3. GYAKORLAT

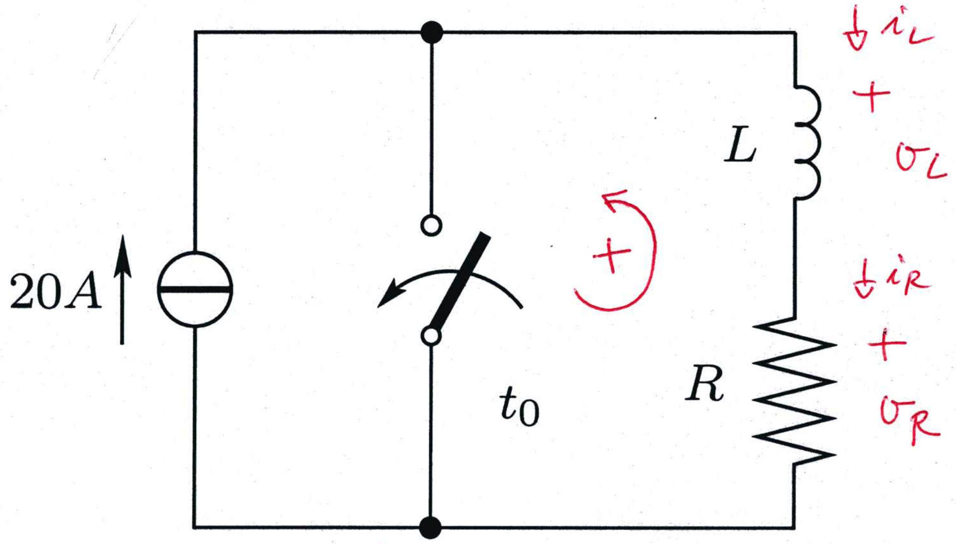
aramkorok2016gyakorlat_03atkapcsolasi_tranziens_v10.pdf

1. Feladat Elsőrendű, tranziens kiszámítása.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t_0 = 0$ időpontban átkapcsol! Határozza meg az $i(t)$ áramot a $t = 0,2$ s időpontban!

MEGOLDÁST KERESSÜK: — DIFF. EGYENLET
— IMPEDANCIA
— FIZIKAI KÉP
} ALAPJÁN

$i = ?(t = 0.2s)$



$L = 2H$
$R = 10\Omega$

DIFF. EGY.!

KAPCSOLÁSI RAJZBÓL:
① EGY ENERGIATÁROLÓ ELEM => ELSŐRENDŰ DIFF. EGY.
② NINCS GERJESZTÉS $t \geq t_0 = 0$ s ESETÉN
=> CSAK TRANZIENS, AZAZ HOMOGÉN DIFF. EGY.

A megoldás menete a következő:

1. Az átkapcsolás után Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban felvett referenciairányoknak megfelelően (rajz a következő oldalon):

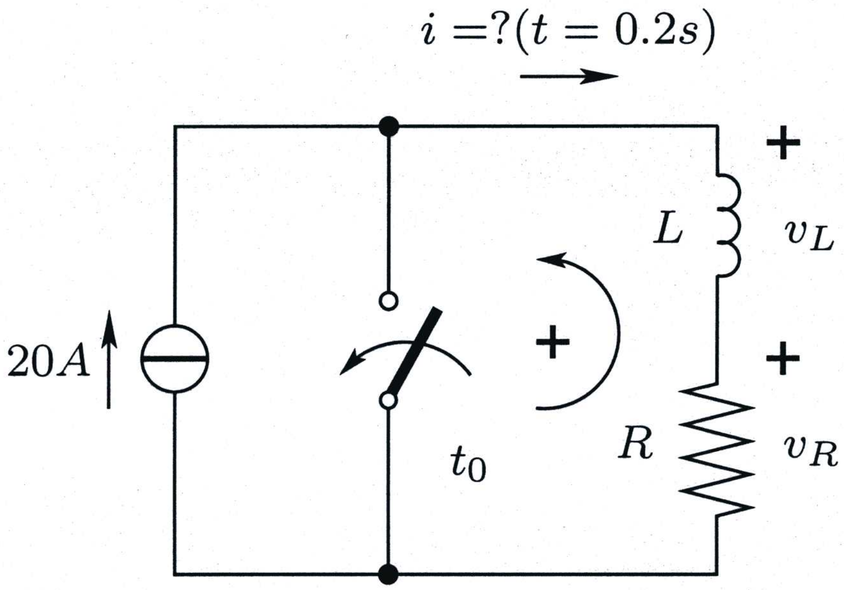
$$\sum v = 0 = -v_L - v_R = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri \tag{1}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása:

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2}$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st} \tag{3}$$



$L = 2\,H$

$R = 10\,\Omega$

4. Visszahelyettesítve (3) egyenletet a (2) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\underbrace{(R + sL)}_{\text{KARAKTERISZTIKUS EGYENLET}} = 0 \tag{4}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. Az $(R + sL) = 0$ egyeneletet megoldva a gyöke:

A TRIVIÁLIS MEGOLDÁS MOST NEM MEGOLDÁS MIVEL $i(0) = 20\,A$, AZAZ L NEM ENERGIAMENTES $t = 0\,s$ ESETÉN

$$s = -\frac{R}{L} \tag{5}$$

ahol a

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{6}$$

neve az időállandó. Vedd észre, a példában bemutatott kapcsolás egy egy időállandós rendszer, ahol egy energiatároló elem van. Ezen az áramkörök matematikai modellje egy elsőrendű lineáris differenciál egyenlet.

5. A hálózat vizsgálatával a hiányzó A paramétert is meghatározhatjuk.

Mivel az induktivitáson folyó áram az időnek folytonos függvénye, a kapcsoló $t = 0+$ időpontjában az i áram: $i = I_0 = Ae^0 = A = 20$ A.

$i_L(0-) = i_L(0+) = i(0) = i(0+) = 20A$

Így:

$\tau = \frac{L}{R} = 0{,}2\,s$

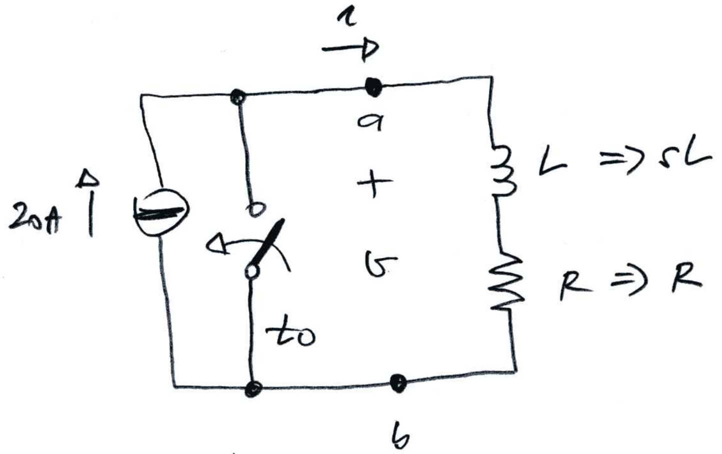
$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 20e^{-\frac{10}{2}t} = 20e^{-5t} \text{ A} \tag{7}$$

A $t = 0.2$ s időpontban pedig:

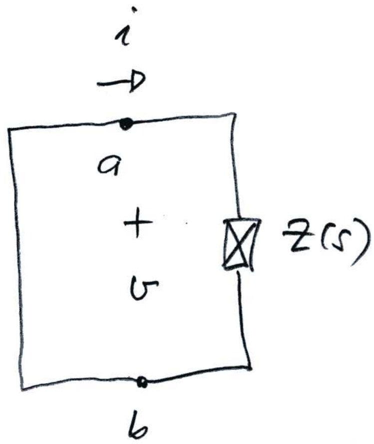
$$i = 20e^{-5 \cdot 0.2} = 20 \cdot 0.368 = 7.36 \text{ A} \tag{8}$$

MEGOLDÁS AZ IMPEDANCIAMÓDSZER SEGÍTSÉGÉVEL:

① KAPUT NYITUNK $t \geq t_0 = 0$ TARTOMÁNYBAN



$\Rightarrow$



② a–b KAPURA FELÍRJUK AZ IMPEDANCIA FGV-T

IDŐÁLLANDÓ

$$\frac{u}{i} = Z(s) = R + sL = R\left(1 + s\frac{L}{R}\right) = R(1 + s\tau)\ \Omega$$

ÁTSZOROZVA: $\underbrace{(1 + s\tau)}_{\text{KARAKTERISZTIKUS EGYENLET}} i = \frac{1}{R} u$

③ TRANZIENS A KAR. EGYENLETBŐL: $u = 0 \Rightarrow (1 + s\tau) i = 0 \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{\tau}$

$$i_{tr} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad A$$

④ GERJESZTÉS $= 0$, EZÉRT $i_{áá} = \frac{u}{Z(s)} = \frac{0}{Z(s)} = 0$

⑤ TELJES VÁLASZ

$$i(t) = i_{tr}(t) + i_{áá}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

⑥ KEZDETI FELTÉTEL

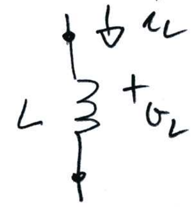
$$i_L(0-) = i(0-) = 20 = i_L(0+) = i(0+) \equiv A$$

