1. GYAKORLAT

1. FELADAT Bizonyítsa be, hogy az alábbi

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0+}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (1\text{-}1)$$

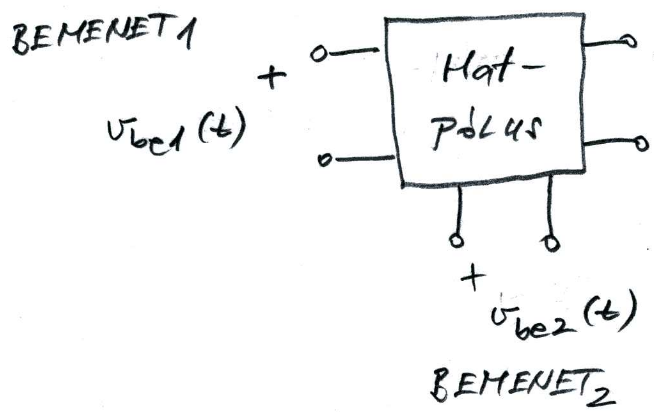
egyoldalas Laplace transzformáció lineáris.

A matematikában használt jelölésekkel a linearitás feltételei:

(a) szuperpozíció: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (1-2)

(b) első rendű homogenitás: $f(c'x) = c' f(x)$ (1-3)

Lefordítva az áramköröknél használt terminológiára



$$v_{ki}(t) = f[v_{be1}(t), v_{be2}(t)]$$

Hatpólus lineáris, ha

(a) $$v_{ki}(t) = f[v_{be1}(t), v_{be2}(t)] = f[v_{be1}(t), 0] + f[0, v_{be}(t)] \qquad (1\text{-}4)$$

(b) $$f[c_1 v_{be1}(t), 0] = c_1 f[v_{be1}(t), 0]$$

és $$f[0, c_2 v_{be2}(t)] = c_2 f[0, v_{be2}(t)] \qquad (1\text{-}5)$$

Vedd észre:
Egy áramkör felfogható mint egy transzformáció, amely a bemeneti <u>INFORMÁCIÓN</u> az átviteli (impulzus-válasz) függvénye szerinti <u>TRANSZFORMÁCIÓT</u> végez

Az (1−2) és (1−3) feltételek alkalmazása az (1−1) integrál (Laplace) transzformációra:

áramkör $\Rightarrow$ $f(t) = u(t)$

$x = u_{be1}(t)$ $\qquad y = u_{be2}(t)$

(a) Szuperpozíció

$$\mathcal{L}\{u_{be1}(t) + u_{be2}(t)\} = \int_{0+}^{\infty} [u_{be1}(t) + u_{be2}(t)]\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0+}^{\infty} u_{be1}(t)\, e^{-st}\, dt + \int_{0+}^{\infty} u_{be2}(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \mathcal{L}\{u_{be1}(t)\} + \mathcal{L}\{u_{be2}(t)\} \qquad (1-6)$$

(b) Első rendű homogenitás

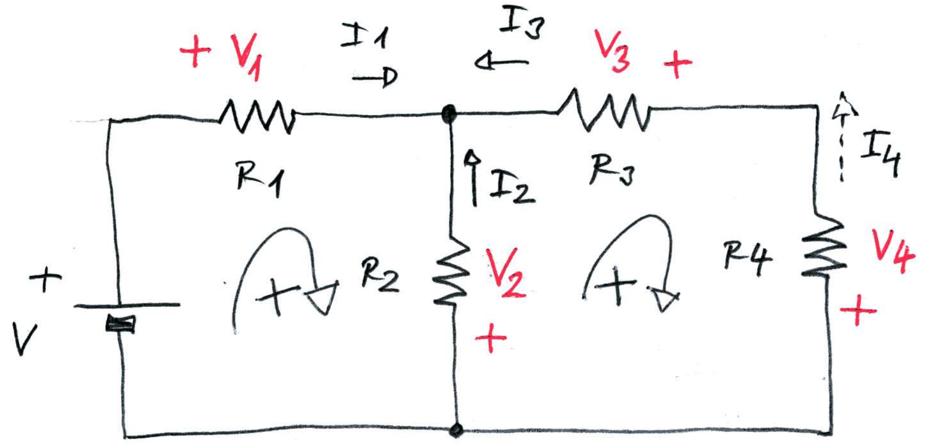
$$\mathcal{L}\{c_i u_{be,i}(t)\} = \int_{0+}^{\infty} c_i\, u_{be,i}(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= c_i \int_{0+}^{\infty} u_{be,i}(t)\, e^{-st}\, dt = c_i\, \mathcal{L}\{u_{be,i}(t)\} \qquad (1-7)$$

(1−6) és (1−7) alapján:

A Laplace transzformáció egy <u>LINEÁRIS</u> integrál transzformáció.

