Állománynév: aramkorok_03lti_analizis24.pdf

Irodalom: Tankönyv: R. J. Smith & R. C. Dorf, „Circuits, Devices and Systems," Wiley, 5^{th} Edition, pp. 42-57, 110-231, 249-272.

Előadó jegyzetei: http://users.itk.ppke.hu/~kolumban/aramkorok/

3. A KONCENTRÁLT PARAMÉTERŰ LINEÁRIS ÉS IDŐINVARIÁNS HÁLÓZATOK ANALíZISE

Ne feledd: Az LTI hálózatok matematikai modellje egy *állandó együtthatós*, *lineáris*, *differenciál egyenlet*

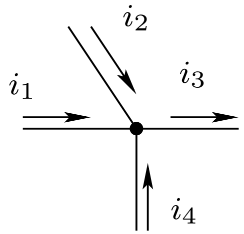
Célok:
- Az egyenletek felírása előtt az áramkört egyszerűsítése
- Minimális számú ismeretlent adó (differenciál) egyenlet felírása
- Mivel sokszor csak az állandósult állapotbeli viselkedést akarjuk meghatározni, egyszerű (algebrai) módszerek adása az állandósult állapotban mért válasz meghatározására

Áramkör $\Longrightarrow$ Egyszerűsített áramkör		
$\Downarrow$		$\Downarrow$ Mérnök
Időtartomány		**Transzformált-tartomány**
$\Downarrow$ Lineáris rendszer		$\Downarrow$ Transzformált rendszer (Pl. impedancia)
$\downarrow$ Differenciál egyenlet	$\Longrightarrow$ Transzformáció Matematikus	$\downarrow$ Algebrai egyenlet
$\downarrow$ Diff. egy. megoldása		$\downarrow$ Algebrai módszerek
$\downarrow$ Válaszjel	$\Longleftarrow$ Inverz transzformáció	$\downarrow$ Megoldás a transzformált tartományban

Emlékeztető: A hagyományos módszer a differenciál egyenlet felírására

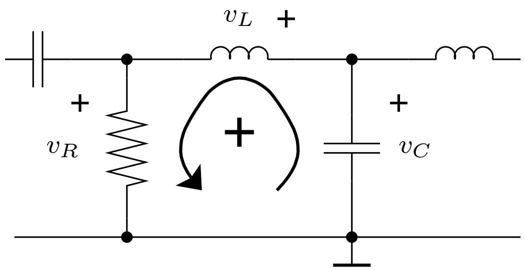
1. Kirchhoff csomóponti törvénye

$$\sum_k i = 0$$



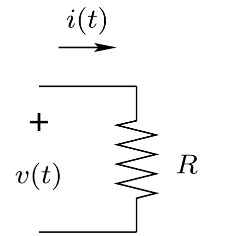
2. Kirchhoff huroktörvénye

$$\sum_l v = 0$$



3. Áramköri elemekre vonatkozó egyenletek
   Például az Ohm törvény

$$v(t) = R\,i(t)$$



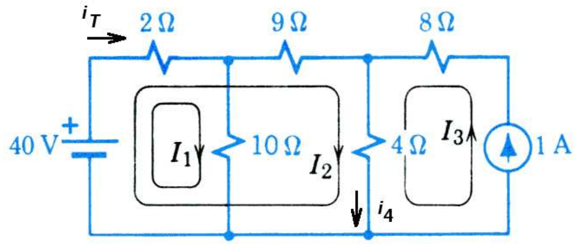
3.1. Hurokáramok módszere

Alapelv:

- Kirchhoff huroktörvényét írjuk fel
- A csomóponti és az áramköri elemekre vonatkozó egyenleteket automatikusan kielégítjük

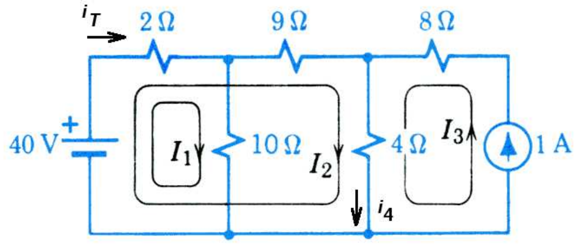
Módszer:

- Minden független hurokban felveszünk egy ún. *hurokáramot* ami nem azonos az ágárammal
- Hurokáramok számát addig növeljük amíg minden hurkot lefedtünk
- Minden új hurokáram menjen át legalább egy addig még le nem fedett ágon
- A hálózatnak topológiai értelemben *összefüggőnek* kell lennie



Minimális számú ismeretlent ad:

- Sok, független áramforrás esetén
- Egy áramgenerátoron egy és csak egy hurokáramot célszerű felvenni



Ellenőrzés:

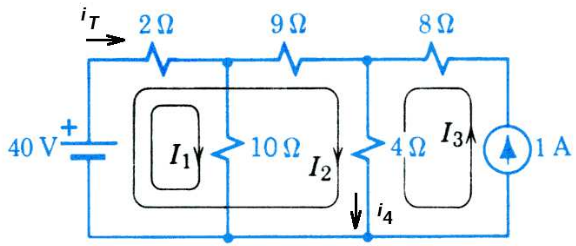
- Kirchhoff hurokegyenlet felírása egy új, korábban fel nem vett hurok mentén

Egyenletek:

$$I_3 = 1 \text{ A}$$

$$\sum_v = 0 = -40 + 2(I_1 + I_2) + 10I_1$$

$$\sum_v = 0 = -40 + 2(I_1 + I_2) + 9I_2 + 4(I_2 + I_3) = -40 + 2(I_1 + I_2) + 9I_2 + 4(I_2 + 1)$$



A 4-ohmos ellenálláson fizikailag átfolyó áram:

$$i_4 = I_2 + I_3 = I_2 + 1$$

A telepből felvett áram:

$$i_T = I_1 + I_2$$

Ellenőrzés: Kirchhoff hurokegyenlet felírása a középső hurokra

$$\sum_v = 0 = \textbf{?} = -10I_1 + 9I_2 + 4(I_2 + 1)$$

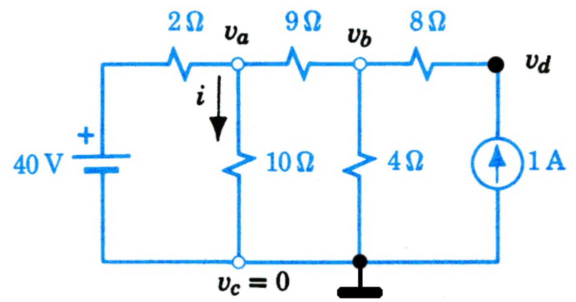
3.2. Csomóponti feszültségek módszere

Alapelv:

- Kirchhoff csomóponti törvényét írjuk fel
- A hurkokra és az áramköri elemekre vonatkozó egyenleteket automatikusan kielégítjük

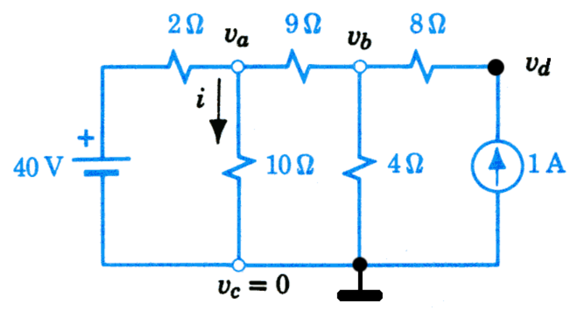
Módszer:

- Egy csomópontot *földelünk*, azaz referenciának tekintünk
- Elvileg max. $(n-1)$ független csomópont van, de a számba veendő csomópontok számát a független generátorok csökkentik
- Ha a kapcsolási rajzon szereplő föld nem optimális helyen van akkor az áthelyezhető. Ekkor azonban a kapott csomóponti feszültségeket az eredeti föld szerint át kell számolni!!!



