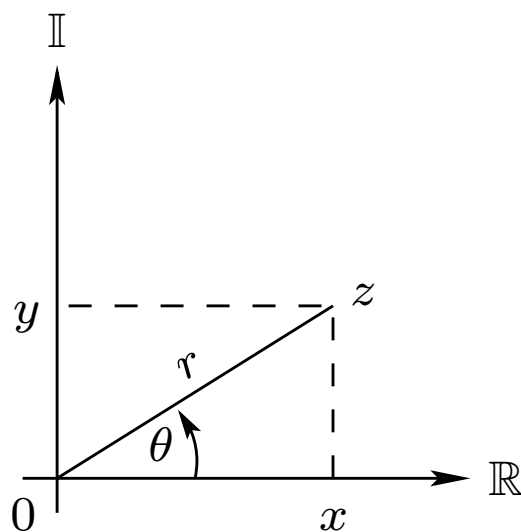


Komplex számok ismételés



$z = x + j \cdot y$ kanonikus (algebrai) alak, ahol $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$. $x = \text{Re}\{z\}$ a valós rész, $y = \text{Im}\{z\}$ a képzetes rész.

$z = |z| \angle(\theta) = r \angle(\theta)$ a polár alak. A polár alak és a kanonikus alak között az összefüggést a következő képletek adják:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \text{ vagy } x = r \cdot \cos \theta, y = r \cdot \sin \theta$$

Így $z = x + j \cdot y = r \angle(\theta) = r \cdot \cos \theta + j r \cdot \sin \theta$. Ebből $z = r \cdot e^{j\theta}$ az exponenciális alak.

Példa:

$$12 \angle -60^\circ = 12 \cos(-60^\circ) + j \cdot 12 \sin(-60^\circ) = 6 - j10.39$$

Példa:

$$\frac{(2+j5)(8e^{j10})}{2+j4+2\angle-40^\circ} = ?$$

$$2 + j5 = \sqrt{2^2 + 5^2} \angle [\tan^{-1}(\frac{5}{2})] = 5.385 \angle 68.2^\circ$$

$$(2 + j5)(8e^{j10}) = (5.385 \angle 68.2^\circ)(8 \angle 10^\circ) = 43.08 \angle 78.2^\circ$$

$$2 + j4 + 2 \angle -40^\circ = 2 + j4 + 2 \cos(-40^\circ) + j2 \sin(-40^\circ) = 3.532 + j2.714 = 4.454 \angle 37.54^\circ$$

Ezért:

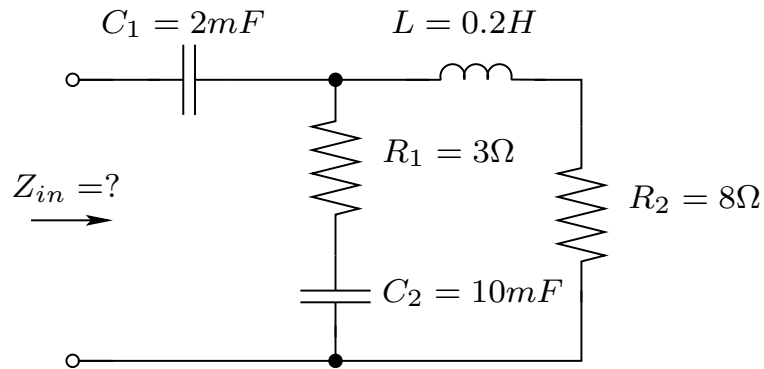
$$\frac{(2+j5)(8e^{j10})}{2+j4+2\angle-40^\circ} = \frac{43.08 \angle 78.2^\circ}{4.454 \angle 37.54^\circ} = 9.672 \angle 40.66^\circ$$

Tihanyi tanár úr javaslata:

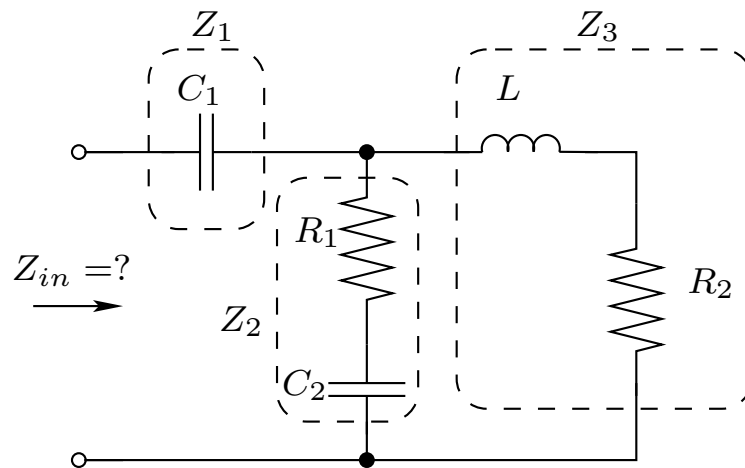
Tegyük be a komplex számokra vonatkozó alpműveleteket, különösen az osztást

4. Feladat Impedancia

Határozza meg a Z_{in} eredő impedanciát ha $\omega = 50 \text{ rad/s}$!