2. FELADAT Az adott mérőirányok mellett a Kirchhoff egyenletek segítségével határozzuk meg az alábbi áramkörben fellépő valamennyi feszültség és áram értékét. Ellenőrizzük le a kapott eredményeket.



$V = 10V$

$R_1 = 4\Omega$

$R_2 = 6\Omega$

$R_3 = 3\Omega$

$R_4 = 6\Omega$

FEKETE: MEGADOTT IRÁNYOK

PIROS: FELVETT IRÁNYOK

MEGBESZÉLNI: Mit vehetek fel szabadon, mit nem, és miért

(a) Az áramkör topológiáját leíró Kirchhoff egyenletek

HUROKTÖRVÉNY: KÉK ⇒ KÖRÜLJÁRÁSI IRÁNY

$$-V + V_1 - V_2 = 0 \qquad (2-1)$$

$$V_2 - V_3 - V_4 = 0 \qquad (2-2)$$

CSOMÓPONTI: $$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \qquad (2-3)$$

(b) Áramköri elemekre vonatkozó egyenletek (mérőirányok kötöttek):

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad (2-4) \qquad\qquad I_2 = \frac{V_2}{R_2} \quad (2-5)$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} \quad (2-6) \qquad\qquad (I_4) = I_3 = \frac{V_4}{R_4} \quad (2-7)$$

---

7 ismeretlen és 7 egyenlet. Jövő héten lesz:

– hurokáramok ⇒ CSAK 2 ismeretlen

– csomóponti potenciálok ⇒ CSAK 1 ismeretlen

Ismeretlenek eliminálása

(2-1) és (2-2) -ből $\quad V_2 = -10 + V_1 \quad (2-8)$

$$V_2 = V_3 + V_4 \quad (2-9)$$

(2-8) és (2-9)-ből V_2 kiejtve és áramköri elemekre vonatkozó egyenleteket behelyettesítve:

$$10 = V_1 - V_2 = V_1 - V_3 - V_4 \Rightarrow I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_3 R_4 = 10$$

$$I_1 R_1 - I_3 (R_3 + R_4) = 10 \quad (2-10)$$

A (2-3) Kirchhoff csomóponti és (2-5) (2-8) egyenletekből

$$-I_1 - I_3 = I_2 \equiv \frac{V_2}{R_2} = -\frac{10}{R_2} + \frac{V_1}{R_2} = -\frac{10}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} I_1 \quad (2-11)$$

Mivel (2-10) és (2-11)-ben ismeretlenként csak I_1 és I_3 szerepel ezeket átrendezve:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 I_1 - (R_3 + R_4) I_3 = 10 \\ \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) I_1 + I_3 = \frac{10}{R_2} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{BEHELYETTESÍTVE}} \left.\begin{array}{l} 4I_1 - 9I_3 = 10 \\ \frac{10}{6} I_1 + I_3 = \frac{10}{6} \end{array}\right\} (2-12)$$

(2-12) megoldása a determináns módszerrel:

$$\underline{\underline{I_1}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -9 \\ \frac{10}{6} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ \frac{10}{6} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10 + \frac{90}{6}}{4 + \frac{90}{6}} = \frac{25}{19} = \underline{\underline{1{,}32\,A}}$$

(2-10) -ből $\quad \underline{\underline{I_3}} = \frac{R_1 I_1 - 10}{R_3 + R_4} = \underline{\underline{-0{,}53\,A}}$

(2-3)-ból $\quad \underline{\underline{I_2}} = -I_1 - I_3 = \underline{\underline{-0{,}79\,A}}$

ELMONDANI

(a) Fizikai és mérőirányok jelentése. Mit jelent, ha egy áram v. feszültség negatív?