Minimális számú ismeretlent ad:

- Sok, független feszültségforrás esetén, ha azok egy közös ponthoz kapcsolódnak
- Áramköreink rendszerint aszimmetrikusak, az-az van egy közös föld pontjuk



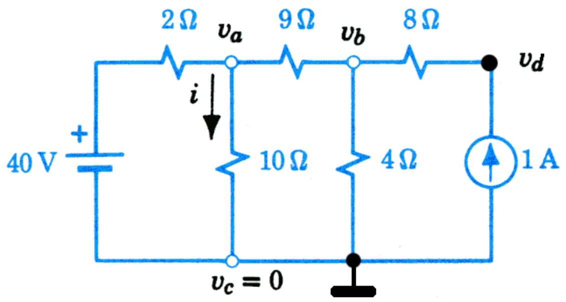
Ellenőrzés:

- A kapcsolási rajzba be kell írni valamennyi csomópont feszültségét és valamennyi ág áramát

Egyenletek:

$$\sum_{i_a} = 0 = \frac{40 - v_a}{2} + \frac{v_b - v_a}{9} - \frac{v_a - 0}{10}$$

$$\sum_{i_b} = 0 = \frac{v_a - v_b}{9} + 1 - \frac{v_b - 0}{4}$$



Az i áram értéke:

$$i = \frac{v_a - v_c}{10} = \frac{v_a - 0}{10}$$

A „d" csomópont feszültsége:

$$v_d = v_b + 8 \times 1$$

3.3. Hálózatokra vonatkozó tételek

Az egyenletek felírásának megkezdése előtt az áramkört célszerű egyszerűsíteni azért, hogy minimális számú ismeretlent kapjunk

3.3(a) KÉTPÓLUSOK (EGYKAPUK) EKVIVALENCIÁJA

Két kétpólus (egykapu) ekvivalens, ha azonos a *feszültség-áram* karakterisztikájuk

3.3(b) SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSOK ÖSSZEVONÁSA

A replusz művelet

$$\frac{a}{b} \parallel \frac{c}{d} = \frac{ac}{ad + bc}$$

ahol a, b, c és d tetszőleges polinomok, pl. impedanciák is lehetnek

Soros ellenállások eredője: $R_{er} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

Párhuzamos ellenállások eredője: $R_{er} = R_1 \parallel R_2 \parallel \cdots \parallel R_n$

Soros induktivitások eredője: $L_{er} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$

Párhuzamos induktivitások eredője: $L_{er} = L_1 \parallel L_2 \parallel \cdots \parallel L_n$

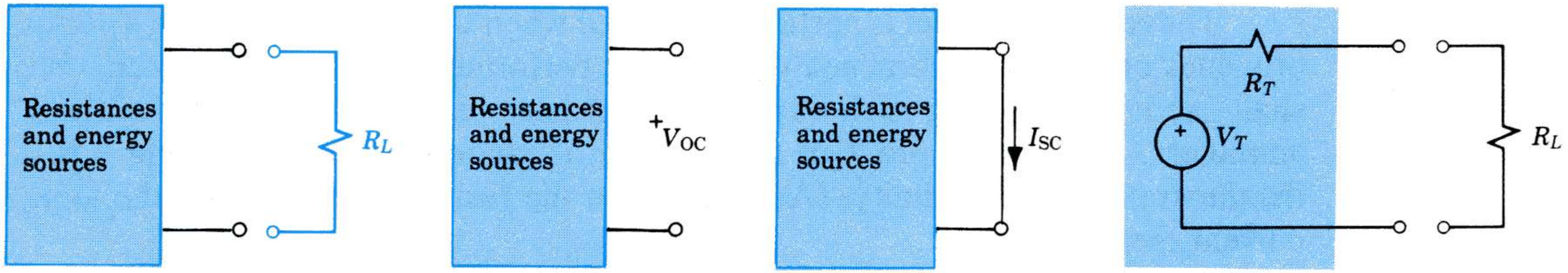
Soros kapacitások eredője: $C_{er} = C_1 \parallel C_2 \parallel \cdots \parallel C_n$

Párhuzamos kapacitások eredője: $C_{er} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

3.3(c) THÈVENIN TÉTEL

A terhelés szempontjából egy tetszőleges, ellenállásokat, független forrásokat és vezérelt generátorokat tartalmazó hálózat (áramkör) az adott kapura nézve helyettesíthető egy V_T feszültségű független feszültségforrás és egy R_T ellenállású ellenállás soros kapcsolásával

A Thèvenin ekvivalens meghatározásának lépései:



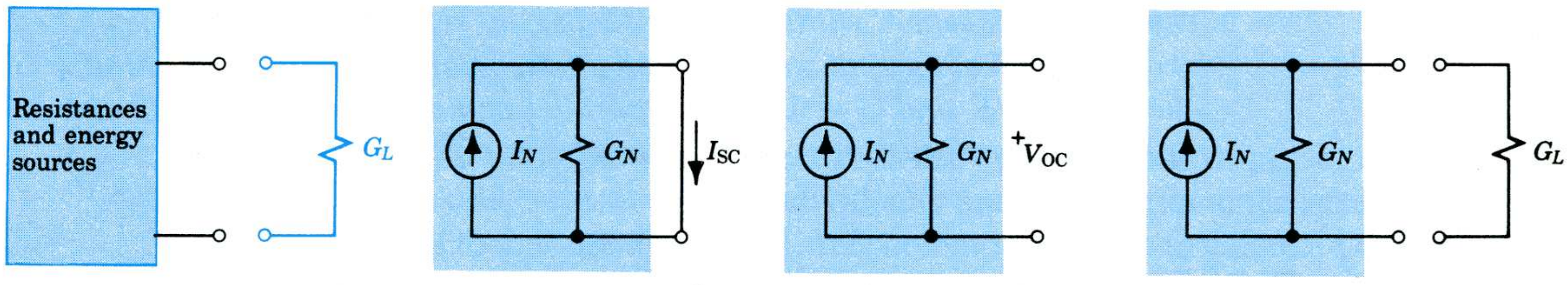
(a) An active one-port (b) Finding V_{OC} (c) Finding I_{SC} (d) Thévenin's equivalent

$$V_T = V_{OC} \qquad \text{and} \qquad I_{SC} = \frac{V_T}{R_T} \quad \Longrightarrow \quad R_T = \frac{V_T}{I_{SC}} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}$$