Megoldás



A megoldás menete a következő:

1. Az áramköri elemek átalakítása impedancia alakra.

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = -j10 \, \Omega$$

$$Z_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = (3 - j2) \, \Omega$$

$$Z_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \cdot 0.2 = (8 + j10) \, \Omega$$

2. Az impedanciákkal formálisan úgy számolhatunk tovább, mint az ellenállásokkal.

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_1 + Z_2 \parallel Z_3 = -j10 + \frac{(3-j2)(8+j10)}{11+j8} = -j10 + \frac{(44+j14)(11-j8)}{11^2+8^2} \\ &= -j10 + 3.22 - j1.07 = 3.22 - j11.07 \, \Omega \end{aligned}$$

$$\sqrt{s} = j\omega$$

MERT KELL KOMPLEX AMPLITÚDÓ?

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos(\omega t) \Rightarrow \text{SZUPERPOZÍCIÓ}$$

NE KELLJEN SZUPERPOZÍCIÓ!

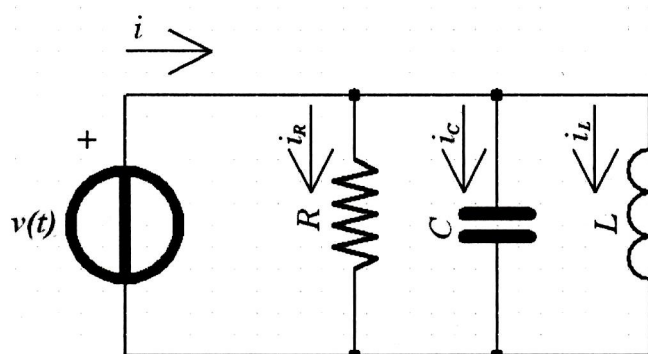
4. Gyakorlat: Állandósult állapotú AC áramkörök analízise

Célkitűzés:

- Idő/komplex amplitúdó tartomány közötti átmenet bemutatása
- Hálózati tételek érvényességét bemutatni
- Ragaszkodjunk az anyaghoz, a villamosmérnöki trükköket (pl.:benézek) NE mutassuk be
- Használjunk különféle jelöléseket
- A radián nem dimenzió, csak az egyértelműsítés miatt jelöljük
- A dimenziókat érdemes beírni/ellenőrizni, mert így az esetleges hibák könnyen felismerhetők

1. Példa

Az alábbi kapcsolásban $v(t) = 120\sqrt{2} \cos(1000t + 90^\circ)$ V határozzuk meg az $i(t)$ időfüggvényt



$$R = 15\Omega$$

$$C = 93,3\mu\text{F}$$

$$L = 30\text{mH}$$

$$83,33\mu\text{F}$$

Transzformáció a komplex amplitúdók tartományába

$$v(t) = 120\sqrt{2} \cos(1000t + 90^\circ) \text{ V} \Rightarrow V = 120\angle 90^\circ \text{ V} \checkmark$$

Impedanciák:

$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

$$Z_R = (15 + j0)\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = (0 - j12)\Omega = 12\angle -90^\circ \Omega \checkmark$$

$$Z_L = j\omega L = (0 + j30)\Omega = 30\angle 90^\circ \Omega \checkmark$$

rad NEM MÉRTEGYSÉG. MEGIS SOKSOK FELTÁRTATJUK, HOGY
f ÉS ω EGYÉRTELMESEN ELKÜLÖNBÖZNEK:

$$f \left[\frac{1}{s} = \text{Hz} \right]$$

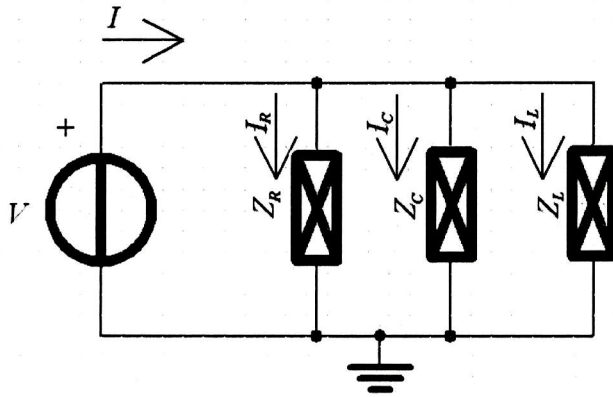
$$\omega \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{f}$$

①

a. Kirchhoff egyenletekkel

Kapcsolás a transzformált tartományban



$$I_R = \frac{V}{Z_R} = \frac{120\angle 90^\circ}{15} = 8\angle 90^\circ \text{ A} \quad \checkmark$$

$$I_C = \frac{V}{Z_C} = \frac{120\angle 90^\circ}{12\angle -90^\circ} = 10\angle 180^\circ \text{ A} \quad \checkmark$$

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{120\angle 90^\circ}{30\angle 90^\circ} = 4\angle 0^\circ \text{ A} \quad \checkmark$$

$$I = I_R + I_C + I_L = 8\angle 90^\circ + 10\angle 180^\circ + 4\angle 0^\circ$$