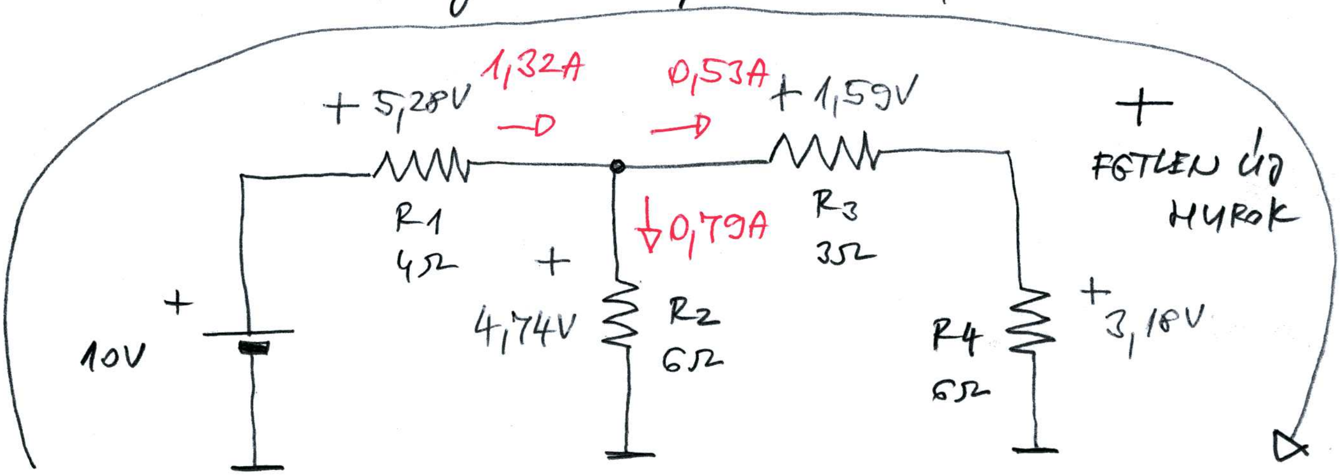
(b) Kerekítési hibák hatása. Hány tizedesre kell számolni? Alkatrészsorok.

(c) Mi a különbség pl. 0,79A és 0,790A között?

(d) Földpont választása. Miért választható, hová célszerű választani, miért?

ELLENŐRZÉS:

(a) A fizikai mérőirányoknak megfelelően, írjuk be minden áramot és feszültséget a kapcsolási rajzba



(b) Egy független új hurokra (vagy csomópontra) írjuk fel a Kirchhoff egyenletet

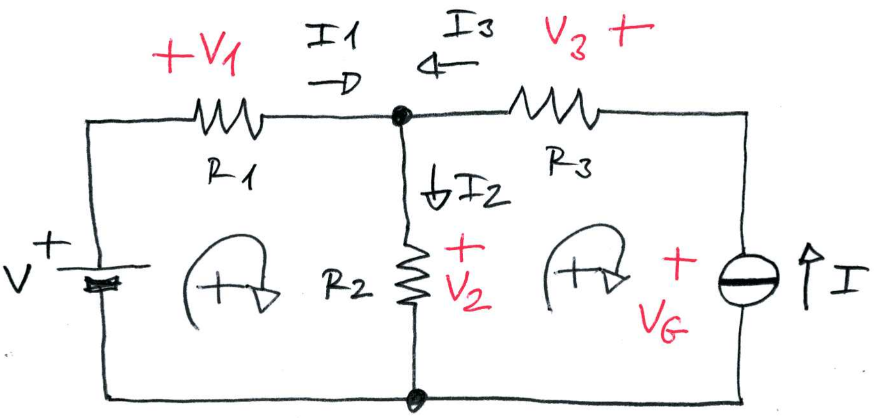
$$-10 + 1{,}32\, R_1 + 0{,}53\, R_3 + 0{,}53\, R_4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0{,}05 \stackrel{?}{=} 0$$

OK, kerekítési hiba

3. FELADAT

Az adott mérőirányok mellett, a Kirchhoff egyenletek segítségével határozzuk meg az alábbi áramkörben fellépő valamennyi feszültség és áram értékét. A fizikai mérőirányokkal ellenőrizzük le a kapott eredményeket.