3.3(d) NORTON TÉTEL

A terhelés szempontjából egy tetszőleges, ellenállásokat, független forrásokat és vezérelt generátorokat tartalmazó hálózat (áramkör) az adott kapura nézve helyettesíthető egy I_N áramú független áramforrás és egy G_N vezetésű admittancia párhuzamos kapcsolásával

A Norton ekvivalens meghatározásának lépései:



(a) An active one-port (b) Interpreting I_{SC} (c) Interpreting V_{OC} (d) Norton's equivalent

$$I_N = I_{SC} \qquad \text{and} \qquad G_N = \frac{I_N}{V_{OC}} = \frac{I_{SC}}{V_{OC}}$$

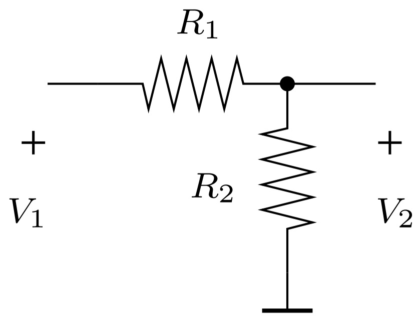
3.3(e) HELYETTESíTŐ KÉPEK EGYMÁS KÖZTI ÁTALAKíTÁSA

- A Thèvenin és Norton helyettesítő képek egymásba átalakíthatók a következő összefüggések segítségével:

$$I_N = \frac{V_T}{R_T} \qquad V_T = \frac{I_N}{G_N} \qquad G_N = \frac{1}{R_T}$$

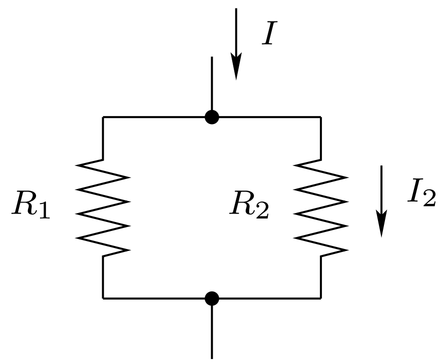
- Vedd észre, az elektronikában mindennek megvan a duálja. Elég a tételek felét megtanulni **:-) !!!**
- Ha egy áramkörben csak egy kapocspár mentén akarjuk a feszültséget/áramot meghatározni, akkor
  1. arra a kapocspárra nézve nyitunk egy kaput,
  2. a terhelést kiemeljük és
  3. a maradék befoglaló áramkört a Thèvenin/Norton helyettesítő képpel helyettesítjük
- Vedd észre, a munkaegyenes/munkapont módszernél a befoglaló hálózatot a Thèvenin helyettesítő képpel írtuk le

3.3(f) FESZÜLTSÉGOSZTÓ TÉTEL



$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1$$

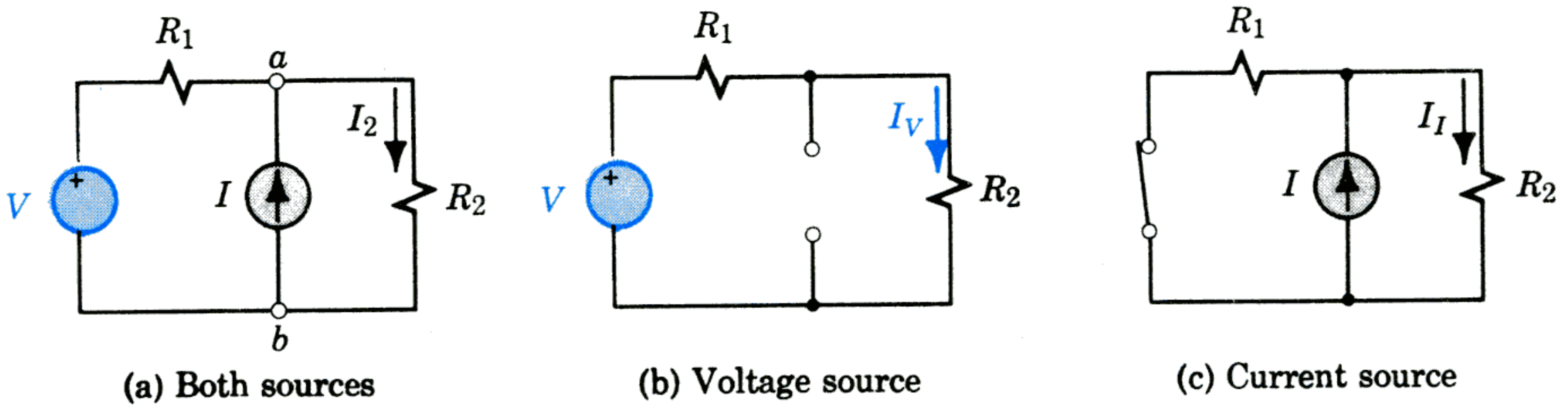
3.3(g) ÁRAMOSZTÓ TÉTEL



$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

3.3(h) SZUPERPOZICIÓ TÉTELE

- Kizárólagosan a lineáris áramkörökre és rendszerekre alkalmazható
- A több gerjesztés együttes hatására fellépő válaszjelet megkapjuk ha meghatározzuk az egyes gerjesztésekre külön-külön adott válaszokat, majd azokat összegezzük

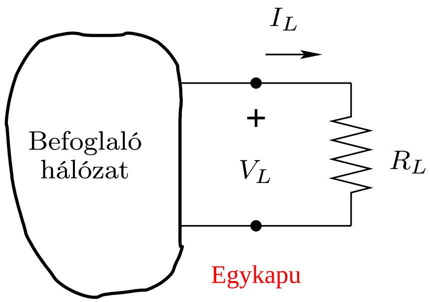


$$I_V = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad \text{és} \quad I_I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad \text{majd szuperpozicióval:} \quad I_2 = I_V + I_I = \frac{V + I\,R_1}{R_1 + R_2}$$

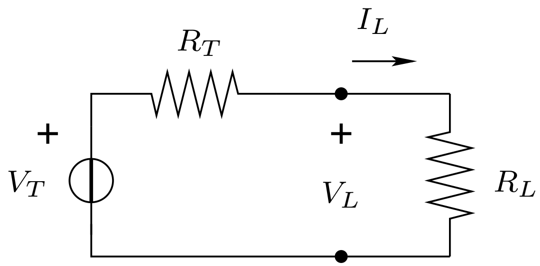
Figyelem: A generátorok **nem** eltávolítva lettek, hanem $I = 0$ ill. $V = 0$ behelyettesítésekkel a gerjesztéseket nullává tettük!!!

3.3(i) ILLESZTÉS: MAXIMÁLIS TELJESíTMÉNY KIVÉTELE

Terhelés egy tetszőleges hálózatban



Illesztés meghatározásának modellje



A generátorból kivett (azaz az R_L terhelésen eldisszipált) teljesítmény:

$$P_L = V_L I_L = \frac{V_L^2}{R_L} = \frac{R_L^2}{(R_T + R_L)^2} V_T^2 \frac{1}{R_L} = \frac{R_L}{(R_T + R_L)^2} V_T^2$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{(R_T + R_L)^2 - R_L 2(R_T + R_L)}{(R_T + R_L)^4} = 0$$

$$(R_T + R_L)^2 - 2(R_T + R_L)R_L = 0 \quad \text{ahol} \quad (R_T + R_L) \neq 0$$

Az illesztés (max. teljesítménykivétel) feltétele: $\boldsymbol{R_L = R_T}$

3.4. R-L-C áramkörök
A rendszerjellemző differenciál egyenlet megoldása

A Kirchhoff egyenletek alapján felírt rendszerjellemző differenciál egyenlet:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x$$

ahol $x(t)$ a gerjesztés és $y(t)$ a válaszjel

Vedd észre: Fizikai rendszerben **CSAK** valós jelek léphetnek fel!

