ANALÍZIS A FREKVENCIATARTOMÁNYBAN: A FOURIER SOR ÉS A FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ

A Fourier sor

Az itt következő anyag csak egy elméleti összefoglaló. Mivel az „Elektronikus és biológiai áramkörök” tárgyban a Fourier sor exponenciális alakját nem használjuk, ezért azt a gyakorlaton ne alkalmazzuk, arra ne hivatkozzunk.

Egy jel periódikus, ha minden t-re érvényes:

$$x(t) = x(t + T_0)$$

ahol T a jel periódusa. A jel alapfrekvenciája és a periódusa a következő összefüggésben van egymással:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ahol f_0 - az alapfrekvencia Hz-ben és ω_0 - alapfrekvencia rad/sec-ben.

A Fourier sor trigonometrikus, exponenciális valamint harmonikus felírása

- Trigonometrikus

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t)dt \qquad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t)dt$$

ahol a_0 az $x(t)$ jel átlaga, azaz DC értéke.

- Mérnöki alak (harmonic form)

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}, \quad \theta_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$$

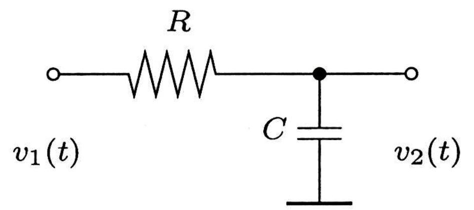
ahol C_k a harmonikus komponens amplitúdója, θ_k a fázisa.

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{V_{eff}\, e^{j\theta} \sqrt{2}}_{\text{KOMPLEX AMPLITÚDÓ}}\, e^{j\omega t} \right\}$$

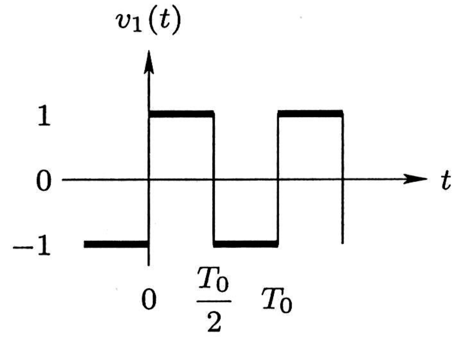
$$|V| = V_{eff} = \frac{C_k}{\sqrt{2}} \qquad \theta = -\theta_k$$

1. feladat

Az alábbi aluláteresztő szűrőt a $v_1(t)$ periódikus négyszögjel hajtja meg. Határozza meg a $v_2(t)$ válaszjelet állandósult állapotban.



ahol $\frac{1}{RC} << \frac{2\pi}{T_0}$



a.) Állandósult állapotú AC probléma. Először meg kell határozni a $v_1(t)$ Fourier sorát!

DC komponens: = ÁTLAG = 0 V

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} v_1(t)dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} v_1(t)dt = 0$$

Harmonikus komponensek:

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} v_1(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

Az integrált egyetlen T_0 periódusra kell kiértékelni. Az egyszerű integrálhatóság miatt az integrálási határok legyenek $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \cdot\, dt$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} v_1(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}(-1)\cos(k\omega_0 t)dt + \int_0^{+\frac{T_0}{2}}(+1)\cos(k\omega_0 t)dt\right]$$

A bal oldalon az első tagban

- integrálási határok felcserélése, majd
- $t = -\tau$ behelyettesítés

$$\frac{dt}{d\tau} = -1, \quad t = 0 \Rightarrow \tau = 0, \quad t = -\frac{T_0}{2} \Rightarrow \tau = \frac{T_0}{2}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T_0}\left[\int_0^{-\frac{T_0}{2}} \cos(k\omega_0 t)dt + \int_0^{\frac{T_0}{2}}\cos(k\omega_0 t)dt\right] \\ &= \frac{2}{T_0}\left[-\int_0^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{\cos(-k\omega_0\tau)}_{\cos(k\omega_0\tau)}\,d\tau + \int_0^{\frac{T_0}{2}}\cos(k\omega_0 t)dt\right] = 0 \end{aligned}$$

Vedd észre, páratlan periódikus függvényben csak szinuszos, azaz páratlan bázisfüggvények lépnek fel!

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}(-1)\sin(k\omega_0 t)dt + \int_{0}^{\frac{T_0}{2}}(+1)\sin(k\omega_0 t)dt\right] \\
&= \frac{2}{T_0}\left[-(-1)\left.\frac{\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right|_{-\frac{T_0}{2}}^{0} - \left.\frac{\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right|_{0}^{\frac{T_0}{2}}\right] \\
&= \frac{\cancel{2}}{\cancel{T_0}}\frac{\cos(0)-\cos\left(-k\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T_0}}\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}\right)-\cos\left(k\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T_0}}\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}}\right)+\cos(0)}{k\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T_0}}} \\
&= \frac{2\left[1-\cos(k\pi)\right]}{k\pi} = \begin{cases} 0, \text{ ha } k = 0,2,4,\ldots \text{ azaz páros} \\ \dfrac{4}{k\pi}, \text{ ha } k = 1,3,5,\ldots \text{ azaz páratlan} \end{cases}
\end{aligned}$$

Tehát az 50%-os kitöltésű négyszögjelben

- csak szinuszos komponensek és
- csak páratlan harmonikusok szerepelnek

$$\boxed{v_1(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \cdots + \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k} + \cdots\right] V, \text{ ahol } k = 1,3,5,\ldots}$$

b.) A $v_2(t)$ válaszjel meghatározásának lépései:

- $v_1(t)$ Fourier sor mérnöki alakjából a komplex amplitúdók meghatározása
- szuperpozíciót alkalmazok az időtartományban
- felírom az aluláteresztő szűrő frekvenciaválasz-függvényét
- meghatározom a válasz komplex amplitúdóját
- visszatranszformálom a kapott komplex amplitúdókat az időtartományba

Mérnöki alak: (emlékezz, $a_k = 0 \;\; \forall \;\; k$-ra)

$$v_1(t) = \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}{3} + \cdots\right] \text{ V}$$

Komplex amplitúdók:

$$V_1(k) = \frac{4}{\pi k}\angle -\frac{\pi}{2} \text{ V}, \quad k = 1,2,3,\cdots$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}\,\pi k}$$

Frekvenciaválasz a feszültségosztó tétellel:

$$\frac{V_2(k)}{V_1(k)} = \left.\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}\right|_{\omega = k\omega_0} = \left.\frac{1}{1 + j\omega CR}\right|_{\omega = k\omega_0} = H(jk\omega_0)$$

Mivel az aluláteresztő szűrő határfrekvenciája jóval kisebb mint az alapharmónikus frekvenciája

$$H(jk\omega_0) = \left.\frac{1}{1 + j\omega RC}\right|_{\omega = k\omega_0 >> \frac{1}{RC}} \approx \frac{1}{jk\omega_0 RC} = \frac{1}{k\omega_0 RC}\angle - \frac{\pi}{2}$$

Ebből a $v_2(t)$ válasz komplex amlitudói:

$$\sqrt{2}$$

$$V_2(k) \;=\; H(jk\omega_0)V_1(k) = \frac{1}{k\omega_0 RC}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{4}{\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

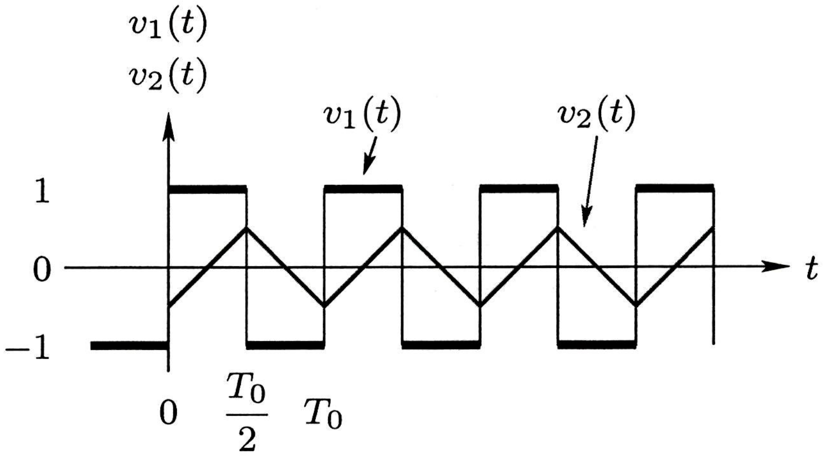
$$\frac{4}{\sqrt{2}\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\omega_0 RC}\frac{4}{\pi}\frac{1}{k^2}\angle - \pi = -\frac{1}{\omega_0 RC}\frac{4}{\pi}\frac{1}{k^2} \text{ V}$$

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt{2}$$

A $v_2(t)$ válaszjel az időtartományban (inverz transzformáció)

$$v_2(t) = \frac{1}{\omega_0 RC}\underbrace{\left(-\frac{4}{\pi}\left[\cos(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 t)}{9} + \frac{\cos(5\omega_0 t)}{25} + \ldots\right]\right)}_{\text{ez viszont egy háromszögjel Fourier sora}} \text{ V}$$



2. feladat

Az 1. feladatban szereplő kapcsoláshoz tartozó értékek: $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 0,47\mu\text{F}$ a gerjesztés pedig $v_g(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t)$ V.
Határozzuk meg a kimeneti feszültség értékét $f_1 = 60$ Hz és $f_2 =$ ~~1000 Hz~~ 10 kHz-es jelek esetén.

1. Tudjuk, hogy:

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1+j\omega CR} \quad \Rightarrow \quad V_2 = H(j\omega)V_1 = \frac{1}{1+j\omega CR}V_1$$

Ez alapján:

$$V_2(\omega = 2\pi 60) = \frac{1}{1+j2\pi\cdot 60\cdot 1000\cdot 4,7\cdot 10^{-7}}V_1(\omega = 2\pi 60)\ \frac{rad}{s}$$

$$= \frac{1}{1+j0,177}V_1(\omega = 2\pi 60) = 0,985\cdot 5(\angle -10^{o}) = 4,92(\angle -10^{o})\text{ V}$$

$$V_2(\omega = 2\pi 10000) = \frac{1}{1+j2\pi\cdot 10^4\cdot 1000\cdot 4,7\cdot 10^{-7}}V_1(\omega = 2\pi 10000)$$

$$= \frac{1}{1+j29,5}V_1(\omega = 2\pi 10000) = 0,0338\cdot 5(\angle -88,06^{o}) = 0,17(\angle -88,06^{o})\text{ V}$$

2. A megoldás az időtartományban:

$$60\text{ Hz esetén} \quad \Rightarrow \quad v_2(t) = 4,92\sqrt{2}\cos(2\pi 60t - 10^{o})\text{ V}$$

$$10\text{ kHz esetén} \quad \Rightarrow \quad v_2(t) = 0,17\sqrt{2}\cos(2\pi 10000t - 88,06^{o})\text{ V}$$