$V = 10\,V$

$I = 5\,A$

$R_1 = 4\Omega$

$R_2 = 6\Omega$

$R_3 = 3\Omega$

ELMONDANI:

① 2. FELADAT-hoz képest I_2-őt megfordítottam. Elmondani melyik mérőirányt vehetem fel szabadon, melyiket nem.

② I_3 mérőiránya azért ilyen, hogy $I_3 = I$! Áramgenerátor kényszeríti az áramot az adott ágban!

③ $I_3 = I = 5\,A$ miatt eggyel kevesebb ismeretlen de bejön egy új ismeretlen, a V_G !

(a) Topológiát leíró Kirchhoff törvények:

HUROK: $-V + V_1 + V_2 = 0$ (3-1)

$-V_2 - V_3 + V_G = 0$ (3-2)

CSOMÓPONTI: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ (3-3)

(b) Áramköri elemekre vonatkozó egyenletek:

$I_1 = \frac{V_1}{R_1}$ (3-4) $I_2 = \frac{V_2}{R_2}$ (3-5) $I_3 = \frac{V_3}{R_3} = 5A$ (3-6)

A független áramforráson fellépő V_G feszültséget a BEFOGLALÓ

ÁRAMKÖR határozza meg

$$V_G = V_2 + V_3 \qquad (3-7)$$

---

7 egyenlet és 7 ismeretlen

Megoldani csak azokban a tankönyvekben kell, ahol ez problémát okoz!

(3-1) és (3-3) -ból

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = 4I_1 + 6I_2 = 10 \qquad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

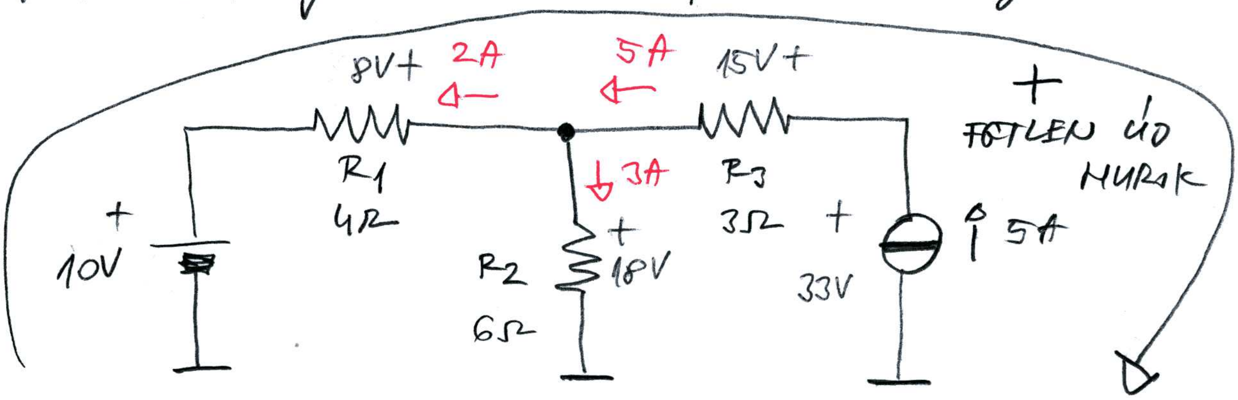
$$I_1 - I_2 = -5$$

$\underline{\underline{I_1 = -2A}}$ $\quad \underline{\underline{I_2 = 3A}}$ és $\quad \underline{\underline{I_3 = I = 5A}}$

$$\underline{\underline{V_G}} = V_2 + V_3 = I_2 R_2 + I R_3 = \underline{\underline{33V}}$$