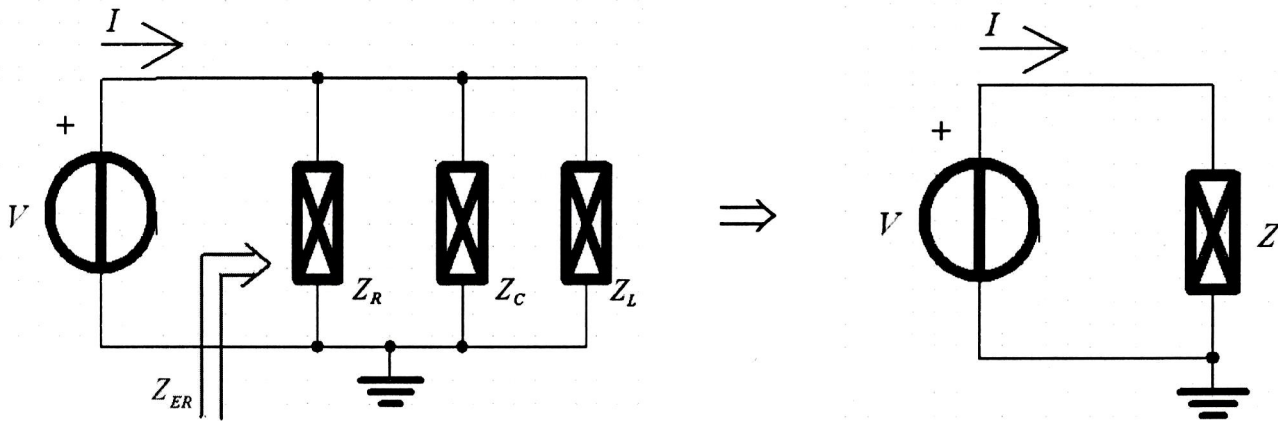
$$I = (0 + j8) + (-10 + j0) + (4 + j0) = (-6 + j8) = 10\angle 126.9^\circ \text{ A} \quad \checkmark$$

Inverz transzformáció:

$$I = 10\angle 126.9^\circ \text{ A} \quad \Rightarrow \quad i(t) = 10\sqrt{2} \cos(1000t + 126.9^\circ) \text{ A}$$

b. Impedanciákkal

Kapcsolás a transzformált tartományban



$$Z_{ER} = Z_R \parallel Z_C \parallel Z_L = (15 + j0) \parallel (0 - j12) \parallel (0 + j30) = (15 + j0) \parallel \left(\frac{12 \cdot 30}{-j12 + j30} \right) = (15 + j0) \parallel \frac{360}{0 + j18} =$$

$$= \frac{15 \cdot 360}{360 + j18 \cdot 15} = \frac{5400}{360 + j270} = \frac{5400}{450\angle 36.9^\circ} = 12\angle -36.9^\circ \Omega \quad \checkmark$$

$$I = \frac{V}{Z_{ER}(\omega)} \Big|_{\omega=1 \text{ krad/sec}} = \frac{120 \angle 90^\circ}{12 \angle -36,9^\circ} = 10 \angle 126,9^\circ \text{ A} \quad \checkmark$$

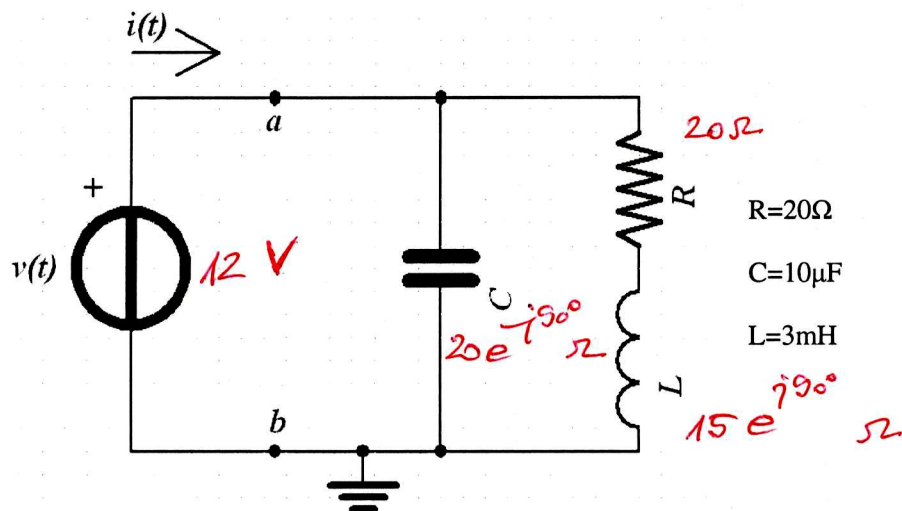
Inverz transzformáció

$$I = 10 \angle 126,9^\circ \quad \Rightarrow \quad i(t) = 10\sqrt{2} \cos(1000t + 126,9^\circ) \text{ A} \quad \checkmark$$

2. Példa

Az a-b kapocspárra számított eredő impedancia alapján határozza meg $i(t)$ értékét, ha

$$v(t) = 12\sqrt{2} \cos(5000t) \text{ V}$$



Transzformáció a komplex amplitúdó tartományba

$$v(t) = 12\sqrt{2} \cos(5000t) \text{ V} \Rightarrow V = 12\angle 0^\circ \text{ V}$$