⑦ MEGOLDÁS

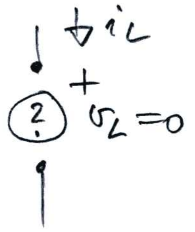
$$i(t) = 20 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{AHOL} \quad \tau = \frac{L}{R} = 0{,}2\,s$$

MEGOLDÁS FIZIKAI KÉP ALAPJÁN

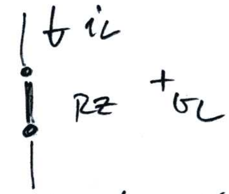
ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTÚ EGYENÁRAMÚ (DC) ÁRAMKÖRBEN



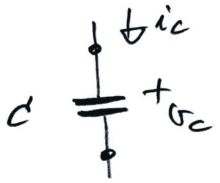
$$v_L = L\frac{di}{dt}\Big|_{i=DC} = 0 \Rightarrow$$



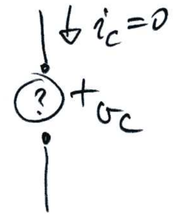
$\Rightarrow$



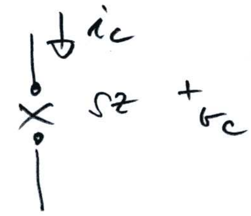
RÖVIDZÁRKÉNT VISELKEDIK



$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}\Big|_{v_C=DC} = 0 \Rightarrow$$

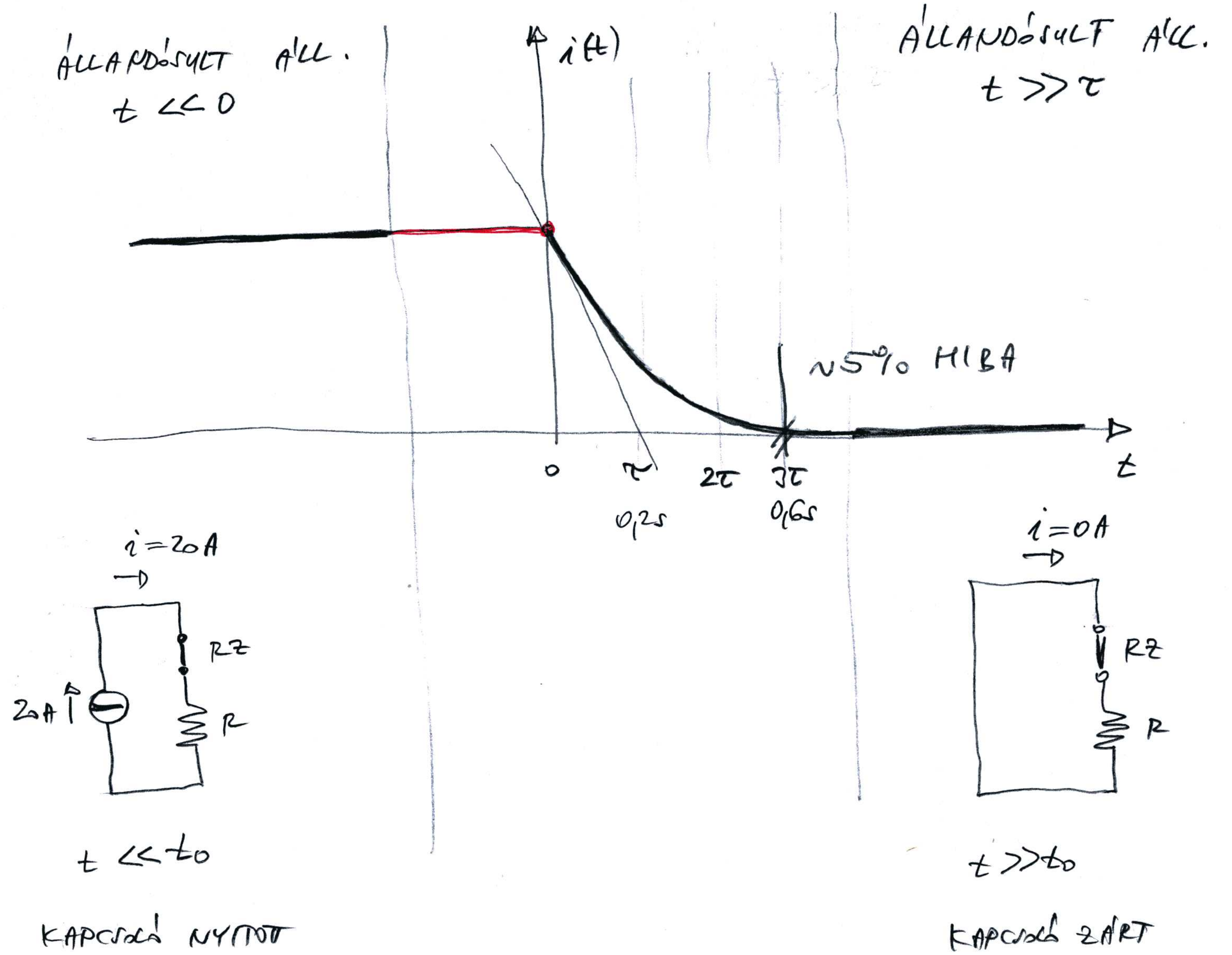


$\Rightarrow$



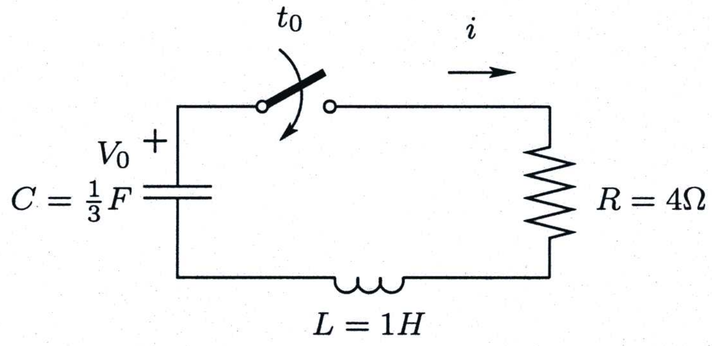
SZAKADÁSKÉNT VISELKEDIK

MEGOLDÁS EGYIDŐÁLLANDÓS ÁRAMKÖRBEN:



2. Feladat Másodrendű, tranziens kiszámítása, valós gyökök.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol!



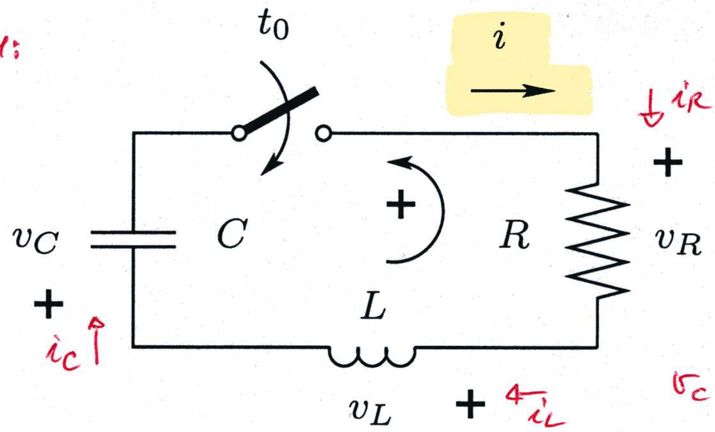
MEGOLDÁST KERESSÜK — DIFF. EGY. } ALAPJÁN
— IMPEDANCIA

MEGOLDÁS DIFF. EGY. ALAPJÁN:

A megoldás menete a következő:

1. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban a felvett referenciairányoknak megfelelően:

KAPCS RAJZBÓL LÁTOM:
— MÁSODRENDŰ
— ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBELI MEGOLDÁS = 0
— KÉT KEZDETI FELTÉTEL



KEZDETI FELTÉTELEK:
$i(0-) = 0$
$v_C(0-) = -V_0$

$v_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau = v(0) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau = -V_0 + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i d\tau$

$t \geq 0$ IDŐTARTOMÁNYRA

$$\sum v = 0 = -v_L - v_R - v_C \qquad = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri + V_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau \tag{9}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása, az inegrál eltüntetése deriválással:

$$\frac{1}{C}i + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{10}$$

(6)

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = s^2 Ae^{st} \tag{11}$$

4. Visszahelyettesítve (11) egyenletet (10) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\underbrace{\left(\frac{1}{C} + sR + s^2 L\right)}_{\text{KARAKTERISZTIKUS EGYENLET}} = 0 \tag{12}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. A $\left(\frac{1}{C} + sR + s^2L\right) = 0$ másodfokú egyeneletet megoldva a gyökök:

$$s_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \tag{13}$$

$R = 4\Omega$
$L = 1H$
$C = \frac{1}{3}F$

vagy,

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{14}$$

Így a két gyök miatt az általános megoldásunk így módosul:

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{15}$$

Behelyettesítve a paramétereket:

$$s_{1,2} = -\frac{4}{2\cdot 1} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2\cdot 1}\right)^2 - \frac{1}{1\cdot\frac{1}{3}}} = -2 \pm 1 \quad \left[\frac{1}{s}\right] \tag{16}$$

$\to -1s$
$\to -3s$

A megoldás eddig:

$$i = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} \tag{17}$$

5. A hálózat vizsgálatával a hiányzó A_1 és A_2 paramétereket is meghatározhatjuk. Mivel $t = 0+$, $v_C = v_C(0-) = -V_0$ és $i_L = i_L(0-) = 0$:

KEZDETI

$$i(0-) = i\Big|_{0+} = i_0 = A_1 e^{0+} + A_2 e^{0+} = A_1 + A_2 \equiv 0 \tag{18}$$

(I)

$$A_1 = -A_2 \tag{19}$$

FIZIKAI KÉPBŐL $v_R = 0$ (mert $i = 0$), $v_L = -v_C = V_0$, azaz $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = V_0$, azaz $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{L}$.

