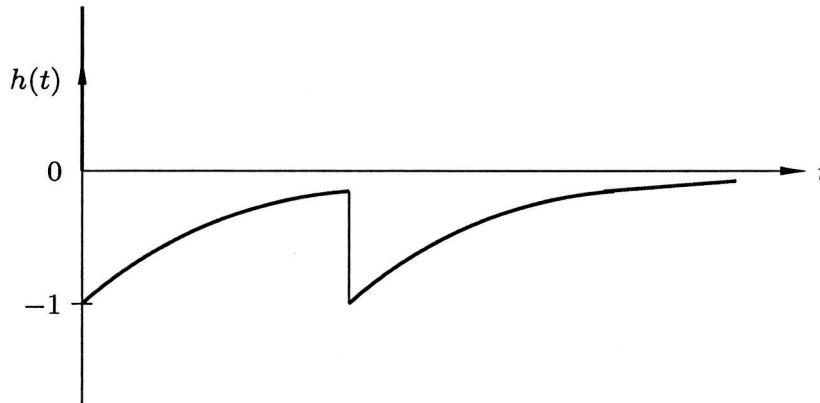
$$H(s) = \frac{s - e^{-sT}}{s + 1}$$

Résztörtekre bontva:

$$H(s) = \frac{s}{s+1} - \frac{e^{-sT}}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1}e^{-sT} \quad \frac{s+1-1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}$$

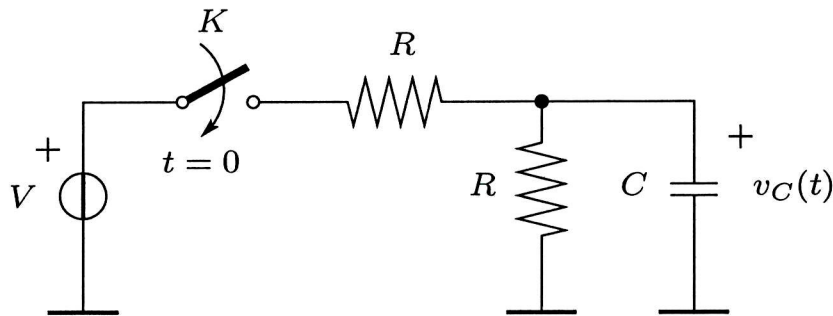
Az inverz Laplace transzformációt tagonként elvégezve kapjuk:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \delta(t) - u(t)e^{-t} - u(t-T)e^{-(t-T)}$$



5. feladat:

Aszimptotikus viselkedés meghatározása az idő és a komplex frekvenciatartományban.

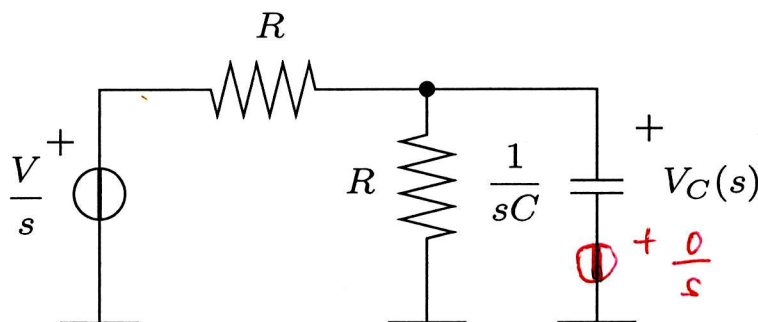


A nagyon régóta nyitott K kapcsolót zárjuk a $t = 0$ s időpillanatban.

- Laplace transzformációval határozzuk meg a $v_C(t)$ értékét a $t > 0$ időtartományra
- Az asimptotikus viselkedésre kidolgozott tételekkel ellenőrizzük le a megoldást

Kezdeti feltétel: a C kondenzátor az R ellenálláson keresztül biztosan kisül, azaz $v_C(0) = 0$.

A $t > 0$ tartományra érvényes helyettesítő kép a komplex frekvenciatartományban:



VEDD ÉRTKE,
MOST A KEZ-
DETI FELTÉTEL
0!

Feszültségosztó tétellel:

$$V_C(s) = \frac{R \parallel \frac{1}{sC}}{R + R \parallel \frac{1}{sC}} \frac{V}{s} = \frac{1}{1 + sRC + 1} \frac{V}{s} = \frac{\frac{2}{RC}}{s + \frac{2}{RC}} \frac{V}{2s}$$

$$R \parallel \frac{1}{sC} = \frac{R}{1 + sRC}$$

$$\frac{R}{R(1 + sRC) + R} = \frac{1}{2 + sRC}$$

Az inverz Laplace transzformációhoz résztörtekre bontva:

$$\frac{A}{s + \frac{2}{RC}} + \frac{B}{s} = \frac{\frac{2}{RC}}{\underbrace{\left(s + \frac{2}{RC}\right)s}} \quad | \times s \left(s + \frac{2}{RC}\right)$$

$$As + Bs + \frac{2}{RC}B = \frac{2}{RC}$$

$\Downarrow$

s^0 :

$$B = 1$$

s^1 :