ELLENŐRZÉS

(a) Fizikai mérőirányok szerint beírjuk a feszültségeket és áramokat



(b) Egy új, fgtlen hurokra felírva a Kirchhoff egyenletet

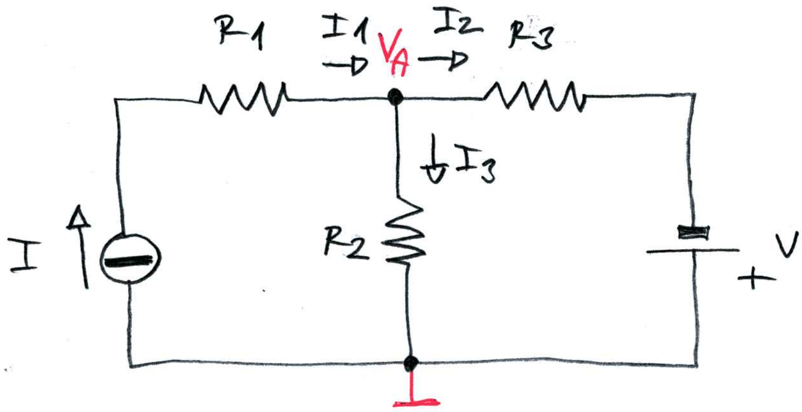
$$-10 + I_1 R_1 - I_3 R_3 + V_G \overset{?}{=} 0$$

$$-10 - 8 - 15 + 33 = 0 \overset{?}{=} 0$$

ok

4. FELADAT

Szuperpozíció segítségével, a megadott mérőirányok mellett határozzuk meg az alábbi áramkörben fellépő valamennyi feszültség és áram értékét.



$V = 9V$

$I = 7A$

$R_1 = 2\Omega$

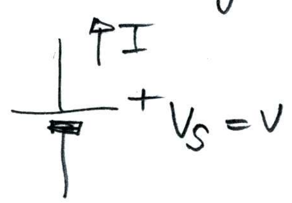
$R_2 = 3\Omega$

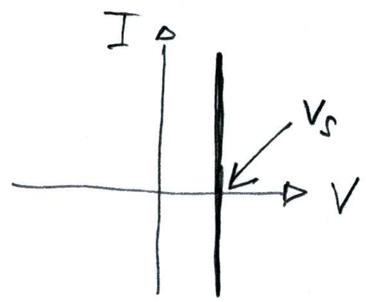
$R_3 = 6\Omega$

Földet választok (elmondani miért oda) és utána a V_A csomópont feszültségét határozom meg szuperpozícióval, mert V_A-ból minden további feszültséget és áramot ki lehet számolni.

<u>SZÜKSÉG LESZ,</u> ezért elmondani

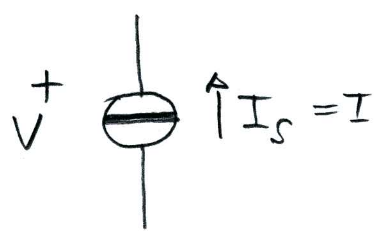
① Ftlen feszültségforrás

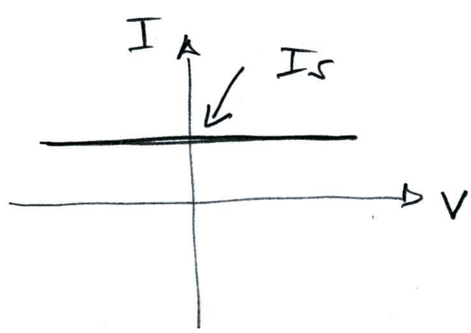




Az I áramot a befoglaló áramkör határozza meg.

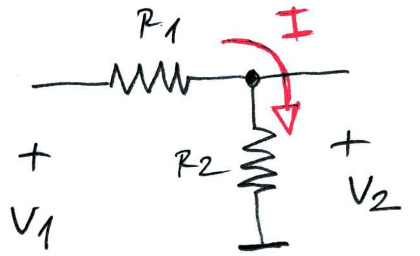
② Ftlen áramforrás





A V feszültséget a befoglaló áramkör határozza meg.