Deriválva az idő szerint (17)-t, majd t-be 0-át helyettesítve:

$t=0+$ PILLANATRA FELÍRT HUROKEGYENLETBŐL $0+$

$$\Sigma v = 0 = -v_L - v_R - v_C = -L\frac{di}{dt}\Big|_{0+} - \underbrace{i(0+)}_{=0}R + V_0 - \underbrace{\frac{1}{C}\int_0 i\,d\tau}_{=0}$$

$$\frac{di}{dt}\Big|_{0+} = \frac{V_0}{L}$$

KEZDETI II

$$\frac{di}{dt}\bigg|_{0+} = -A_1e^{-t} - 3A_2e^{-3t}\bigg|_{0+} = -A_1e^{0+} - 3A_2e^{0+} = -A_1 - 3A_2 = \frac{V_0}{L} \tag{20}$$

Majd behelyettesítve (19)-t: $A_2 = -A_1$

$$-A_1 + 3A_1 = 2A_1 = \frac{V_0}{L} \tag{21}$$

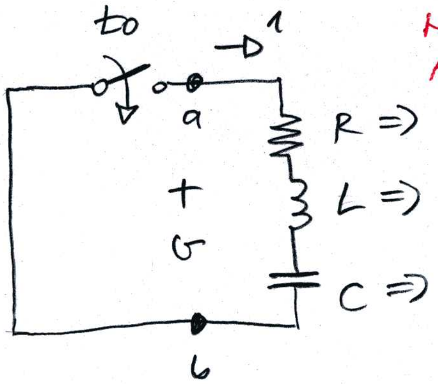
$$A_1 = \frac{V_0}{2L} = \frac{V_0}{2}, A_1 = -A_2 = -\frac{V_0}{2L} \Rightarrow A_2 = -\frac{V_0}{2} \tag{22}$$ $L = 1\,H$

Visszahelyettesítve a paramétereket (17)-be a végeredmény valós $s_{1,2}$ gyökök esetén:

$$i = \frac{V_0}{2}e^{-t} - \frac{V_0}{2}e^{-3t} \tag{23}$$

IMPEDANCIA MÓDSZERREL:

① KAPUT NYITUNK $(t \geq t_0 = 0)$



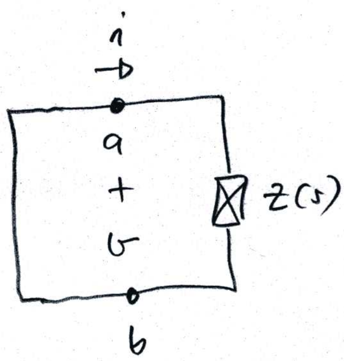
HOZZÁRENDELJÜK AZ IMPEDANCIÁT

R

sL

$\frac{1}{sC}$

$\Rightarrow$



KÉRDÉS: $i = ?$ => EZÉRT GERJ.: v

② a–b KAPOCSPÁRRA FELÍRJUK AZ IMPEDANCIA FGV-T

$$Z(s) = \frac{v}{i} = R + sL + \frac{1}{sC} = \frac{s^2LC + sRC + 1}{sC}$$

③ TRANZIENS FELÍRÁSA. ELŐSZÖR KERESZTBE ÁTSZORZUNK AZ ELŐZŐ EGYENLETBEN:

$$(s^2LC + sRC + 1)\, i = sC\underbrace{v}_{=0} = 0$$

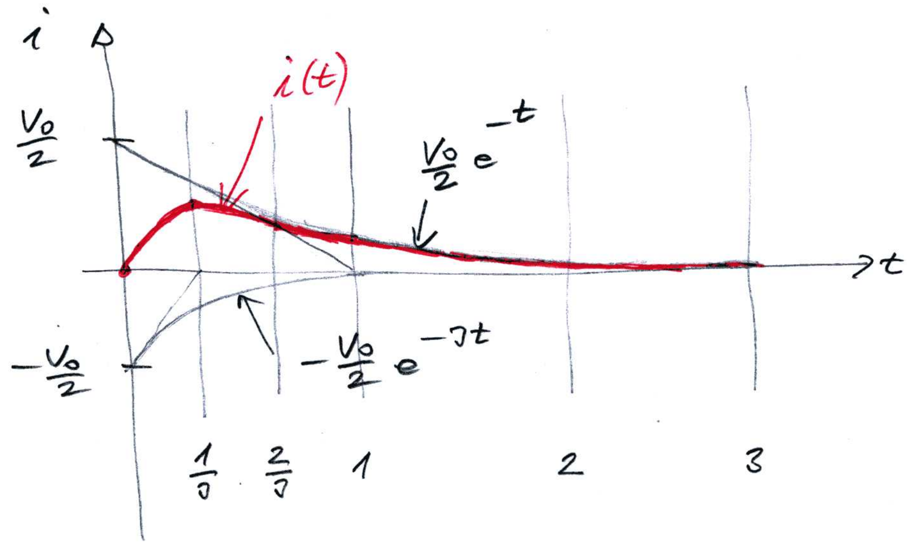
A KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

$$s^2LC + sRC + 1 = \left(\frac{1}{C} + sR + s^2L\right)C = 0$$

INNÉT MINDEN UAZ MINT A 6–7 OLDALAKON

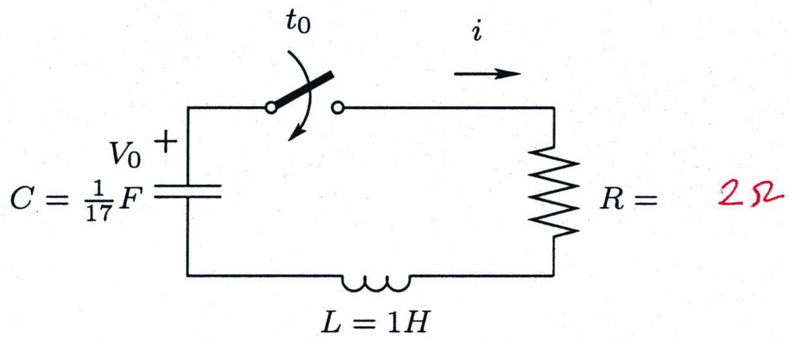
A MEGOLDÁS ÁBRÁZOLÁSA:

$$i = \frac{V_0}{2} e^{-t} - \frac{V_0}{2} e^{-3t}$$



3. Feladat Másodrendű, tranziens kiszámítása, komplex gyökök.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol!



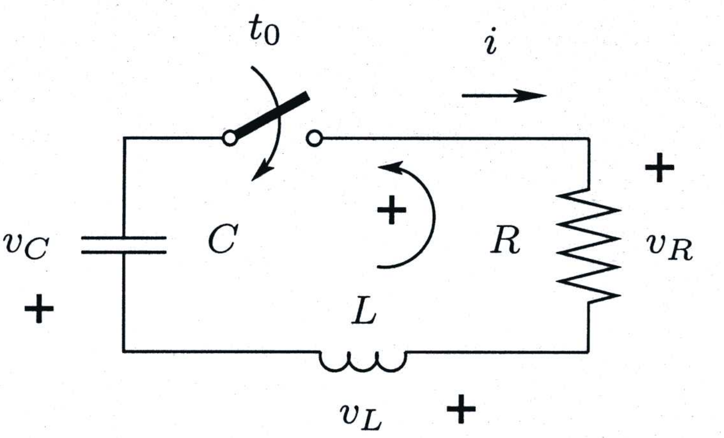
UAZ MINT A 2. FELADAT, DE KOMPLEX KONJUGÁLT GYÖKPÁR A KARAKTERISZTIKUS EGYENLET MEGOLDÁSA.