A rendszerjellemző differenciál egyenlet tulajdonságai:

- Lineáris (szuperpozició alkalmazható)
- Állandó együtthatós
- Az egyetlet $\boldsymbol{n}$ rendűségét a független (össze nem vonható) energiatároló elemek száma adja meg

A

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x$$

differenciál egyenlet teljes megoldása két megoldás összegéből állítható elő:

1. **tranziens megoldás**
   A homogén differenciál egyenlet általános megoldása
   Karakterisztikus egyenlet, a rendszer stabilitását adja meg
   Csak az áramkörre jellemző válasz
2. **állandósult állapotbeli megoldás**
   Az inhomogén differenciál egyenlet egy partikuláris megoldása
   Esetek döntő többségében csak ezt a megoldást kell meghatározni, mivel az ún. bekapcsolási tranziens sokszor nem érdekes
   Egyaránt függ az áramkörtől és a gerjesztéstől

Teljes megoldás = Tranziens megoldás + Állandósult állapotbeli megoldás

Hogyan jön össze ez a differenciál egyenlet

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x$$

az eddig tanulmányozott egyenáramú (DC) áramkörökkel? Ott csak algebrai egyenletek voltak!

Eddig:

- csak DC gerjesztés: amiből következik, hogy $\frac{d^n}{dt^n} x(t) = 0$
- állandósult állapotú DC áramkör: amiből következik, hogy $\frac{d^n}{dt^n} y(t) = 0$

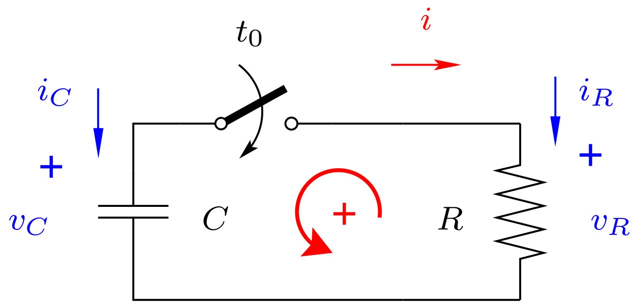
Behelyettesítve:

$$a_0 y = b_0 x$$

3.4(a) A TRANZIENS VÁLASZ MEGHATÁROZÁSA

(Matematikai megfogalmazással: A homogén differenciál egyenlet általános megoldása)

Elsőrendű (azaz egy energiatároló elemet tartalmazó) rendszer



ahol $t_0 = 0$

Kezdeti feltétel:

$$v_C(0-) = V_0$$

Kirchhoff hurokegyenlete alapján (óramutatóval ellentétes körüljárás), $t \geq 0$

$$\sum v = 0 = v_C - v_R = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau \; - R\, i_R = V_0 - \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)d\tau \; - Ri$$

Ahol:
- kondenzátorban tárolt energia: $w_C = C[v_C(0)]^2/2 = C\, V_0^2/2$
- kisbetű $\equiv$ időfüggvény, nagybetű $\equiv$ DC jel vagy komplex amplitúdó, azaz konstans

Rendszerjellemző differenciál egyenlet, $t \geq 0$

$$RC\frac{di}{dt} + i = 0$$

Az általános megoldás keresése $i = A\exp(st)$ alakban, mivel $\frac{di}{dt} = sA\exp(st)$

Az időállandó és a karakterisztikus (mert csak az áramkörre jellemző) egyenlet definiciója

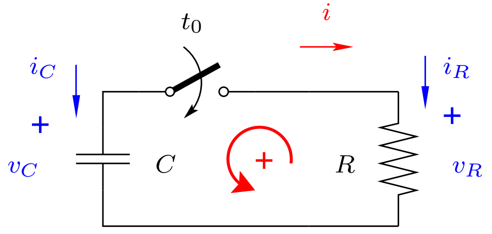
$$(\underbrace{RC}_{\text{időállandó}}\; s + 1)\underbrace{A\exp(st)}_{i} = \underbrace{(s\tau + 1)}_{\text{karakterisztikus egyenlet}} \quad i = 0 \quad \text{ahol} \quad i \neq 0$$

A tranziens megoldás a karakterisztikus egyenlet megoldásából adódik

$$s = -\frac{1}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad i = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Vedd észre, a **karakterisztikus egyenlet megoldása valós**, ami szükséges feltétele annak, hogy megoldásként egy **valós időfüggvényt** kapjunk

Az A konstans meghatározása a kezdeti feltételből



- Fizikai képből: $v_C(0-) = v_C(0+) = V_0 \implies i(0+) = \frac{v_C(0+)}{R}$
- Áramkörre felírt hurokegyenletből:

$$\sum v(0+) = 0 = v_C(0+) - v_R(0+) = V_0 - \frac{1}{C}\int_0^{0+} i(t)dt - Ri(0+)$$

$$i(0+) = \frac{v_C(0+)}{R} = \frac{V_0}{R} \equiv A$$

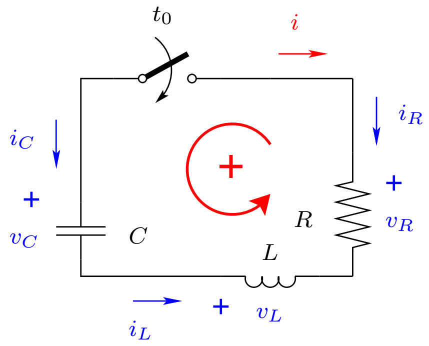
A tranziens (általános = minden kezdeti feltételre igaz) megoldása $t \geq 0$-ra

$$\boldsymbol{i = \frac{V_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \tag{1}$$

Fizikai jelentés: A kapcsoló zárása után az R ellenálláson keresztül exponenciálisan kisül a C kondenzátor töltése

Másodrendű (két, össze nem vonható energiatároló elem) rendszer

Rezgőkör, minden LC szűrő alapja



ahol $t_0 = 0$

Kezdeti feltételek:

$v_C(0-) = V_0$ és $i(0-) = 0$

Kirchhoff hurokegyenlete alapján (óramutatóval ellentétes körüljárás), $t \geq 0$

$$\sum v = v_C + v_L - v_R = 0$$

$$i = -i_C = -i_L = i_R \qquad \text{és} \qquad v_C = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_C \, d\tau, \quad v_L = L\frac{di_L}{dt}, \quad v_R = R\, i_R$$

$$\sum v = V_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i \, d\tau - L\frac{di}{dt} - Ri = 0$$

Rendszerjellemző differenciál egyenlet, $t \geq 0$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Az általános megoldás keresése $i = A\exp(st)$ alakban

$$\frac{di}{dt} = sA\exp(st) \quad \text{és} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} = s^2 A\exp(st)$$