③ (Terheletlen) feszültségosztó tétel:



$$V_1 = I(R_1+R_2)$$

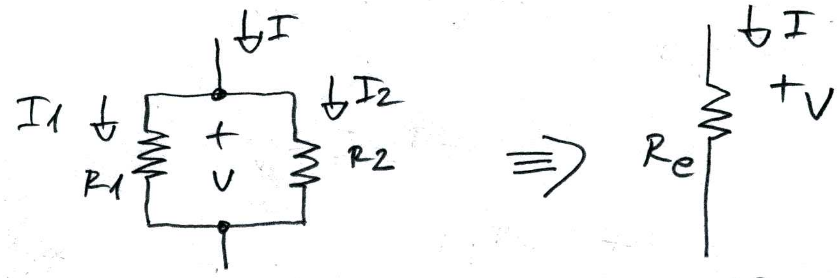
$$V_2 = I R_2 \Rightarrow I = \frac{V_2}{R_2}$$

$$V_1 = \frac{V_2}{R_2}(R_1+R_2) = \frac{R_1+R_2}{R_2} V_2$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_1$$

④ Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője, a replusz művelet

Ekvivalencia:



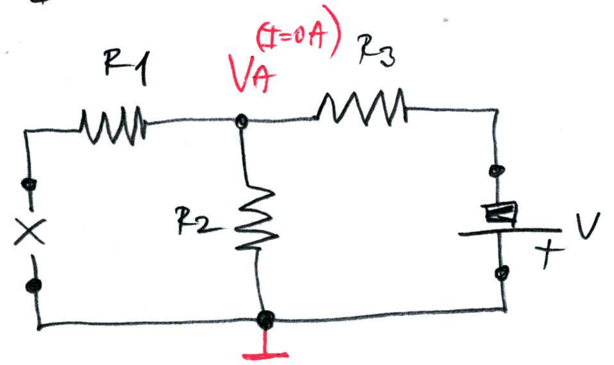
$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\,\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$$

$$R_e = \frac{V}{I} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = R_1 \| R_2$$

A hálózatok egyszerűsítésére szolgáló tételeket HATÉKONYAN lehet levezetni

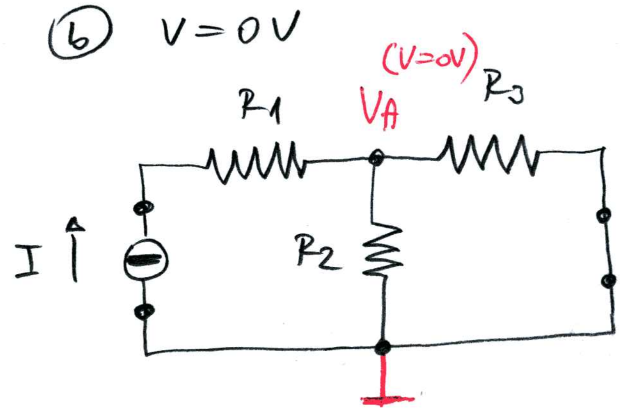
MEGOLDÁS szuperpozíció + hálózatok egyszerűsítésére szolgáló tételek:

ⓐ $I = 0A$



$$V_A^{(I=0)} = -\frac{R_2}{R_2+R_3} V = -3V$$

ⓑ $V = 0V$



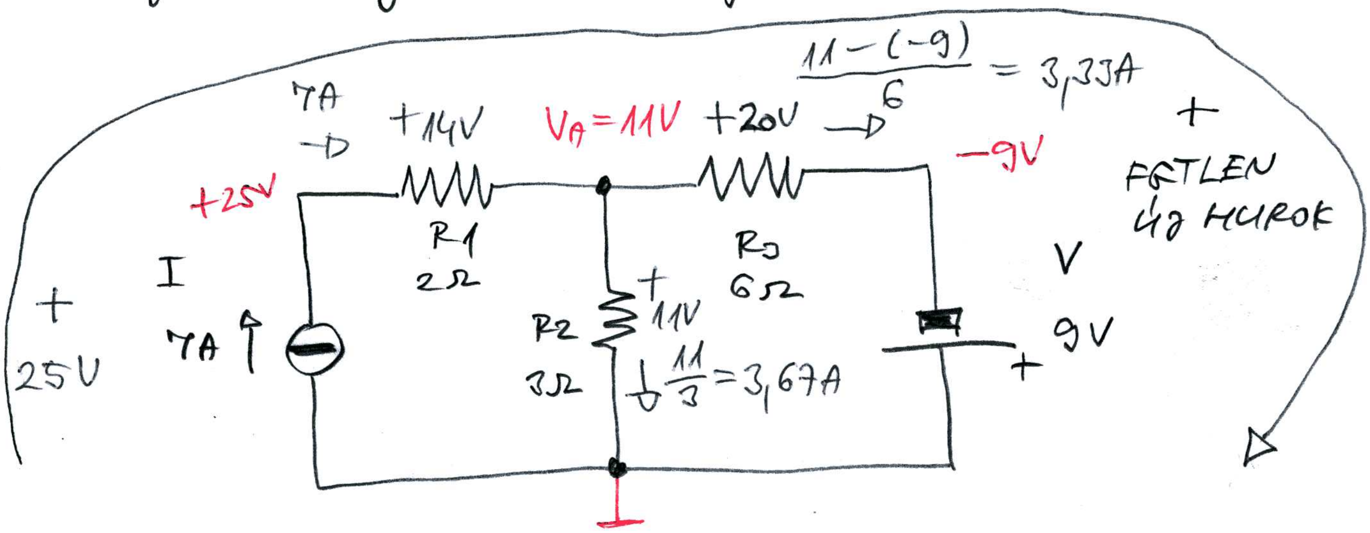
$$V_A^{(V=0V)} = I\,(R_2 \| R_3) = I\,\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$$