Megoldás

A DIFF EGY ALAPJÁN KAPCSOLÁSI RAJZBÓL TUDOM (LÁTOM)
— MÁSODRENDŰ
— KÉT KEZDETI FELTÉTEL
— ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOT = 0

A megoldás menete a következő:

1. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban felvett referenciairányoknak megfelelően:



KEZDETI FELTÉTELEK:
- $i(0-)=0$
- $v_C(0-)=-V_0$

$$\sum v = 0 = -v_L - v_R - v_C \qquad = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri + V_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau \tag{24}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása, az inegrál eltüntetése deriválással:

$$\frac{1}{C}i + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{25}$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = s^2 Ae^{st} \tag{26}$$

4. Visszahelyettesítve (26) egyenleteket (25) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\underbrace{\left(\frac{1}{C} + sR + s^2 L\right)}_{} = 0 \tag{27}$$

KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$, így az $\left(\frac{1}{C} + sR + s^2 L\right) = 0$ másodfokú egyeneletet megoldva a gyökök:

$$s_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \tag{28}$$

vagy,

CSILLAPÍTÁSI TÉNYEZŐ KÖRFREKVENCIA KOMPLEX KONJUGÁLT GYÖKPÁR

$$s_{1,2} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\alpha} \pm \sqrt{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2}_{\alpha^2} - \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_n^2}}_{-\omega^2}} = -\alpha \pm j\omega \tag{29}$$

$$\boxed{\alpha = 1 \quad \omega = 4}$$

Így a két gyök miatt a

TRANZIENS MEGOLDÁS:

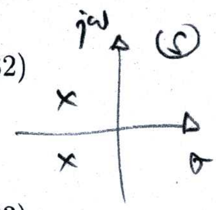
$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{30}$$

Behelyettesítve a paramétereket:

$$s_{1,2} = -\frac{2}{2 \cdot 1} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2 \cdot 1}\right)^2 - \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{17}}} = -1 \pm \sqrt{-16} \tag{31}$$

KOMPLEX KONJUGÁLT GYÖKPÁR

$$s_1 = -1 + j4, s_2 = -1 - j4 \tag{32}$$



A megoldás eddig: $i = A_1 e^{(-\alpha + j\omega)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega)t}$

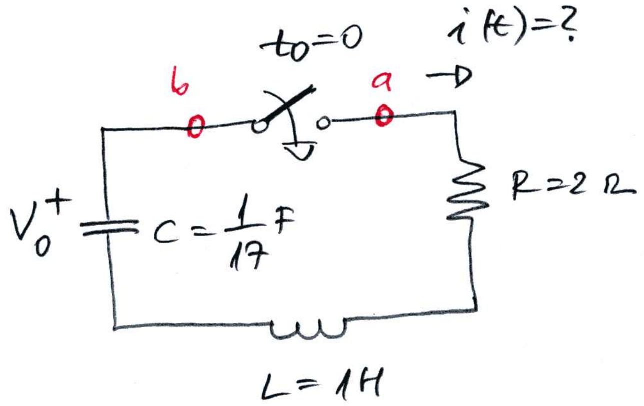
$$i = A_1 e^{(-1+j4)t} + A_2 e^{(-1-j4)t} \tag{33}$$

A megoldás keresése más formában:
Legyen $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$, $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega_n^2 - \alpha^2$.
Ekkor $s_1 = -\alpha + j\omega, s_2 = -\alpha - j\omega$, így:

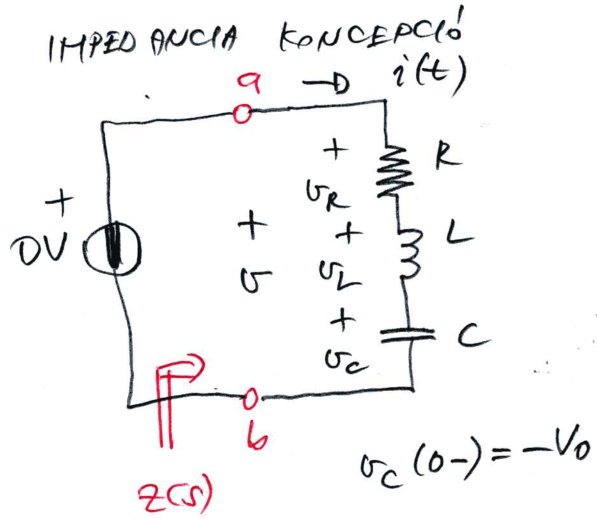
$$i = A_1 e^{(-\alpha + j\omega)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega)t} = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \theta) \tag{34}$$

Mivel az *Euler* összefüggés szerint $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$ és $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t)$, ezért behelyettesítve ezeket (34)-ba és átrendezve az egyenletet kapjuk:

MÁSODRENDŰ KAR. EGY. KONJUGÁLT KOMPLEX GYÖKPÁRRAL



IMPEDANCIA KONCEPCIÓ



$$Z(s)=R+sL+\frac{1}{sC}=\frac{s^2LC+sRC+1}{sC}\equiv\frac{v}{i}$$

$$\underbrace{(s^2LC+sRC+1)}_{\text{KARAKTERISZTIKUS EGY.}}\,i=sCv=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC}=-\frac{R}{2L}\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=-\alpha\pm j\omega$$

KOMPLEX KONJUGÁLT GYÖKPÁR

DEFINÍCIÓK: – REZONANCIA FREKV.: $\omega_r=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (THOMSON)

– CSILLAPÍTÁSI TÉNYEZŐ: $\alpha=\frac{R}{2L}$

– REZGÉS KÖRFREKV.: $\omega=\sqrt{\omega_r^2-\alpha^2}$

MEGOLDÁS ALAKJA:

$$i(t)=A_1e^{(-\alpha+j\omega)t}+A_2e^{(-\alpha-j\omega)t}=\left(A_1e^{j\omega t}+A_2e^{-j\omega t}\right)e^{-\alpha t}$$

$$=Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t+\theta)$$

$$i = e^{-\alpha t}\left((A_1 + A_2)\cos(\omega t) + j\,(A_1 - A_2)\cdot\sin(\omega t)\right) \tag{35}$$

$A_1 + A_2$-t jelöljük B_1-gyel és $j\,(A_1 - A_2)$-t jelöljük B_2-vel:

$$i = e^{-\alpha t}\left(B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)\right) \tag{36}$$

A sin() a cos()-nak a fázisbeli eltoltja és a B_1 és a B_2 is egy szám, ezért felírható az alábbi összefüggés:

$$i = A\cdot e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \theta) \tag{37}$$

Ezek után ha a karakterisztikus egyenlet megoldásai komplex számok, akkor (37) egyenletet használjuk általános megoldásnak.

Így ha $\alpha = \frac{R}{2L} = 1$ és $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 4$, akkor

$$i = A\cdot e^{-t}\sin(4t + \theta) \tag{38}$$

KEZDETI FELTÉTELEK:

$$i(0-) = i(0) = i(0+) = 0$$

$$v_C(0-) = v_C(0) = v_C(0+) = -V_0$$

KEZDETI I

KEZD. FELT. #1: $i = Ae^{-t}\sin(4t+\theta)\big|_{t=0+} = A\sin\theta \equiv 0$

KEZD. FELT. #2 KIRCHHOFF HUROKTÖRVÉNYBŐL:

$$\Sigma v = 0 = -v_L - v_R - v_C\Big|_{0+} = -L\frac{di}{dt}\Big|_{0+} - R\underbrace{i(0+)}_{=0} + V_0 - \underbrace{\frac{1}{C}\int_0^{0+} i\,d\tau}_{=0}$$

$$\frac{di}{dt}\Big|_{0+} = \frac{V_0}{L} \equiv -Ae^{-t}\sin(4t+\theta)\Big|_{0+} + 4Ae^{-t}\cos(4t+\theta)\Big|_{0+}$$

$$= -\underbrace{A\sin(\theta)}_{=0} + 4A\cos\theta = 4A\cos\theta$$

KEZDETI II

$$\left.\begin{aligned} \text{I}\quad & A\sin(\theta) = 0 \\ \text{II}\quad & A\cos(\theta) = \frac{V_0}{4L} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \mathrm{tg}\,\theta = 0 \implies \theta = 0$$

$$A\cos(\theta)\Big|_{\theta=0} = \frac{V_0}{4L} \implies A = \frac{V_0}{4L}$$

$$i = \frac{V_0}{4L}e^{-t}\sin(4t)\ \text{A}$$

FIZIKAI KÉPBŐL EGYSZERŰBBEN IS MEGHATÁROZHATÓK A KEZDETI FELTÉTELEK:

$A \sin\theta = 0 \Rightarrow$ MIVEL i LÉTEZIK, AZAZ $|i(t)| \geq 0$
EZÉRT VAN OLYAN t, AHOL $A > 0$
MIVEL