A karakterisztikus (csak az áramkörre jellemző) egyenlet

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

A determinánstól függően, karakterisztikus egyenletnek két valós, vagy egy komplex konjugált gyökpár a megoldása

$$s_j = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{ahol j=1,2}$$

A tranziens (általános = minden kezdeti feltételre igaz) megoldás, $t \geq 0$

$$i = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t)$$

A lineáris rendszerekre vonatkozó, általános érvényű következtetések:

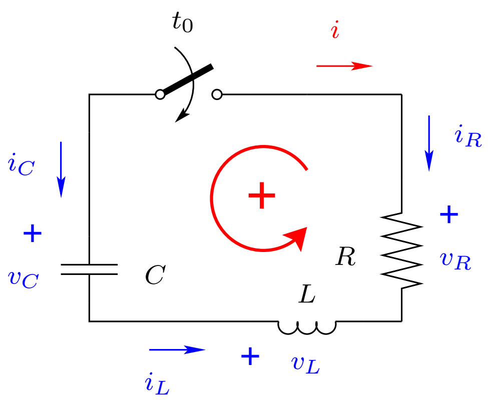
- A
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$
homogén egyenlet megoldása komplex exponenciálisok lineáris kombinációja
- A tranzienst meghatározó homogén egyenlet csak a rendszertől függ, ezért hívjuk karakterisztikus egyenletnek
- A karakterisztikus egyenlet megoldása valós gyököket vagy komplex konjugált gyökpárokat ad, ami szükséges feltétele annak, hogy megoldásként egy valós időfüggvényt kapjunk
- A karakterisztikus egyenlet megadja a rendszer stabilitását
(Vedd észre: Ha egy LTI rendszer stabilis, akkor aszimptotikusan stabilis)

A megoldásban

$$i = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t)$$

szereplő A_1 és A_2 konstansok meghatározása a kezdeti feltételekből megy végbe

Két ismeretlen, tehát két kezdeti feltétel kell



Feltétel #1:

$$i_L(0-) = 0 = i_L(0+) = -i(0+) \equiv -(A_1 + A_2) \qquad (1)$$

Feltétel #2: (Fizikai képből vagy az áramkörre felírt hurokegyenletből)

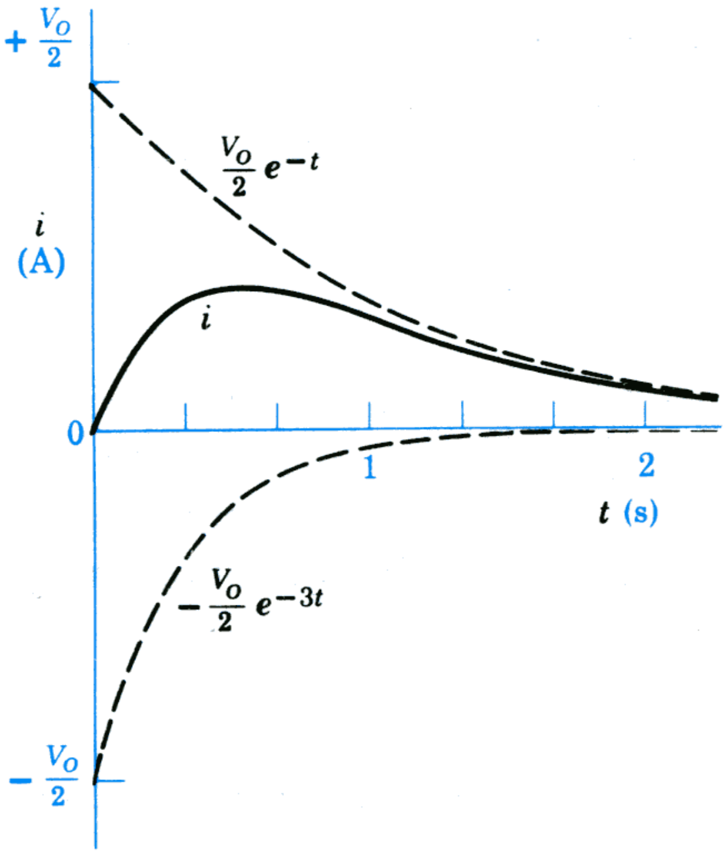
Hurokegyenlet alapján: Ha $i(0+) = 0$, akkor $v_R(0+) = 0$ és

$$v_C(0+) + v_L(0+) - v_R(0+) = V_0 - \frac{1}{C}\int_0^{0+} i\,dt - L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0+} = 0$$

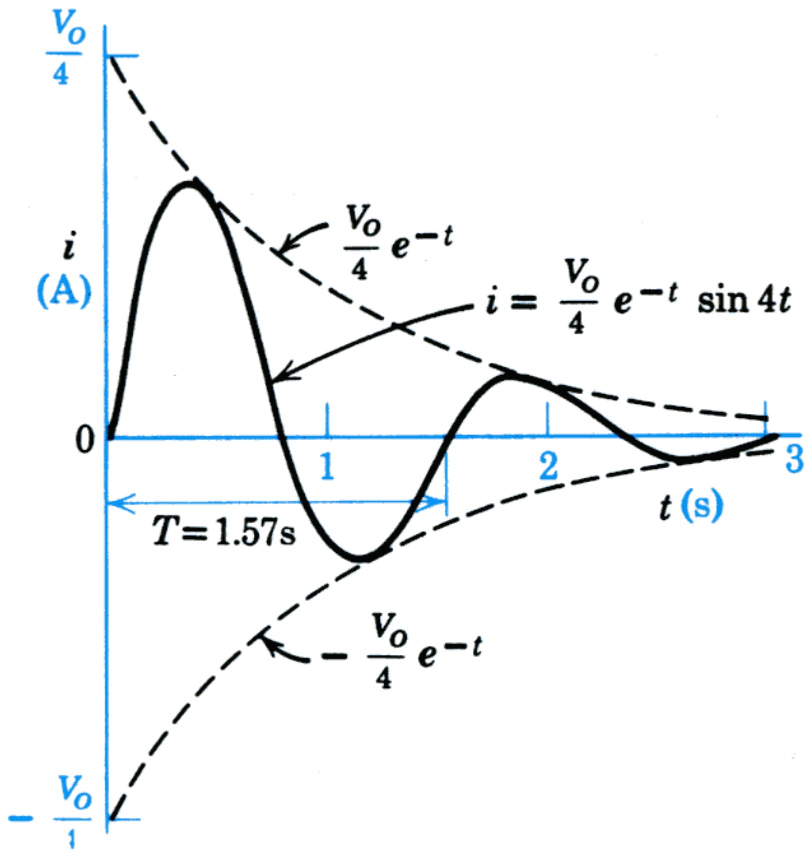
$$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0+} = \frac{V_0}{L} \equiv A_1 s_1 + A_2 s_2 \qquad (2)$$