$$= 14V$$

$$\underline{\underline{V_A}} = V_A^{(I=0A)} + U_A^{(V=0V)} = -3 + 14 = \underline{\underline{11V}}$$

ELLENŐRZÉS:

(a) Valamennyi feszültség és áram meghatározása:

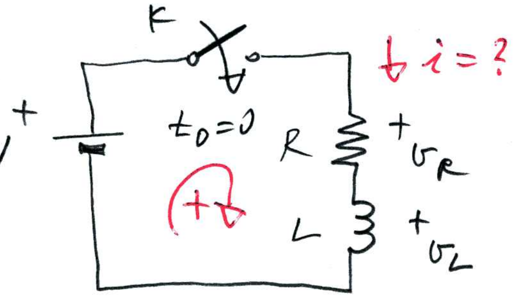


(b) Kirchhoff hurok felírása egy új, fiktív hurokra

$$-25 + 14 + 20 - 9 \overset{?}{=} 0V$$

$$-34 + 34 = 0 \overset{?}{=} 0V \qquad \text{ok}$$

5. FELADAT Írja fel az alábbi áramkörben az $i(t)$ áramot megadó diff. egyenletet, és azt oldja meg a matematikában tanult módszerrel a $t \geq 0$ időtartományra.



$t \geq 0 \Rightarrow$ K kapcsoló zárva

$$-V + v_R + v_L = -V + Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

A diff. egyenlet: $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L} i = \dfrac{V}{L}$

A kezdeti feltételt $i_L(t) = i(t)$ folytonosságából határozom meg.

$t < 0 \Rightarrow$ K nyitott $\Rightarrow$ $i = i_L = 0$. A tárolt energia $w_L = L\dfrac{i_L^2(0-)}{2} = 0$ Ws

$t \geq 0$ az induktivitáson folyó $i_L(t)$ áram az időnek <u>FOLYTONOS</u> függvénye:

$$i_L(0+) = i(0+) = i_L(0) = i_L(0-) = 0 \text{ A}$$

Tehát az áramkört jellemző diff. egyenlet

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{V}{L} \quad (5-1)$$

ahol $\tau = \dfrac{L}{R}$ definíció szerint az <u>IDŐÁLLANDÓ</u>

kezdeti feltétel: $i(0+) = i_L(0+) = 0$ A

(5-1) egy elsőrendű, állandó együtthatós, inhomogén közönséges és lineáris diff. egy. Fizikailag értelmezzük ezeket a jelzőket.