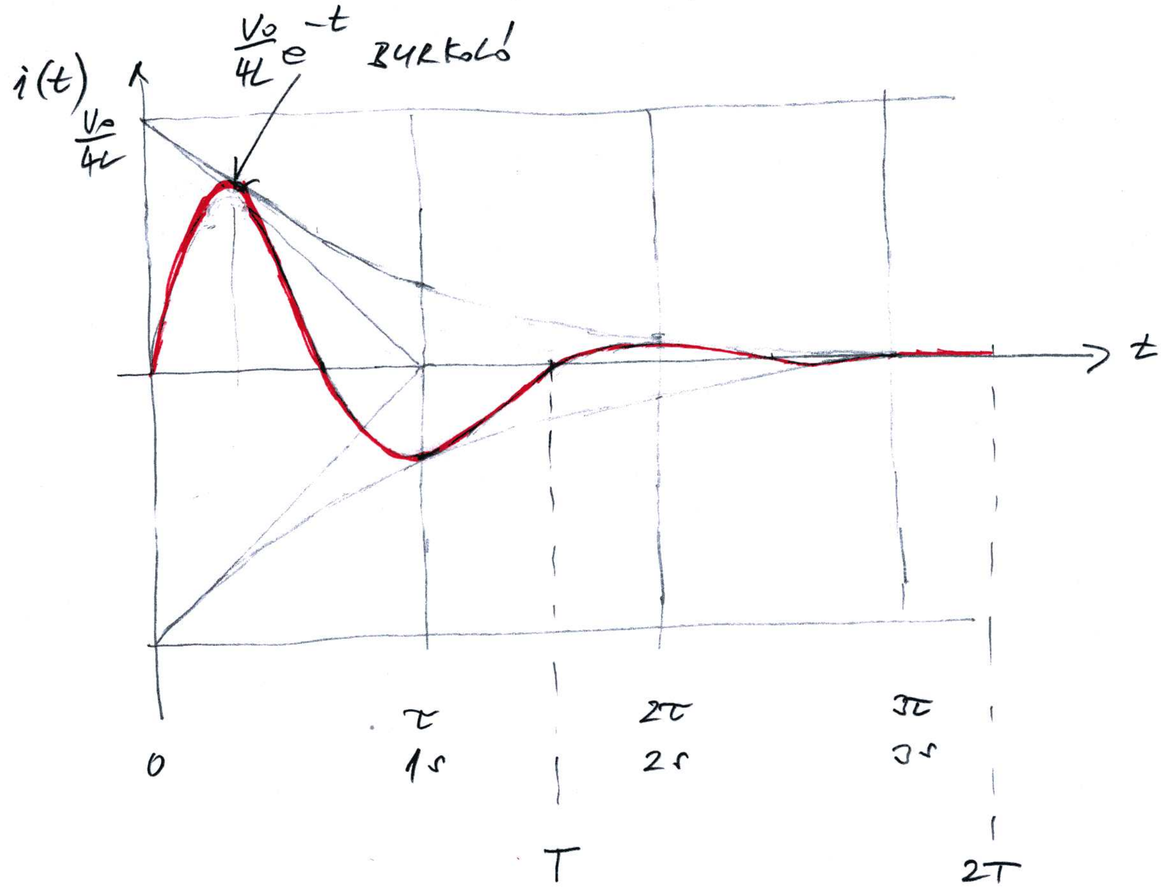
$$A \neq 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

ÉS AKKOR KEZD. FELT. #2

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{0+} = \frac{V_0}{L} = 4A\cos\theta\Big|_{\theta=0} = 4A \Rightarrow A = \frac{V_0}{4L}$$

A JELALAK: $i = \frac{V_0}{4L} e^{-t} \sin(4t)$

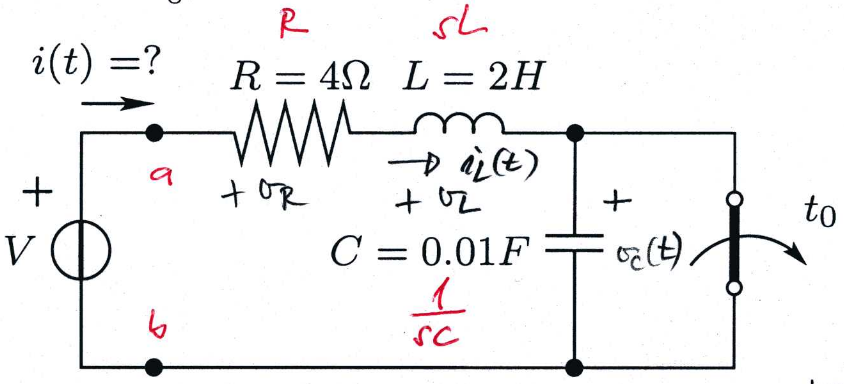
PERIÓDUSIDŐ: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57\,s \qquad \tau = 1s$



4. FELADAT

Teljes válasz kiszámítása az impedancia koncepcióval.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol! A független feszültségforrás feszültsége $V = 20$ V.



KEZDETI FELTÉTELEK

$i_L(0-)$, $v_C(0-)$

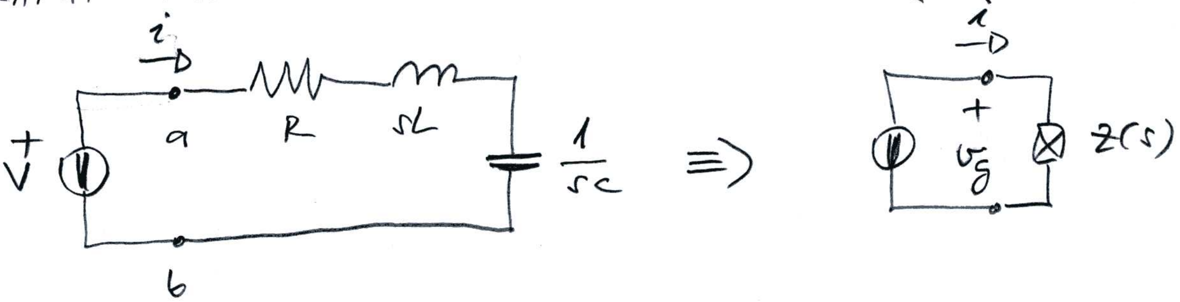
Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. A hálózati elemeket átalakítom impedanciákká.

$$R \Rightarrow R \qquad L \Rightarrow sL \qquad C \Rightarrow \frac{1}{sC}$$

KAPUT NYITUNK A VIZSGÁLANDÓ HELYEN ($t > 0$ TARTOMÁNY)



2. a–b KAPURA AZ IMPEDANCIA FÜGGVÉNY:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

3. TRANZIENS AZ IMPEDANCIA FÜGGVÉNYBŐL

$$\frac{v_g}{i} = Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} = \frac{1 + sRC + s^2LC}{sC}$$

$$\underbrace{(s^2LC + sRC + 1)}_{\text{KARAKTERISZTIKUS EGYENLET}} i = sC\, v_g \equiv 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -1 \pm j7$$

MIVEL A KAR. EGY. GYÖKE KOMPLEX KONJUGÁLT GYÖKPÁR, A TRANZIENS:

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega = -1 \pm j7$$

$$i_{tr} = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta) = A e^{-t} \sin(7t + \theta) \ A$$

(4.) ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBELI VÁLASZ

$$v_g = A_g e^{s_g t} \equiv V \quad \Rightarrow \quad A_g = V \quad \text{és} \quad \underline{\underline{s_g = 0}}$$

$$i_{áá} = \frac{v_g}{Z(s)\big|_{s=s_g}} = \frac{sC}{1 + sRC + s^2 LC}\Bigg|_{s=0} \cdot V = 0 \ A$$

ELL: FIZIKAI KÉP

(5.) A TELJES VÁLASZ

$$\underline{\underline{i(t)}} = i_{tr}(t) + i_{áá}(t) = \underline{\underline{A e^{-t} \sin(7t + \theta) \ A}}$$

(6.) A ÉS θ MEGHATÁROZÁSA A MÁR ISMERTETETT MÓDON A KEZDETI FELTÉTELEKBŐL

$$i(0-) = i(0) = i(0+) = \frac{V}{R} = 5A$$

$$v_C(0-) = v_C(0) = v_C(0+) = 0V$$

6. $t=0+$, $i=i_L(0-)=\frac{V}{R}=\frac{20}{4}=5$ A
$5=i(0)=Ae^0\sin(0+\theta)$

$$A\cdot\sin(\theta)=5 \tag{79}$$

$v_C=0$, $v_R=i\cdot R=V$

$$v_L=V-v_R-v_C=V-V-0=0=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{80}$$

$t=0+$, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-Ae^{-t}\sin(7t+\theta)+7Ae^{-t}\cos(7t+\theta) \tag{81}$$

$$0=-\cancel{A}\cdot\sin(\theta)+7\cancel{A}\cdot\cos(\theta) \tag{82}$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=7=\tan\theta\to\theta=\tan^{-1}(7)=81.9^\circ \tag{83}$$

$$A=\frac{5}{\sin(81.9^\circ)}=5.05 \tag{84}$$

Így a teljes válasz:

$$\underline{\underline{i(t)=i_g+i_t=5.05e^{-t}\sin(7t+81.9^\circ)\ \text{A}}} \tag{85}$$

$$-V+Ri+L\frac{di}{dt}+\underbrace{V_0}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{C}\int_0^{0+} i\,d\tau}_{=0}=0$$

$i(0-)=i(0+)=\frac{V}{R}$

$Ri(0+)=\cancel{R}\frac{V}{\cancel{R}}=V$

$-V+V+L\frac{di}{dt}+0+0=0$

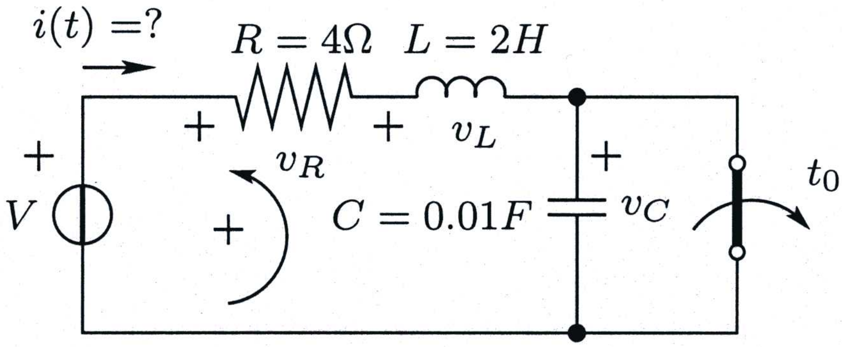
$\frac{di}{dt}=0$

16

5. FELADAT AZ ELŐZŐ, 4. FELADAT MEGOLDÁSA A DIFF. EGY. SEGÍTSÉGÉVEL. CSAK AKKOR VENNI, HA VAN IDŐ RÁ. NEM KÖTELEZŐ!

Teljes válasz kiszámítása.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol! A független feszültségforrás feszültsége $V = 20$ V.



Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban felvett referenciairányoknak megfelelően:

$$\sum v = 0 = V - v_L - v_R - v_C = V - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri - \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau \tag{62}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = 0 \tag{63}$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = s^2 Ae^{st} \tag{64}$$

4. Visszahelyettesítve (64) egyenleteket (63) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\left(sR + s^2 L + \frac{1}{C}\right) = 0 \tag{65}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. Az $(sR + s^2 L + \frac{1}{C}) = 0$ egyeneletet megoldva a gyökök:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{4}{4} \pm \sqrt{(1) - \frac{100}{2}} = -1 \pm \sqrt{-49} = -1 \pm j7 \quad (66)$$

A tranziens válasz:

$$i_t = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta) = Ae^{-t} \sin(7t + \theta) \quad (67)$$

5. Az állandósult állapotbeli válasz:

(*) $i_g = 0$, mert $t \to \infty$ esetén a kondenzátor állandósult állapotú DC áramkörben szakadásként viselkedik.

6. A teljes válasz:

$$i(t) = i_g + i_t = Ae^{-t} \sin(7t + \theta) \quad (68)$$

7. $t = 0+$, $i = i_L(0-) = \frac{V}{R} = \frac{20}{4} = 5$ A, azaz
$5 = i(0) = Ae^0 \sin(0 + \theta)$

$$A \cdot \sin(\theta) = 5 \quad (69)$$

$v_C = 0, \quad v_R = i \cdot R = V$

$$v_L = V - v_R - v_C = V - V - 0 = 0 \equiv L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad (70)$$

$t = 0+, \ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ae^{-t} \sin(7t + \theta) + 7Ae^{-t} \cos(7t + \theta) \quad (71)$$

$$0 = -A \cdot \sin(\theta) + 7A \cdot \cos(\theta) \quad (72)$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 7 = \tan\theta \to \theta = \tan^{-1}(7) = 81.9° \quad (73)$$

$$A = \frac{5}{\sin(81.9°)} = 5.05 \quad (74)$$

Így a teljes válasz:

$$i(t) = i_g + i_t = 5.05e^{-t} \sin(7t + 81.9°) \text{ A} \quad (75)$$

(*) A 16. OLDALON LÉVŐ (62) DIFF EGYENLETBŐL:

$$V - L\frac{di}{dt} - Ri - \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau = 0$$

$$L\frac{d^2 i_{áá}}{dt^2} + R\frac{d i_{áá}}{dt} + \frac{1}{C} i_{áá} = \frac{dV}{dt} = 0$$

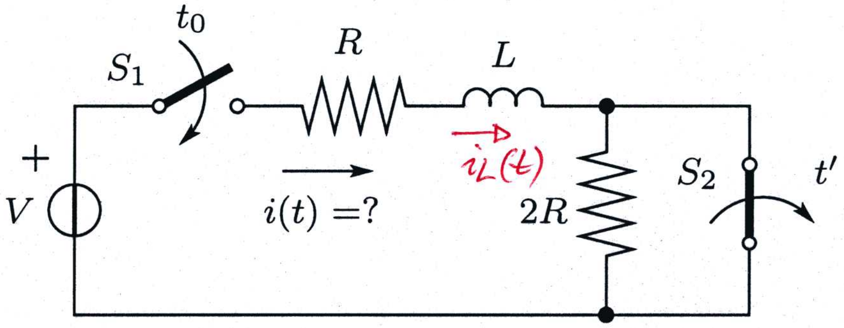
MIVEL DC ÉS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOT $\Longrightarrow$ $\frac{d i_{áá}}{dt} = 0$ ÉS $\frac{d^2 i_{áá}}{dt^2} = 0$

$$\frac{1}{C} i_{áá} = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{i_{áá} = 0}}$$

6. FELADAT

Teljes válasz kiszámítása, 2db kapcsolóval.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsolók $t = 0$ és $t = t'$ időpontban átkapcsolnak!



ÁRAMKÖRBŐL

Megoldás ① MINDIG EGY ENERGIATÁROLÓ ELEM ⇒ ELSŐRENDŰ DIFF. EGY.

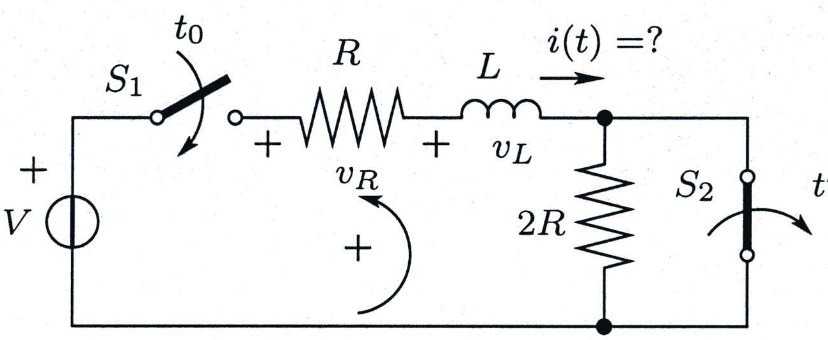
② $i(0-) = i_L(0-) = 0$

A megoldás menete a következő:

1. Két részre bontódik a feladat. Az első részben $0 < t < t'$ (S_2 zárt állású), a második $t' < t < \infty$ (S_2 nyitott állású). AZ EGYIK TOPOLÓGIA VÉGÁLLAPOTA ADJA MEG A KÖVETKEZŐ TOPOLÓGIÁHOZ TARTOZÓ KEZDETI FELTÉTELEKET

$0 < t < t'$ (S_2 zárt állású)

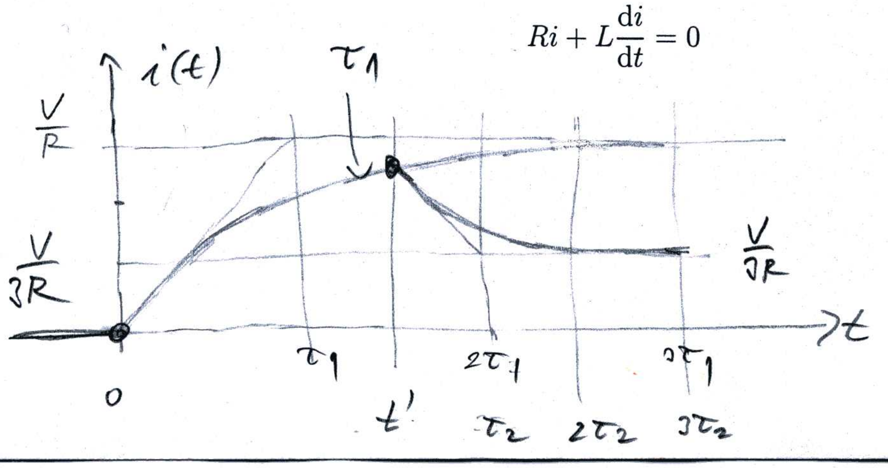
2. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban felvett referenciairányoknak megfelelően:



$$\sum v = 0 = V - v_L - v_R = V - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri \tag{42}$$

3. Homogén diff. egyenlet felírása:

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{43}$$



$\tau_1 = \frac{L}{R}$

$\tau_2 = \frac{L}{3R}$

4. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st} \tag{44}$$

5. Visszahelyettesítve (44) egyenleteket (43) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\underbrace{(R + sL)}_{\text{KARAKTERISZTIKUS EGYENLET}} = 0 \tag{45}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. A KARAKTE-RISZTIKUS $(R + sL) = 0$ egyeneletet megoldva a gyöke:

$$s = -\frac{R}{L} \tag{46}$$

A tranziens válasz:

$$i_t = Ae^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} = Ae^{-t/\tau} \tag{47}$$

6. Állandósult állapotban az áramkör egy állandósult állapotú DC áramkör. Ekkor az induktivitás rövidzárként viselkedik és a teljes feszültség az R ellenálláson esik

$$i_g = \frac{V}{R} \tag{48}$$

7. A teljes válasz a (47) és (48) megoldások összegeként adódik:

$$i(t) = i_t + i_g = \frac{V}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V}{R} + Ae^{-t/\tau} \tag{49}$$

8. A hálózat vizsgálatával a hiányzó A paramétert is meghatározhatjuk. $i_L(0-) = i_L(0+) = i(0+) = 0$
A kapcsoló $t = 0+$ időpontjában az i áram: $i = 0 = \frac{V}{R} + Ae^0$. $A = -\frac{V}{R}$
Így:

$$\underline{\underline{i}} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \underline{\underline{\frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}}, \quad 0 < t < t' \tag{50}$$

$\tau = \frac{L}{R}$

<u>$t' < t < \infty$ (S_2 **nyílt állású**</u> ÉS S_1 ZÁRT ÁLLÁSÚ)

1. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása:

$$\sum v = 0 = V - v_L - v_R - v_{2R} = V - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - 3Ri \tag{51}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása:

$$3Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{52}$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st} \tag{53}$$