Impedanciák

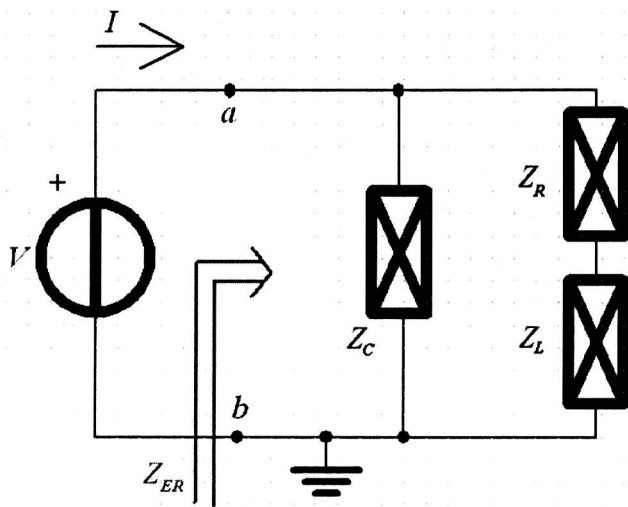
$$\omega = 5 \text{ krad/s}$$

$$Z_R = (20 + j0)\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = (0 - j20)\Omega = 20\angle -90^\circ\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = (0 + j15)\Omega = 15\angle 90^\circ\Omega$$

Kapcsolás a transzformált tartományban



$$\frac{Z_C(Z_R + Z_L)}{Z_C + Z_R + Z_L}$$



$$\begin{aligned} Z_{ER} &= Z_C \parallel (Z_R + Z_L) = (-j20) \parallel (20 + j15) = \\ &= \frac{(-j20)(20 + j15)}{-j20 + 20 + j15} = \frac{300 - j400}{20 - j5} = \\ &= \frac{500 \angle -53,1^\circ}{20,62 \angle -14,0^\circ} = 24,3 \angle -39,1^\circ \Omega \end{aligned}$$

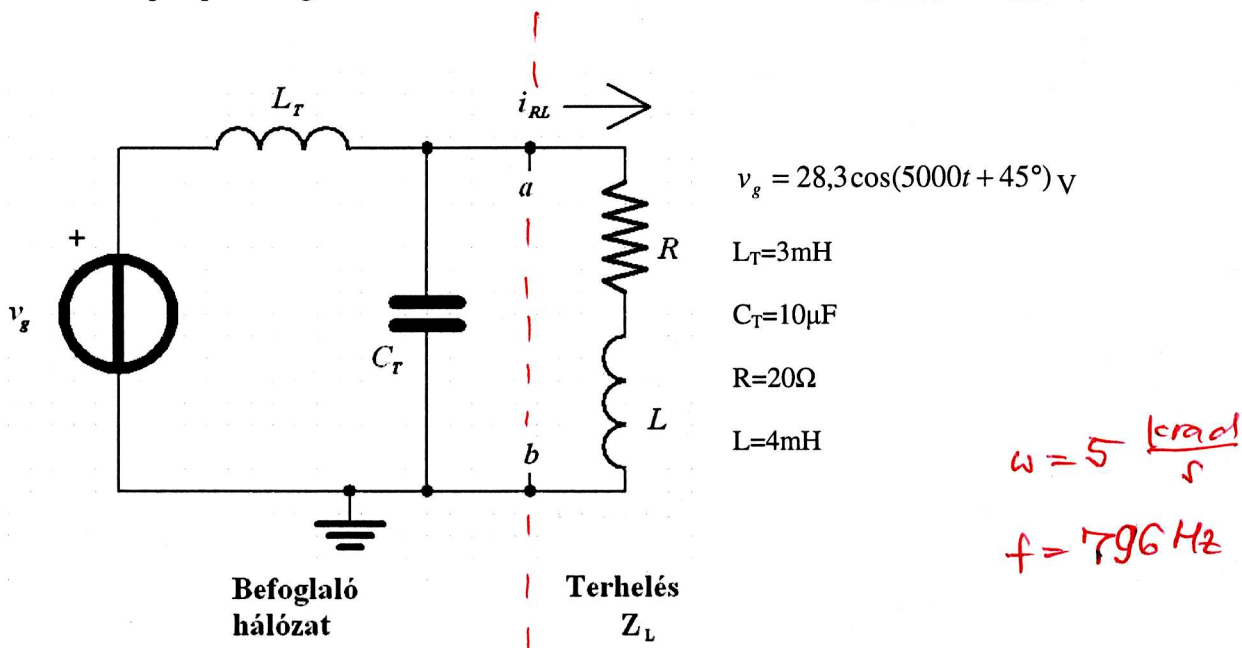
$$I = \frac{V}{Z_{ER}(\omega)} \bigg|_{\omega = \frac{5k\text{rad}}{s}} = \frac{12 \angle 0^\circ}{24,3 \angle -39,1^\circ} = 0,49 \angle 39,1^\circ \text{ A}$$