A másodrendű rendszer tipikus tranziens megoldásai

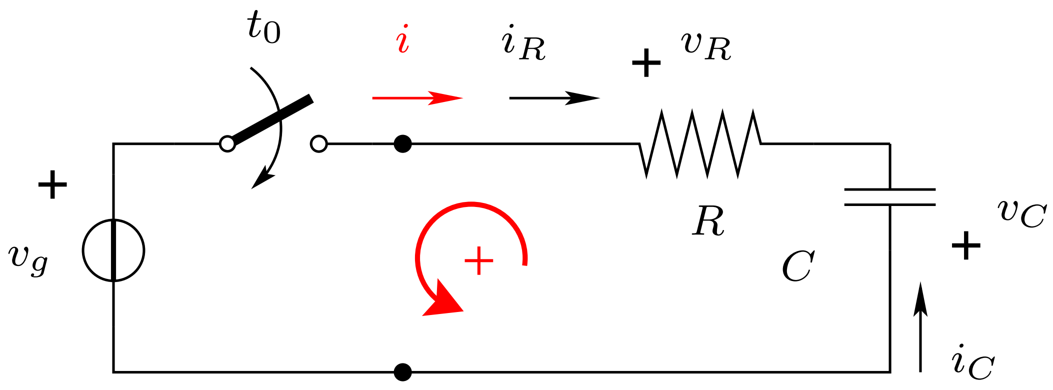
Két valós gyök esetén



Komplex konjugált gyökpár esetén



3.4(b) ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBELI VÁLASZ MEGHATÁROZÁSA



ahol $t_0 = 0$

Vedd észre:

Az áramkör tranziens válaszát már meghatároztuk a 3.4(a) pontban a $v_C(0-) = V_0$ kezdeti feltétel mellett

Kirchhoff hurokegyenlet (óramutatóval ellentétes körüljárás), $t \geq 0$

$$v_g + v_C - v_R = v_g + V_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - R\,i = 0$$

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dv_g}{dt}$$

Vedd észre: A tranziens meghatározásánál $v_g = 0$, de ez nem jelenti a feszültségforrás eltávolítását, csak a feszültség nullává tételét!!!

IMPEDANCIA KONCEPCIÓ

1. A megoldást formálisan az Ohm törvény

$$R = \frac{V}{I}$$

   alakjában keressük

2. Alkalmazott módszer:
   Korlátozzuk a gerjesztések osztályát

Megoldás az impedancia koncepcióval: A rendszerjellemző differenciál egyenlet

$$R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dv_g}{dt}$$

Korlátozuk a gerjesztést a komplex exponenciálisok osztályára: $\boxed{v_g = A_g \exp{(s_g t)}}$

Mivel az ún. (komplex) exponenciálisok a differenciál egyenlet sajátfüggvényei, a választ exponenciális függvény alakjában keressük:

$$i(t) = A_i \exp{(st)} \,|_{s=s_g} \quad\Longrightarrow\quad \frac{di}{dt} = s\,i\,|_{s=s_g}$$

A nagy újság: A differencia egyenlet helyett egy algebrai egyenletet kapunk

$$Rsi+\frac{1}{C}i = s\left(R+\frac{1}{sC}\right)\,i = sv_g$$

Amiből az impedancia az Ohm törvénnyel megegyező formában adódik

$$\frac{v_g}{i} = R+\frac{1}{sC} = Z(s)$$

Az adott gerjesztésre adott válasz meghatározása során az impedanciát a ***gerjesztés által meghatározott*** komplex frekvencián kell kiértékelni

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{v_g}}{\boldsymbol{Z(s)} \mid_{s=s_g}} = \frac{\boldsymbol{A_g} \exp\left(\boldsymbol{s_g t}\right)}{\left(\boldsymbol{R} + \frac{1}{\boldsymbol{sC}}\right) \mid_{s=s_g}} = \frac{\boldsymbol{s_g C}}{1 + \boldsymbol{s_g RC}} \boldsymbol{A_g} \exp\left(\boldsymbol{s_g t}\right) \tag{2}$$

Vedd észre:

- Mind a tranziens, mind az állandósul állapotbeli megoldás $A \exp(st)$ alakban adódik,

  DE !!!

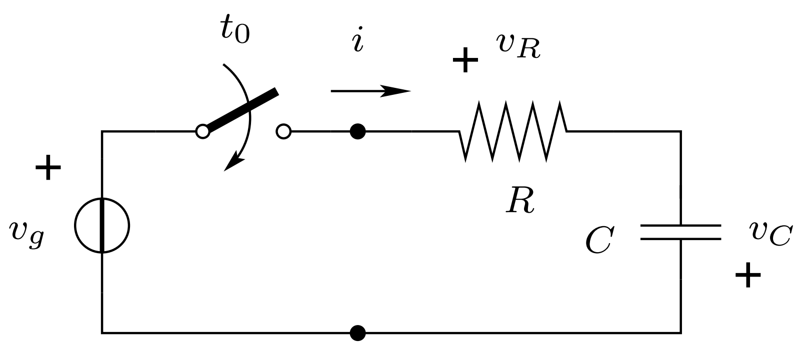
  – Tranziens esetén s értékét az áramkör, míg

  – Állandósult állapot esetén s értékét a gerjesztés határozza meg

- Megkaptunk, amit akartunk

$$Válasz \;\; = \;\; gerjesztés \;\; (/ \text{ vagy } \times) \;\; impedancia$$

3.4(c) A TELJES VÁLASZ MEGHATÁROZÁSA



Kezdeti feltétel: $v_C(0-) = V_0$

A teljes válasz a 22. oldalon (1) egyenlettel adott tranziens, és a 30. oldalon (2) egyenlettel leírt állandósult állapotbeli viselkedés összegeként adódik, $t \geq 0$:

$$\boldsymbol{i(t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \frac{s_g C}{1 + s_g RC} A_g \exp\left(s_g t\right)}$$

A kezdeti feltétel figyelembe vétele:

$$i(0+) = A + \frac{s_g C}{1 + s_g RC} A_g \equiv \frac{v_R(0+)}{R} = \frac{v_g(0+) + v_C(0+)}{R} = \frac{A_g + V_0}{R}$$

3.5. Az IMPEDANCIA koncepció

- A gerjesztés és válaszjel kapcsolatát megadó differenciál egyenlet

$$a_n \frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_m \frac{d^m i}{dt^m} + \cdots + b_0 i$$

- Vedd észre, az exponenciális függvények speciális tulajdonságát

$$f_{exp}(t) = A\exp(st) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^n f_{exp}(t)}{dt^n} = \frac{d^n A\exp(st)}{dt^n} = s^n f_{exp}(t)$$

- Az exponenciális függvények a differenciál egyenletek sajátfüggvényei
- A tranziens válasz mindig a komplex exponenciálisok lineáris kombinációjaként adódik
- Korlátozzuk a gerjesztéseket az exponenciális függvények, ill. az azokból előállítható függvények osztályára

Megjegyzések az impedancia koncepcióhoz:

- $s = \sigma + j\omega$ jelöli a *komplex frekvenciát*
- Mivel a lineáris áramkörökre érvényes a szuperpozició, az impedancia koncepció minden olyan gerjesztésre alkalmazható amely előállítható az exponenciális függvények *lineáris kombinációjaként*
- A $Z(s)$ impedancia a hálózatra jellemző mennyiség, azt teljesen leírja
- Ennélfogva a $Z(s)$ impedancia tartalmazza a hálózat tranziens válaszát
- Az állandósult állapotbeli viselkedés meghatározásához a $Z(s)$ impedanciát a gerjesztés által meghatározott, $\boldsymbol{s}$ komplex frekvencián kell elvégezni