4. Visszahelyettesítve (53) egyenleteket (52) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\underbrace{(3R + sL)}_{\text{KARAKTERISZTIKUS EGY.}} = 0 \tag{54}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. Az $(3R + sL) = 0$ egyeneletet megoldva a gyöke:

$$s = -\frac{3R}{L} \tag{55}$$

A tranziens válasz:

AHOL A' A $t > t'$ TOPOLÓGIÁHOZ TARTOZIK!

$$i_{t'} = A'e^{-\left(\frac{3R}{L}\right)(t-t')} \tag{56}$$

$t > t'$

5. Állandósult állapotban az áramkör egy állandósult állapotú DC áramkör. Ekkor az induktivitás rövidzárként viselkedik, és a teljes feszültség az $(R + 2R)$-en, azaz a két soros kapcsolású ellenálláson esik

$$i_{g'} = \frac{V}{3R} \tag{57}$$

6. A teljes válasz: $i'(t) = i_{t'} + i_{g'} = \frac{V}{3R} + A'e^{-\frac{3R}{L}(t-t')}$ $\quad t > t'$

7. Az A' paramétert az S_2 kapcsoló zárt és nyitott fázisaiból határozhatjuk meg. Az S_2 kapcsoló zárt fázisának $0 < t < t'$ végén

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t'}\right) = I' \tag{58}$$

A $t = t'+$ időpontban (miután kinyitottuk S_2-t) az $i(t)$ áram ugyancsak I' értékű

MIVEL $i_L(t'-) = i_L(t'+) = i(t'+)$ AZ INDUKTIVITÁS MIATT

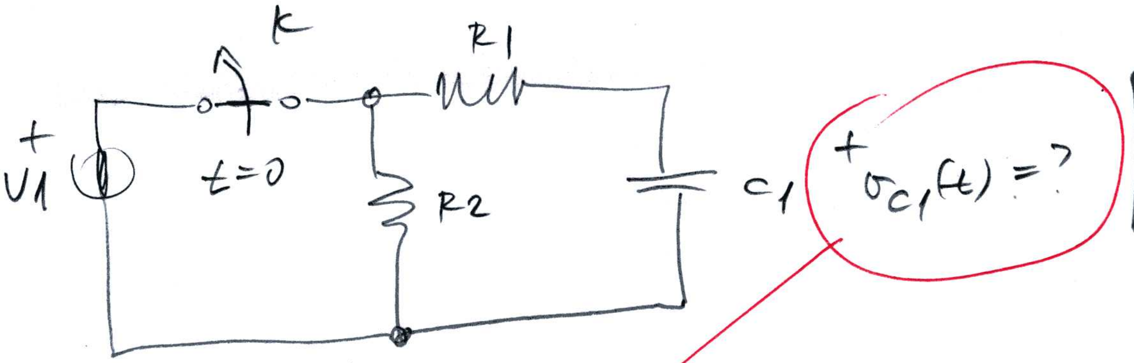
$$i'(t') = I' = \frac{V}{3R} + A'e^0 \tag{59}$$

$$A' = I' - \frac{V}{3R} \tag{60}$$

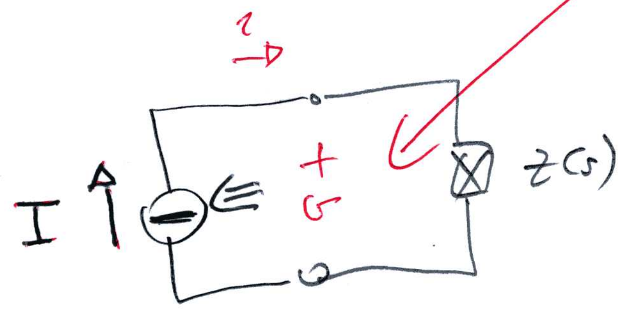
Így:

$$i' = \frac{V}{3R} + \left(I' - \frac{V}{3R}\right)e^{-\left(\frac{3R}{L}\right)(t-t')}\ \mathrm{A}, \quad t' < t < \infty \tag{61}$$

IMPEDANCIA MÓDSZER 2.HF/3. PÉLDA



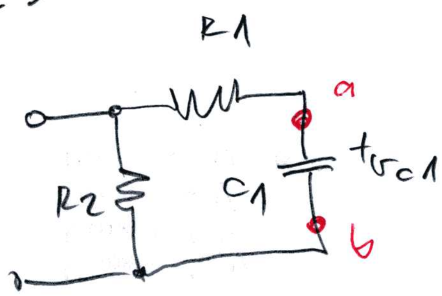
IMPEDANCIA



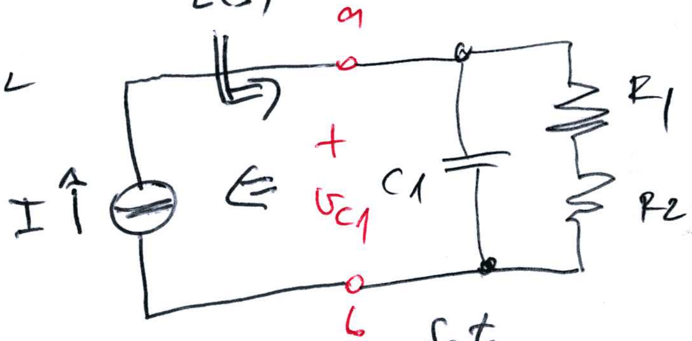
MIÉRT i A GERJESZTÉS?

① ELSŐ MÓDSZER: Z(s) KAPU A C_1 KIVEZETÉSEIN

$t > 0$



ÁTRAJZOL $\Rightarrow$



$- \; I \quad DC = A e^{s_g t} \Rightarrow s_g = 0$

$- \; I = 0 \Rightarrow A = 0$

$$Z(s) = \frac{1}{sC_1} \parallel (R_1 + R_2) = \frac{R_1 + R_2}{1 + s(R_1 + R_2)C_1} \equiv \frac{u_{C1}}{i}$$

$$[1 + s(R_1 + R_2)C_1]\, u_{C1} = (R_1 + R_2)\, i = 0$$

TR $\quad s = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C_1} = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow u_{C1}^{TR} = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

A'A' $\quad s_g = 0$ és $I = 0$ $\quad u_{C1}^{A'A'} = Z(s)\big|_{s=0}\, i = (R_1 + R_2) I = 0$

ELLENŐRIZNI: $Z(s)\big|_{s=0}$ ÉS $\tau = (R_1 + R_2)C_1$

TELJES:

$$v_{C1} = v_{C1}^{TR} + v_{C1}^{ÁÁ} = A e^{-\frac{t}{\tau}} + 0 = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

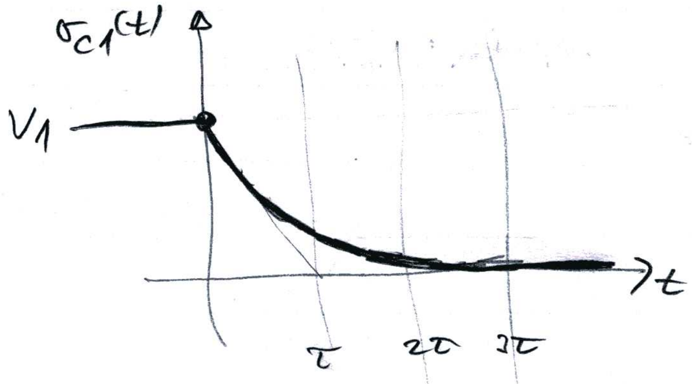
KEZDETI:

$$v_{C1}(0-) = v_{C1}(0+) = V_1 \equiv A e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t=0+} = A$$

$$A = V_1$$

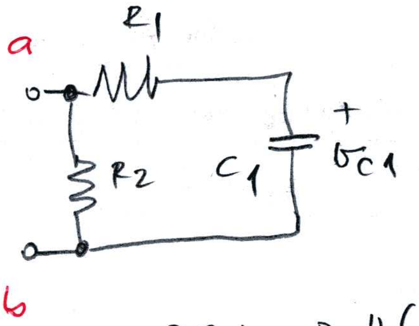
$$\boxed{v_{C1}(t) = V_1 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