Inverz transzformáció

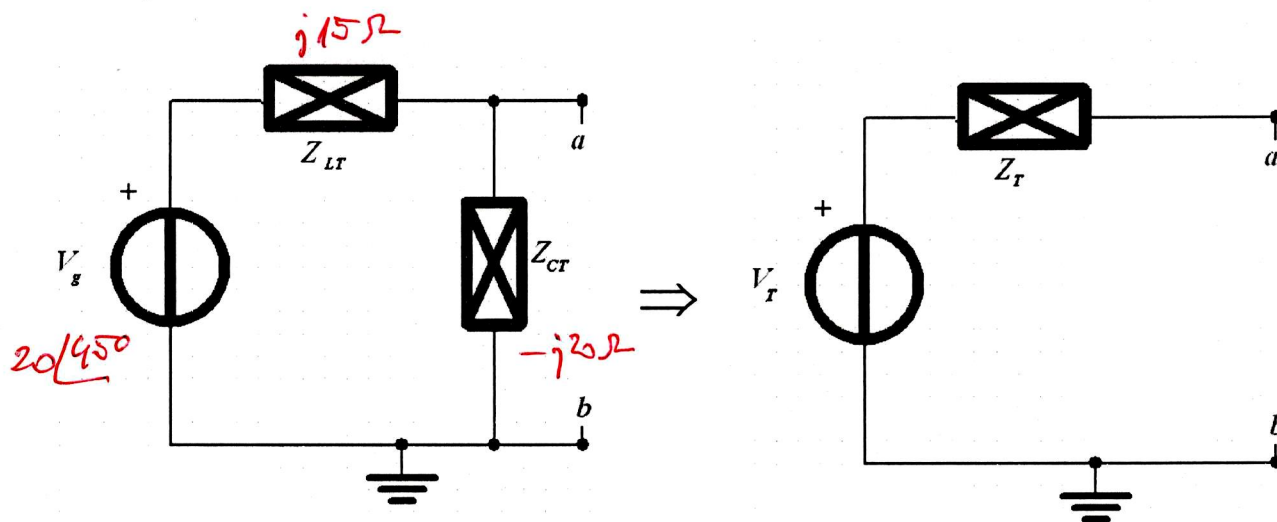
$$I = 0,49 \angle 39,1^\circ \text{ A} \Rightarrow i(t) = 0,49 \sqrt{2} \cos(5000t + 39,1^\circ) \text{ A}$$

3. Példa

Az a-b kapocspárra meghatározott Thèvenin ekvivalenssel határozzuk meg $i_{RL}(t)$ időfüggvényt.



Thèvenin helyettesítő kép meghatározása a transzformált tartományban



$$V_g = \frac{28,3}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 20 \angle 45^\circ \text{ V} \quad \checkmark$$

$$\omega = 5 \text{ krad/s} \Rightarrow Z_{LT} = j\omega L_T = j15 \Omega \quad \checkmark \Rightarrow Z_{CT} = \frac{1}{j\omega C_T} = -j20 \Omega \quad \checkmark$$

V_T meghatározása:

- Szakadással való lezárás
- Feszültségosztó tétel

$$V_T = V_{OC} = V_g \frac{Z_{CT}}{Z_{CT} + Z_{LT}} = 20e^{j45} \frac{-j20}{-j20 + j15} = 80\angle 45^\circ \text{ V} \quad \checkmark$$

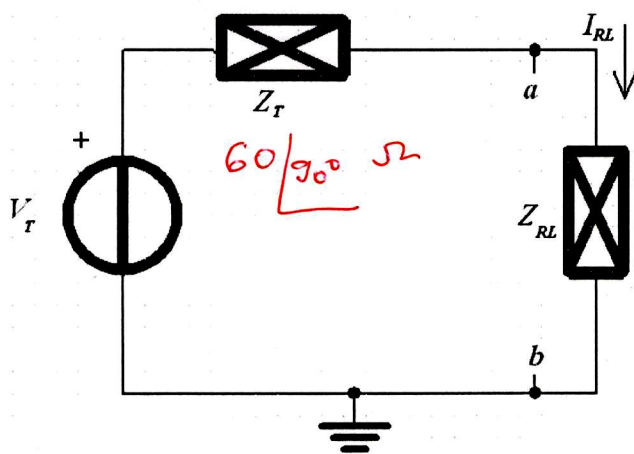
ISC meghatározása:

- Rövidzárral való lezárás

$$I_{SC} = \frac{V_g}{Z_{LT}} = \frac{20\angle 45^\circ}{j15} = \frac{20\angle 45^\circ}{15\angle 90^\circ} = 1,33e^{j45^\circ} \text{ A} \quad \checkmark \quad 1,33e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

Thèvenin ekvivalens belső ellenállása

$$Z_T = \frac{V_T}{I_{SC}} = \frac{80\angle 45^\circ}{1,33\angle -45^\circ} = 60\angle 90^\circ \Omega \quad \checkmark$$



$$Z_{RL} = R + j\omega L \Big|_{\omega=5 \frac{\text{krad}}{\text{s}}} = 20 + j20 \Omega$$