① (5-1)-hez tartozó, homogén diff. egy. <u>ÁLTALÁNOS</u> (minden kezdeti feltétel mellett igaz) megoldása. Fizikailag: <u>TRANZIENS</u>

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0 \qquad (5-2)$$

Egy fgv van, amelynek akárhányadik deriváltja tartalmazza önmagát és az nem nulla:

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{At} = A^n e^{At}$$

Keressük (5-2) megoldását $i_{tr}(t) = c' e^{-At}$ alakban:

$$\frac{di_{tr}}{dt} + \frac{1}{\tau} i_{tr} = -A c' e^{-At} + \frac{c'}{\tau} e^{-At} = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\tau} - A\right)} c' e^{-At} = 0 \qquad \text{ahol} \quad e^{-At} \neq 0 \qquad (5-3)$$

KARAKTERISZTIKUS EGYENLET (miért, elmondani)

(5-3)-ból a homogén diff. egy. általános (mit jelent) megoldása:

$$\frac{1}{\tau} - A = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \underline{\underline{i_{tr} = c' e^{-\frac{t}{\tau}}}} \qquad (5-4)$$

AHOL – $\tau = \frac{L}{R}$

– c' a kezdeti feltétel határozza meg

② Az (5-1) inhomogén diff. egyenlet adott gerjesztéshez tartozó partikuláris megoldása. Fizikailag: ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTÚ MEGOLDÁS

Keressük (5-1) megoldását $i_{A'A'}(t) = D$ alakban:

$$\frac{di_{A'A'}}{dt} + \frac{1}{\tau} i_{A'A'} = \frac{d}{dt} D + \frac{D}{\tau} = 0 + \frac{D}{\tau} = \frac{V}{L} \Rightarrow D = \tau \frac{V}{L} = \frac{V}{R}$$

$$\underline{\underline{i_{A'A'} = \frac{V}{R}}} \qquad (5-5)$$

(5-1) teljes (elmondani mit jelent) megoldása:

$$i(t) = i_{tr}(t) + i_{A'A'}(t) = c' e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V}{R} \qquad (5-6)$$

c' meghatározása a kezdeti feltételből

$$i(0+) = c' e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V}{R}\Big|_{t=0+} = c' + \frac{V}{R} \equiv 0$$

$$c' = -\frac{V}{R} \qquad (5-7)$$

(5-6) és (5-7)-ből a teljes megoldás:

$$i(t) = -\frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V}{R} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

A megoldás megszerkesztése

Nevezetes pontok:

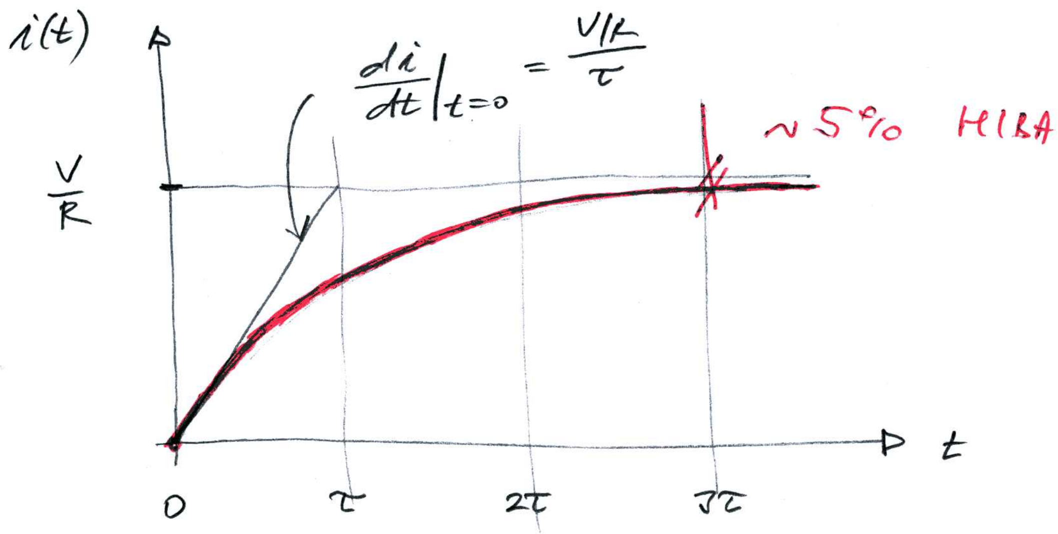
$$i(0) = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} i(t) = \frac{V}{R}$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{V/R}{\tau}$$

$$\tau \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{V}{R}$$

elmondani



MEGOLDÁS $t \geq 0$