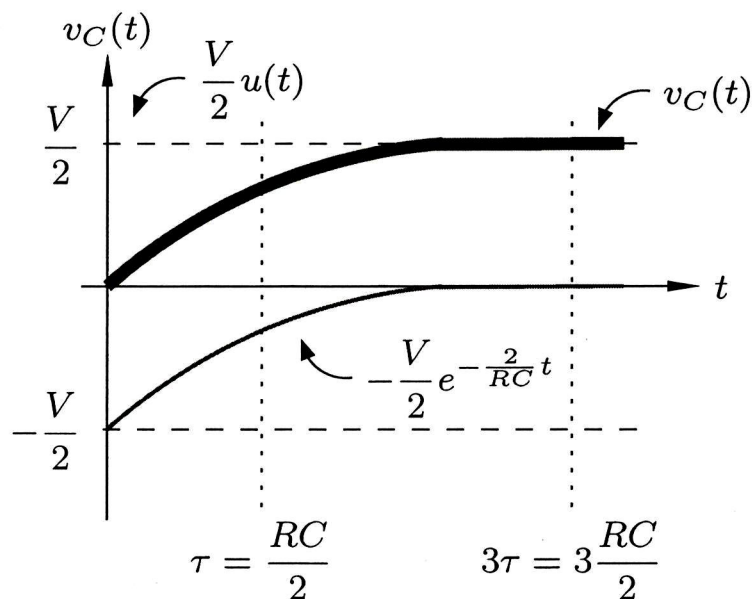
$$As + Bs = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$V_C(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{2}{RC}} \right) \frac{V}{2}$$

Inverz Laplace transzformációval:

$$v_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_C(s)\} = \left[u(t) - e^{-\frac{2}{RC}t} \right] \frac{V}{2}, \quad t > 0$$

A megoldást ábrázolva az időtartományban:



Aszimptotikus viselkedés: $\lim_{t \rightarrow 0} \{v_C(t)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sV_C(s)\}$

Fizikai képből (kezdeti feltétel): $\lim_{t \rightarrow 0} \{v_C(t)\} = 0$

Komplex frekvenciatartományban (Laplace transzformált):

$t \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{sV_C(s)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{s}{s} - \frac{s}{s + \frac{2}{RC}} \right) \frac{V}{2} \right\} \quad (*)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} \right) \frac{V}{2} \right\} = 0$$

Fizikai képből: $\lim_{t \rightarrow \infty} \{v_C(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{sV_C(s)\}$

Fizikai képből (állandósult állapotú DC): $\lim_{t \rightarrow \infty} \{v_C(t)\} = \frac{V}{2}$

Komplex frekvenciatartományban (Laplace transzformált):

$t \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{sV_C(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{s}{s} - \frac{s}{s + \frac{2}{RC}} \right) \frac{V}{2} \right\} \quad (*)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{1}{1} - 0 \right) \frac{V}{2} \right\} = \frac{V}{2}$$

MINDKÉT ESETBEN A L'HOSPITAL SZABÁLYT ALKALMAZTUK, MIVEL

$\frac{\infty}{\infty}$ ILL. $\frac{0}{0}$ ALAKOT KAPTUNK:

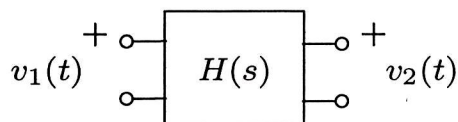
EGYSZERŰ L'HOSPITAL SZABÁLY:

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

6. feladat:

Stabilitásvizsgálat a komplex frekvenciatartományban.

Az alábbi négypólus (NP) átviteli függvénye $H(s) = \frac{s+1}{s^2+2as+a^2+b^2}$



Határozza meg az a és b konstansok értékét úgy, hogy a négypólus aszimptotikusan stabilis legyen.

A komplex frekvenciatartományban:

$$V_2(s) = H(s)V_1(s) = \frac{s+1}{s^2+2as+a^2+b^2} V_1(s)$$

Átrendezve azért, hogy megkapjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\underbrace{(s^2+2as+a^2+b^2)}_{\text{karakterisztikus egyenlet}} V_2(s) = (s+1)V_1(s)$$

A négypólus aszimptotikusan stabilis, ha a karakterisztikus egyenlet valamennyi gyöke a bal félsíkon van, mert ekkor a tranziens megoldás exponenciálisan lecseng:

$$s^2+2as+a^2+b^2=0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 - 4b^2}}{2} = -a \pm jb$$

MIVEL $b > 0$

Az aszimptotikus stabilitás feltételei:

- $a > 0$
- b tetszőleges értékű