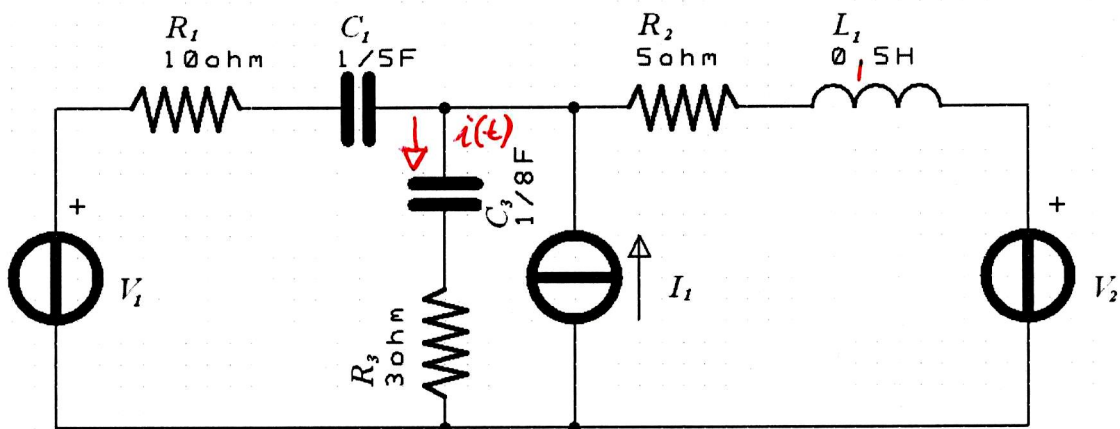
$$I_{RL} = \frac{V_T}{Z_T + Z_{RL}} = \frac{80\angle 45^\circ}{0 + j60 + 20 + j20} = \frac{80\angle 45^\circ}{82,46\angle 76,1^\circ} = 0,97\angle -31^\circ \text{ A} \quad \checkmark$$

Inverz transzformáció

$$I = 0,97\angle -31^\circ \Rightarrow i(t) = 0,97\sqrt{2} \cos(5000t - 31^\circ) \text{ A} \quad \checkmark$$

4. Példa

Az alábbi állandósult állapotú AC áramkörben határozzuk meg az $i(t)$ áramot az időtartományban.

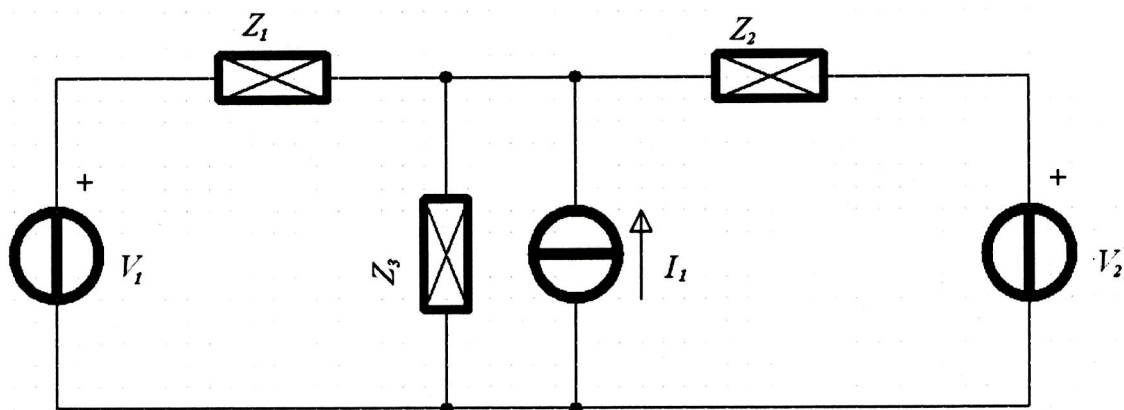


$$v_1 = V_{1eff} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \Rightarrow V_{1eff} = 5V \quad \Phi_1 = 90^\circ \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/sec} \quad *$$

$$v_2 = V_{2eff} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_2) \Rightarrow V_{2eff} = 10V \quad \Phi_2 = -90^\circ \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/sec}$$

$$i_1 = I_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \Phi_I) \Rightarrow I_{eff} = 1A \quad \Phi_I = 90^\circ \quad \omega_2 = 8 \text{ rad/sec}$$

1. Átrajzolás, és AC impedanciák felírása



$$Z_1(j\omega) = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \Omega \Rightarrow Z_1(j\omega) = 10 + \frac{1}{j\omega 0,2} \Omega \quad \checkmark$$

$$Z_2(j\omega) = R_2 + j\omega L_2 \Omega \Rightarrow Z_2(j\omega) = 5 + j\omega 0,5 \Omega \quad \checkmark$$

$$Z_3(j\omega) = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \Omega \Rightarrow Z_3(j\omega) = 3 + \frac{1}{j\omega 0,125} \Omega \quad \checkmark$$

KOMPLEX AMPLITÚDÓ DEFINÍCIÓJA:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) = \Re \left\{ \underbrace{V_{eff} e^{j\theta}}_{\text{KOMPL. AMPL.}} \cdot \underbrace{[\sqrt{2} e^{j\omega t}]} \right\}$$

VEDD ÉSZRE, IMPEDANCIA FÜGGVÉNYEK MIND ω_1 -EN, MIND ω_2 -ÖN ÉRVÉNYESEK!