Az impedancia felírása és alkalmazása

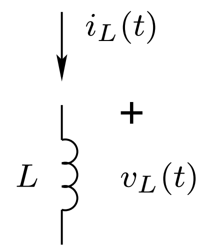
- Bevezetve az impedancia koncepciót az egyes áramköri elemekre
  - Ellenállás: $Z_R = \frac{v_R}{i_R} = R\ [\Omega]$
  - Induktivitás: $Z_L = \frac{v_L}{i_L} = sL\ [\Omega]$
  - Kapacitás: $Z_C = \frac{v_C}{i_C} = \frac{1}{sC}\ [\Omega]$
- az impedancia a kapcsolási rajzból közvetlenül felírható
- Az impedanciákkal formálisan ugyanúgy lehet és kell számolni, mint az ellenállásokkal egy DC hálózatban
- Ne feledd, az impedanciák csak exponenciális gerjesztés vagy azok lineáris kombinációja esetén alkalmazhatók
- Az impedancia az s komplex frekvencia *polinomja*
- Az impedancia az adott hálózatra jellemző függvény
- Az adott gerjesztésre adott válasz meghatározásánál az impedanciát a gerjesztés által meghatározott s komplex frekvencián kell kiértékelni

Példa az áramköri elemek impedanciájának levezetésére

1. lépés: Korlátozzuk a gerjesztést a valós exponenciális függvények osztályára

$$i(t) = Ae^{st}, \qquad \text{ahol } s \text{ valós szám}$$

2. lépés: Felírjuk az induktivitás egyenletét az időtartományban



$$v_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt}$$

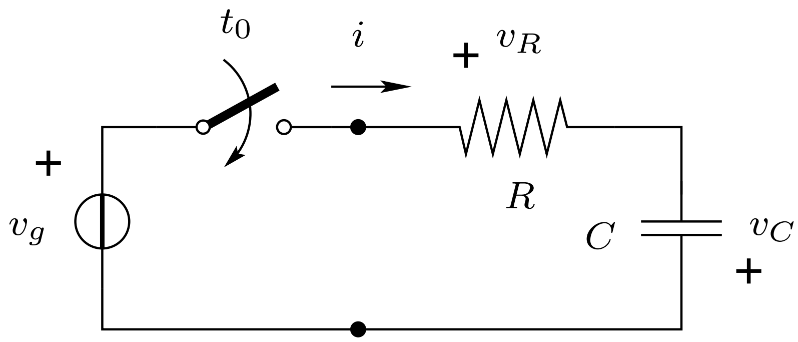
3. lépés: Az $i_L = i = Ae^{st}$ exponeciális gerjesztés mellett meghatározzuk v_L értékét

$$v_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} = L\,\frac{d\,i(t)}{dt} = L\,\frac{d}{dt}\left(Ae^{st}\right) = sL\left(Ae^{st}\right) = sL\,i_L(t)$$

4. lépés: Az induktivitás valós exponenciális függvény gerjesztésre érvényes impedanciája

$$Z_L(s) = \frac{v_L(t)}{i_L(t)} = sL$$

Impedancia koncepció alkalmazásának lépései



Lépések:

1. Vizsgálandó helyen kaput definiálunk vagy nyitunk (lásd fekete pontokat)
2. Adott kapura nézve felírjuk az impedancia függvényt

$$Z(s) = \frac{v_g}{i} = R + \frac{1}{sC} = \frac{1 + sRC}{sC} \quad [\Omega]$$

3. A tranziens válasz meghatározása az impedancia függvényből

$$\frac{v_g}{i} = Z(s) = \frac{Z^{[sz]}(s)}{Z^{[n]}(s)} = \frac{1 + sRC}{sC}$$

$$Z^{[sz]}(s)i = \underbrace{(1 + sRC)}_{karakterisztikus\ egyenlet} i \equiv Z^{[n]}(s)v_g = sCv_g$$

Tranziens válasz: $v_g = 0$ de $i \neq 0$

$$1 + sRC = 0 \quad \Longrightarrow \quad s = -\frac{1}{RC}$$

Vedd észre: Mivel $Z(s)$ hordozza a karakterisztikus egyenletet, belőle a (i) tranziens válasz és a (ii) hálózat stabilitása meghatározható

4. Az állandósult állapotbeli válasz meghatározása az impedancia függvényből

$$v_g \quad \Longrightarrow \quad s_g$$

$$i = \frac{v_g}{Z(s)\,|_{s=s_g}} = \frac{1}{Z(s)}\,|_{s=s_g}\, A \exp\left(s_g t\right)$$

5. A teljes válasz felírása

$$teljes \quad = \quad tranziens \quad + \quad \acute{a}lland\acute{o}sult$$

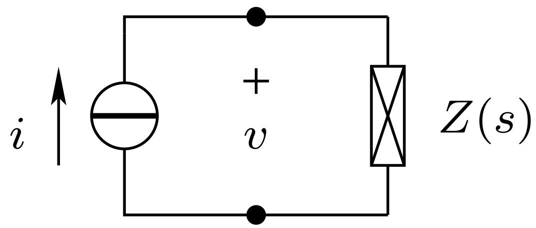
Stabilis hálózat esetén a tranziens (válasz) exponenciálisan eltűnik, azaz lecseng az idő függvényében

Az impedancia általános alakja

I. A gerjesztés és válaszjel kapcsolatát megadó differenciál egyenlet

$$a_n \frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_m \frac{d^m i}{dt^m} + \cdots + b_0 i$$

II. A gerjesztések korlátozása a (komplex) exponenciális függvények osztályára



Megengedett gerjesztések:

$$i(t) = A_i \exp(st) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^n i}{dt^n} = s^n i$$

$$a_n s^n v + a_{n-1} s^{n-1} v + \cdots + a_1 s v + a_0 v = \left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) v$$

$$= b_m s^m i + \cdots + b_0 i = (b_m s^m + \cdots + b_0)\, i$$

III. Formálisan az impedanciát az ohm törvény formájában írjuk fel

$$a_n s^n v + a_{n-1} s^{n-1} v + \cdots + a_1 s v + a_0 v = \left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) v$$

$$= b_m s^m i + \cdots + b_0 i = (b_m s^m + \cdots + b_0)\, i$$

Ohm törvény formátumának megfelelően átrendezve kapjuk

$$Z(s) = \frac{v}{i} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{\underbrace{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}_{\text{karakterisztikus egyenlet}}} = \frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$$

Vigyázz, kapcsolás függvénye, hogy a karakterisztikus egyenletet a számláló vagy a nevező hordozza!