FIZIKAI KÉP

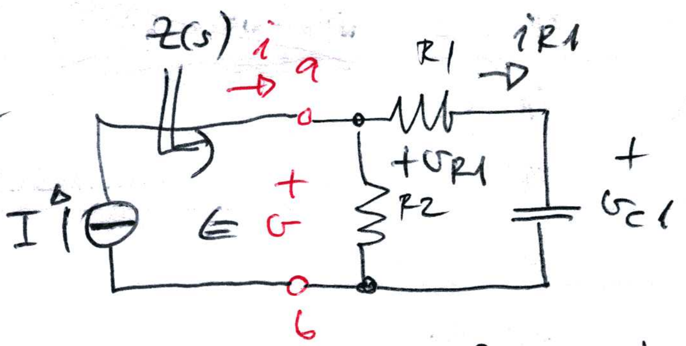


② MÁSIK MÓDSZER, FORMÁLIS KAPUNYITÁS

$t > 0$



ÁTRAJZOL $\Rightarrow$



$$Z(s) = R_2 \| \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) = R_2 \| \frac{1+sR_1C_1}{sC_1} = \frac{R_2(1+sR_1C_1)}{1+sR_1C_1+sR_2C_1}$$

$$Z(s) = \frac{(1+sR_1C_1)R_2}{1+s(R_1+R_2)C_1} = \frac{v}{i}$$

FEJEZZÜK KI v_{C1}-ET v SEGÍTSÉGÉVEL:

$$v = v_{R1} + v_{C1} = i_{R1} R_1 + v_{C1} = i \frac{R_2}{R_1+R_2+\frac{1}{sC_1}} R_1 + v_{C1}$$

$$i = \frac{v}{Z(s)}$$

3

$$v - \frac{sR_1R_2C_1}{1+s(\cancel{R_1}+R_2)C_1} \cdot \underbrace{\frac{1+s(\cancel{R_1+R_2})C_1}{(1+sR_1C_1)R_2}}_{1/Z(s)} v = v_{C1}$$

$$v_{C1} = \left[1 - \frac{sR_1R_2C_1}{(1+sR_1C_1)R_2}\right] v = \frac{\cancel{R_2} + \cancel{sR_1R_2C_1} - \cancel{sR_1R_2C_1}}{(1+sR_1C_1)\cancel{R_2}} v$$

$$v = (1+sR_1C_1)\, v_{C1}$$

TEHÁT

$$Z(s) = \frac{v}{i} = (1+sR_1C_1)\frac{v_{C1}}{i}$$

$$\underbrace{\frac{\cancel{(1+sR_1C_1)}R_2}{1+s(R_1+R_2)C_1}}_{Z(s)} = \cancel{(1+sR_1C_1)}\frac{v_{C1}}{i}$$

$$[1+s(R_1+R_2)C_1]\, v_{C1} = R_2\, i$$

NEM AZ AZ i !

$\boxed{TR}$ $$[1+s(R_1+R_2)C_1]\, v_{C1} = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{(R_1+R_2)C} = -\frac{1}{\tau}$$

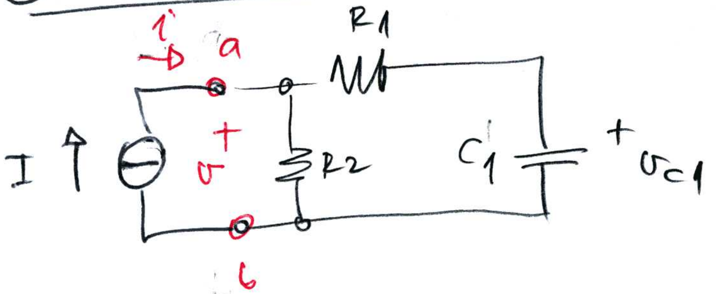
$$v_{C1}^{TR} = A\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\boxed{A'A}$ $$v_{C1} = \frac{R_2}{1+s(R_1+R_2)C_1}\Bigg|_{s=0} \cdot\, i\,\Bigg|_{I=0} = R_2 \cdot i\Big|_{I=0} = 0$$

$$v_{C1} = A\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

UAZ !

3 TRANSZFER ADMITTANCIA MÓDSZERREL



$$u_{C1} = \frac{\frac{1}{sC_1}}{R_1+\frac{1}{sC_1}}\, u = \frac{1}{1+sR_1C_1}\, u$$

$$u = z_{ab}(s)\, i = R_2 \parallel \underbrace{\left(R_1+\frac{1}{sC_1}\right)}_{\frac{1+sR_1C_1}{sC_1}} = \frac{(1+sR_1C_1)\,R_2}{1+s(R_1+R_2)C_1}\, i$$

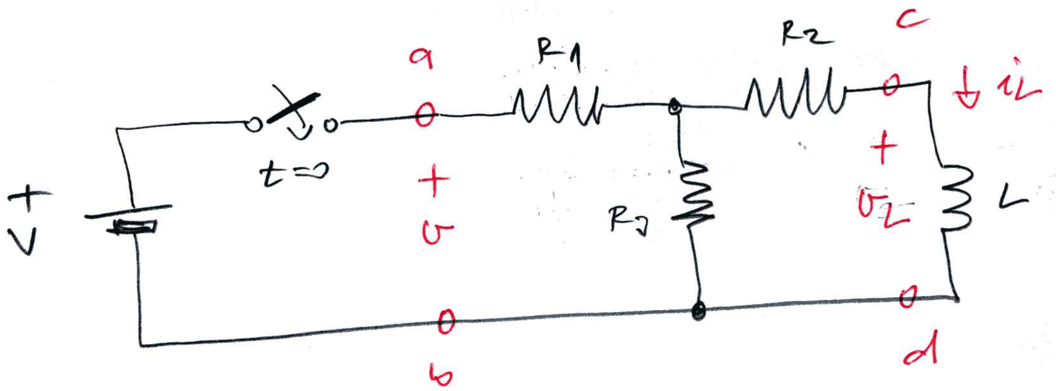
$$u_{C1} = \frac{1}{\cancel{1+sR_1C_1}} \cdot \frac{\cancel{(1+sR_1C_1)}\,R_2}{1+s(R_1+R_2)C_1}\, i = \underbrace{\frac{R_2}{1+s(R_1+R_2)C_1}}_{\text{TRANSZFER IMPEDANCIA}}\, i$$

$$Z_T(s) = \frac{u_{C1}}{i}$$

$$\left[1+s(R_1+R_2)C_1\right] u_{C1} = R_2\, i$$

p3 -on már megoldottuk

4 ÁTVITELI FGV MÓDSZERREL (MÁSIK PÉLDA)



KÉRDÉS $v_L(t) = ?$

$$\frac{v_L}{v} = H(s) = \frac{R_3 \| (R_2+sL)}{R_1 + \underbrace{R_3\|(R_2+sL)}_{\frac{R_3(R_2+sL)}{R_2+R_3+sL}}} \; \frac{sL}{R_2+sL}$$

$$= \frac{R_3\cancel{(R_2+sL)}}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+s(R_1+R_3)L} \; \frac{sL}{\cancel{R_2+sL}}$$

$$= \frac{sR_3L}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+s(R_1+R_3)L}$$

$$[R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+s(R_1+R_3)L]\,v_L = sR_3Lv$$

$\boxed{TR}$ $R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+s(R_1+R_3)L=0$

$$s = -\frac{1}{\tau} = \frac{R_1R_3+(R_1+R_3)R_2}{(R_1+R_3)L} = -\frac{R_1\|R_3+R_2}{L}$$

$$v_L^{TR} = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\boxed{ÁÁ}$ $v = V \Rightarrow s=0$

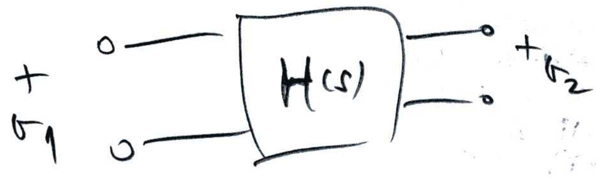
$$v_L = H(s)\Big|_{s=0} \cdot V = \frac{0}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}V = 0$$

$v_L(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ AHOL $\tau = \frac{L}{R_1\|R_3+R_2}$

$A \Rightarrow$ KEZDETI FELTÉTEL $\Rightarrow$ $i_L(0-) = i_L(0+) = 0$

$$v_L(0+) = \frac{R_3}{R_1+R_3}V$$

5 STABILITÁSVIZSGÁLAT H(s) – BŐL



KÉRDÉS : STABILIS

$$\frac{u_2}{u_1} = H(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 - 2}$$

$$\underbrace{(s^3 + s^2 - 2)}_{\text{KAR. EGY.}} u_2 = u_1 = 0$$

KAR. EGY. GYÖKEI ADJÁK MEG A STABILITÁST

KAR. EGY. GYÖKEI: $s^3 + s^2 - 2 \Rightarrow \pm \frac{1,2}{1} = \pm\{1, 2\}$

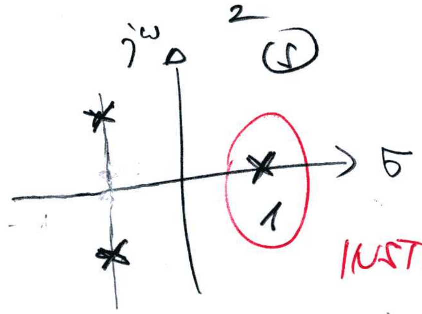
$$(s^3 + s^2 - 2) : (s - 1) = s^2 + 2s + 2 \quad \Rightarrow \quad (s-1) \Rightarrow s_1 = 1$$

$$\begin{array}{l} s^3 - s^2 \\ \hline 2s^2 - 2 \\ 2s^2 - 2s \\ \hline 2s - 2 = 2(s-1) \end{array}$$

$$s^2 + 2s + 2 \Rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow -1 \pm j1 \Rightarrow (s+1+j)(s+1-j)$$

$s_2 = -1 + j$

$s_3 = -1 - j$



INSTABIL

$$(s-1)\cdot(s+1-j)(s+1+j)$$

RATIONAL ROOT TEST: (EGÉSZ EGYÜTTHATÓS POLINOMOKRA)

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

$1, 2, \dots$ egész osztó, a_0

$1, 2, \dots$ egész osztó, a_n

$$\pm \frac{1, 2, \dots, a_n}{1, 2, \dots, a_0}$$

PÉLDA: $3 \cdot s^3 - 5s^2 + 5s - 2 = 0 \Rightarrow \pm \frac{1,2}{1,3} \Rightarrow \pm\left\{1, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$