2. Gerjesztéshez tartozó komplex amplitúdók felírása

$$v_1(t) = V_{1eff} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \Rightarrow V_1 = 5 \quad \angle 90^\circ \text{ V} \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/sec}$$

$$v_2(t) = V_{2eff} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_2) \Rightarrow V_2 = 10 \quad \angle -90^\circ \text{ V} \quad \omega_1 = 5 \text{ rad/sec}$$

$$i_1(t) = I_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \Phi_3) \Rightarrow I_1 = 1 \text{ A} \quad \omega_2 = 8 \text{ rad/sec}$$

$$= I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega_2 t)$$

$\sin(\omega_2 t + 90^\circ) = \cos(\omega_2 t)$ VEDD ÉSZRE, A KOMPLEX AMPLITÚDÓ A $\cos()$ FÜGV-RE VAN DEFINIÁLVA

Mivel két frekvencia van, szuperpozíciót kell alkalmazni: AZ IDŐTARTO HÁNYBAN

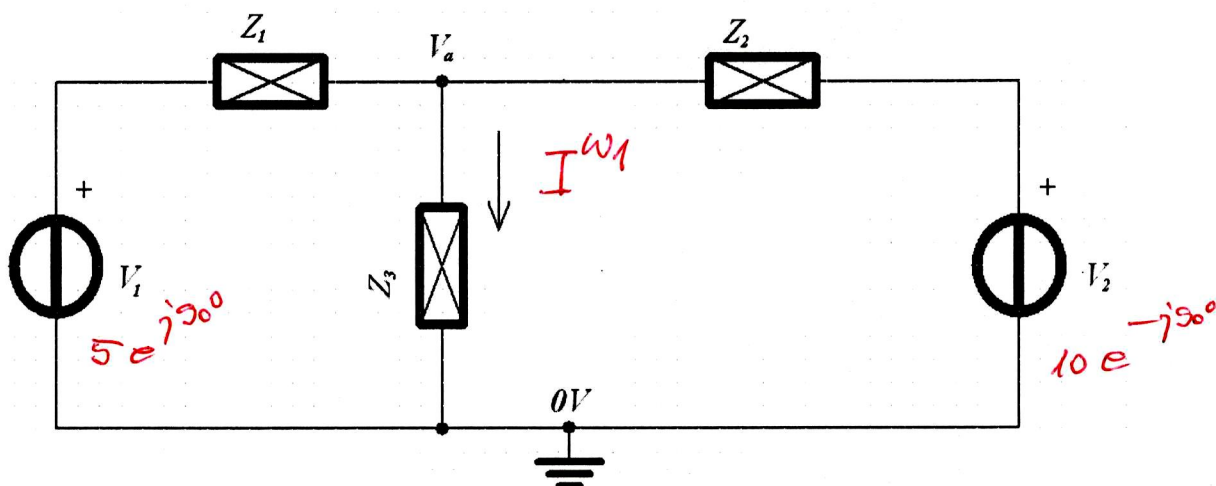
$$\omega_1 \Rightarrow i^{\omega_1}(t)$$

$$\omega_2 \Rightarrow i^{\omega_2}(t)$$

$$i(t) = i^{\omega_1}(t) + i^{\omega_2}(t)$$

3. Számítás ω_1 -en, csomóponti potenciálokkal

$$\omega_1 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



$$\frac{V_1 - V_a}{Z_1(j\omega_1)} - \frac{V_a}{Z_3(j\omega_1)} + \frac{V_2 - V_a}{Z_2(j\omega_1)} = 0$$

$$V_1 = 5 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = 10 \angle -90^\circ$$

9

$$\omega_1 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$Z_1(j\omega) = 10 + \frac{1}{j\omega 0,2} \Omega \Rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow (10-j) \Omega \Rightarrow 10,05 \angle -5,7^\circ \Omega$$

$$Z_2(j\omega) = 5 + j\omega 0,5 \Omega \Rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow (5+j2,5) \Omega \Rightarrow 5,59 \angle 26,6^\circ \Omega$$

$$Z_3(j\omega) = 3 + \frac{1}{j\omega 0,125} \Omega \Rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow (3-j1,6) \Omega \Rightarrow 3,4 \angle -28,1^\circ \Omega$$

$$(V_1 - V_a) Z_2(j\omega_1) Z_3(j\omega_1) - V_a Z_1(j\omega_1) Z_2(j\omega_1) + (V_2 - V_a) Z_1(j\omega_1) Z_3(j\omega_1) = 0$$

$$\text{COMPACT TRASFORMO MAT: } Z_1(j\omega_1) = Z_1 \dots$$

$$V_a = \frac{Z_2 Z_3 V_1 + Z_1 Z_3 V_2}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3} = \frac{95,03 \angle 88,5^\circ + 341,7 \angle -123,8^\circ}{19 \angle -1,5^\circ + 56,2 \angle 20,9^\circ + 34,2 \angle -30,8^\circ}$$

$$= \frac{2,49 + j35 - 190,1 - j283,9}{19,1 - j0,5 + 52,5 + j29,0 + 28,4 - j19,0} = \frac{-187,6 - j188,9}{100 + j9,5}$$

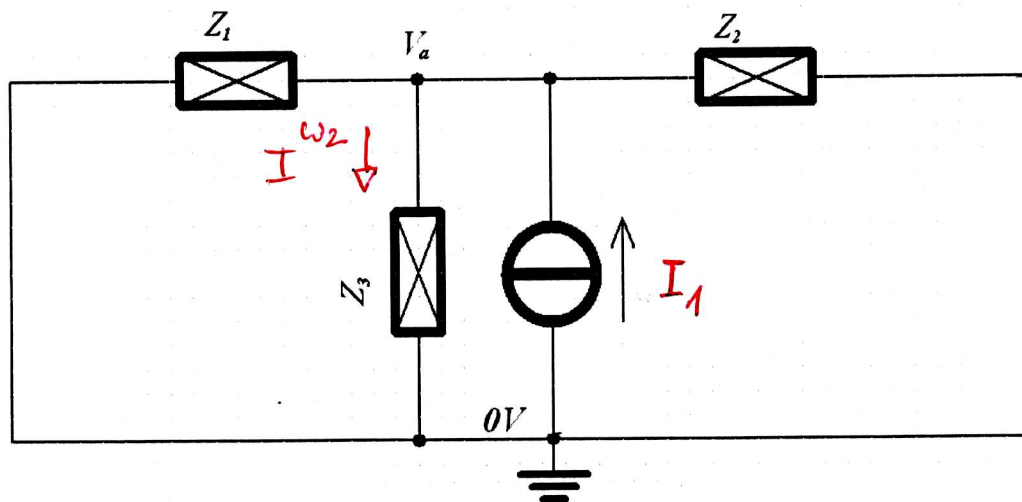
$$= \frac{266,2 \angle -134,8^\circ}{100,0 \angle 0,29^\circ} = 2,66 \angle -135,1^\circ \text{ V}$$

$$I^{w_1} = \frac{V_a}{Z_3(j\omega_1)} = \frac{2,66 \angle -135,1^\circ}{3,4 \angle -28,1^\circ} = 0,78 \angle -107^\circ \text{ A}$$

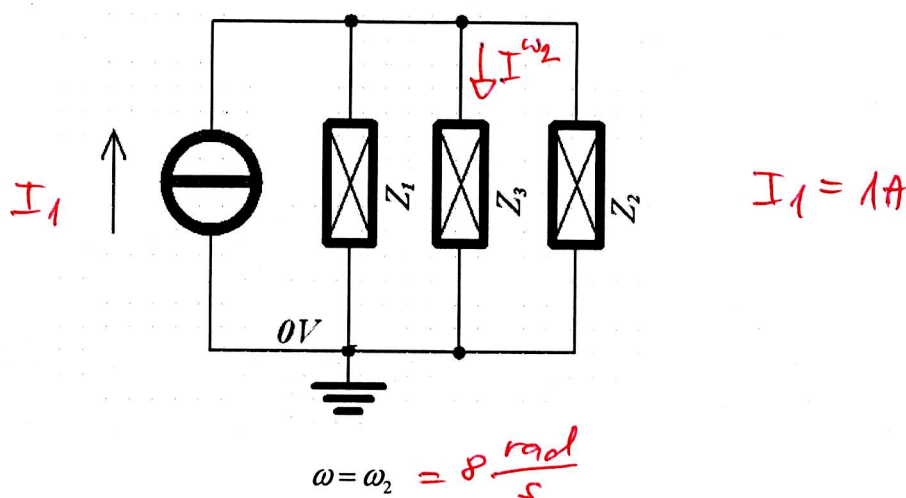
INVERZ TRANSFORMACIÓ

$$\underline{\underline{i^{w_1}(t) = \sqrt{2} \cdot 0,78 \cos(\omega_1 t - 107^\circ) = 1,1 \cos(5t - 107^\circ) \text{ A}}}$$

4. Számítás ω_2 -ön, áramosztóval



ÁTRAJZOLVA:



$$Z_1(j\omega) = 10 + \frac{1}{j\omega 0,2} \Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow (10 - j1,6) = 10,1 \angle -3,6^\circ \Omega$$

$$Z_2(j\omega) = 5 + j\omega 0,5 \Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow (5 + j4) = 6,4 \angle 38,7^\circ \Omega$$

$$Z_3(j\omega) = 3 + \frac{1}{j\omega 0,125} \Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow (3 - j) = 3,16 \angle -18,4^\circ \Omega$$

ÁRAMOSZTÓ TÉTELEL:

$$I_{\omega_2} = \frac{Z_1(j\omega_2) \parallel Z_2(j\omega_2)}{Z_3(j\omega_2) + Z_1(j\omega_2) \parallel Z_2(j\omega_2)}$$

KOMPAKT ALAKBAN: $Z_1(j\omega_2) = Z_1 \dots$

$$Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{64 \angle 35,1^\circ}{15,38 \angle 12,7^\circ} = 4,16 \angle 22,4^\circ = 3,85 + j1,59 \Omega$$

$$I_{\omega_2} = \frac{Z_1 \parallel Z_2}{Z_3 + Z_1 \parallel Z_2} I_1 = \frac{4,16 \angle 22,4^\circ}{3 - j + 3,85 + j1,59} = \frac{4,16 \angle 22,4^\circ}{6,85 + j0,59} = \frac{4,16 \angle 22,4^\circ}{6,88 \angle 4,9^\circ} A$$

$$I^{\omega_2} = 0,61 \angle 17,5^\circ \text{ A}$$

INVERZ TRANSZFORMÁCIÓ:

$$i^{\omega_2}(t) = \sqrt{2} \cdot 0,61 \cos(\omega t + 17,5^\circ) = 0,86 \cos(\omega t + 17,5^\circ) \text{ A}$$

A SZUPERPOZÍCIÓ ÉRTÉLMÉBEN A MEGOLDÁS AZ ω_1 ÉS ω_2 FREKVENCIAK KOMPONENSEK ÖSSZEJE:

$$i(t) = i^{\omega_1} + i^{\omega_2} = 1,1 \cos(5t - 107^\circ) + 0,86 \cos(\omega t + 17,5^\circ) \text{ A}$$