Vedd észre: Mivel LTI hálózatról van szó

- a teszőleges gerjesztést (komplex) exponenciálisok lineáris kombinációjaként állítjuk elő, majd
- a szuperpozicó tételét alkalmazzuk

3.6. Állandósult állapotú, szinuszos gerjesztésű (ún. AC) hálózatok analízise

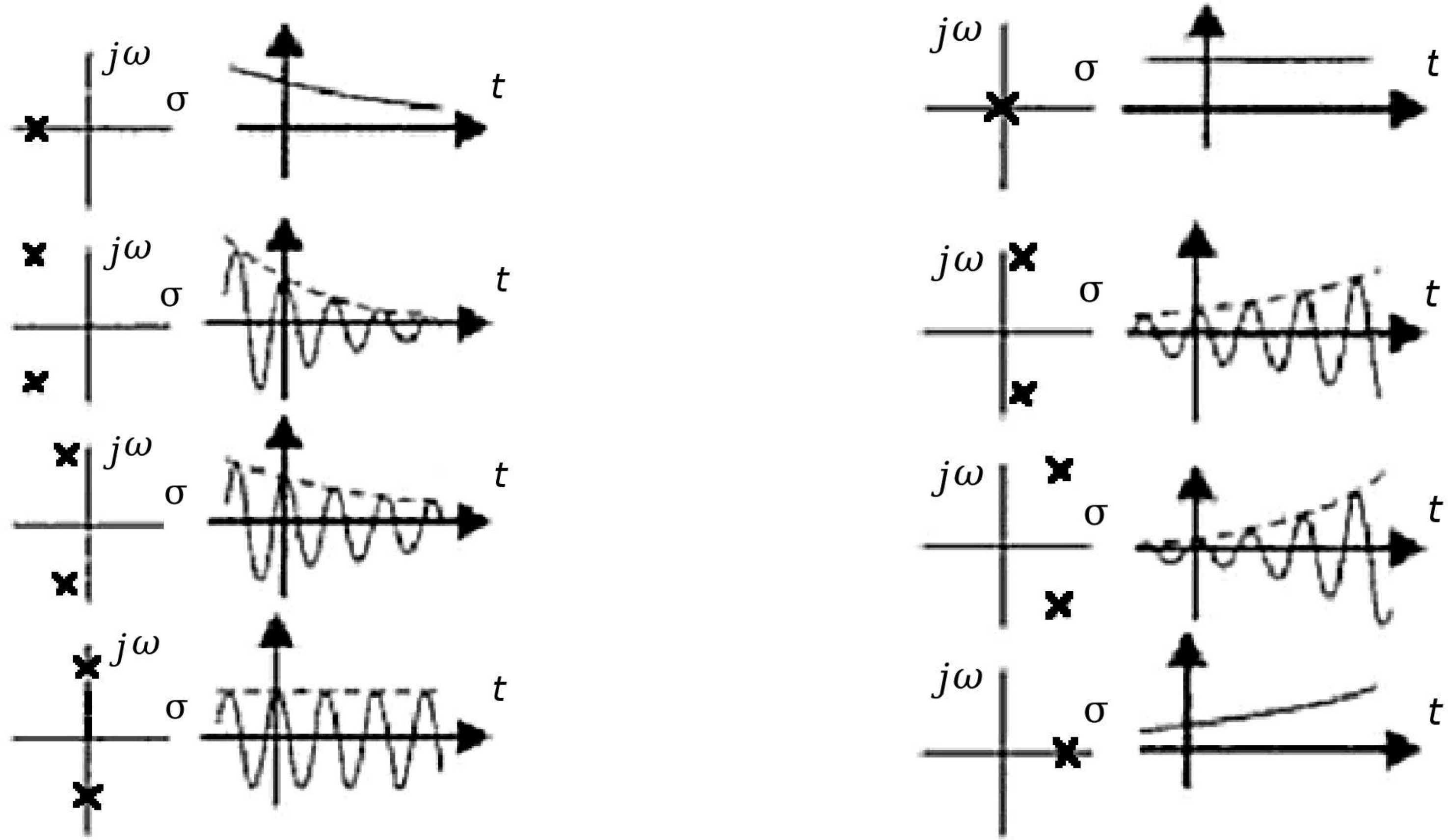
- A 3.5 pontban bevezetett impedancia koncepció kiterjeszthető tetszőleges, pl. komplex s-ekre is
- Egyetlen fizikai megkötés: Egy fizikai rendszerben csak valós jel léphet fel

Jelkészlet:
- $s \neq 0$ de valós: exponenciálisan csökkenő vagy növekvő jelalak
- $s = 0$: DC jel
- $s_1 = s_2^*$, azaz komplex konjugált: exponenciálisan csökkenő vagy növekvő amplitúdójú szinuszos jelalak
- $s_1 = j\omega$ és $s_2 = s_1^* = -j\omega$: állandó amplitúdójú szinuszos jelalak

És minden olyan jel, ami ezekből összetehető $\Longrightarrow$ lásd szuperpozició

Jelek az $s = \sigma + j\omega$ komplex frekvencia és a t időtartományban

s-tartomány időtartomány s-tartomány időtartomány



Az állandósult állapotú, szinuszos gerjesztésű hálózatok különös jelentőséggel bínak, mert

- sok rendszer ilyen
- a szinuszos mérőjelek könnyen generálhatók
- áramkör tranziens viselkedése sokszor nem érdekes
- bármiféle jel összerakható szinuszos jelekből:
  - periódikus jel: Fourier sor
  - tetszőleges jel: Fourier transzformáció

Lineáris hálózatok tulajdonságai:

- Szuperpozició tétele érvényes, tehát egy szinusz előállítható $s = \pm j\omega$ komplex frekvenciákból
- Így a szinuszos jelek is sajátfüggvények, azaz állandósult állapotban a színuszos jelalak megőrződik
- Konzervatívok a szinuszos gerjesztésekre nézve (nem hoznak létre új frekvenciákat)

Az állandósult állapotú, szinuszos gerjesztésű hálózatok analízisének eszközei

- A számításokat egy transzformált tartományban, a komplex amplitúdók tartományában végezzük el
- Valamennyi (szinuszos) jelet a jelhez rendelt komplex amplitúdóval helyettesítünk
- Valamennyi áramköri elemet annak AC impedanciájával jellemezzünk
- Impedancia csak egy van, az impedancia ω függvénye. Kiértékelni az impedanciát az adott gerjesztő frekvencián kell
- Utána a komplex amplitúdókkal és AC impedanciákkal formálisan mint egy DC áramkörökkel számolunk
- Az eredményül kapott komplex amplitúdókból visszatérünk az időtartományba

Jó hír: Differenciál egyenlet helyett **algebrai egyenletet** kell megoldani

Rossz hír: Az ár amit fizetni kell az az, hogy **komplex mennyiségekkel kell számolni**

3.6(a) A komplex amplitúdó definiciója

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) = \Re\left\{ \underbrace{[V_{eff} \exp(j\theta)]}_{\text{komplex amplitúdó}} \left[\sqrt{2} \exp(j\omega t)\right] \right\}$$

ahol az effektív érték $V_{eff} = V_m / \sqrt{2}$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta) = \Re\left\{ \underbrace{[I_{eff} \exp(j\theta)]}_{\text{komplex amplitúdó}} \left[\sqrt{2} \exp(j\omega t)\right] \right\}$$

Az ok amiért a gerjesztő frekvencia(ák) a számítás során a komplex amplítúdóban nem jelennek meg:

- Egy lineáris hálózat konzervatív a gerjesztő frekvenciákra nézve, a gerjesztő frekvencia(ák) nem hordoz(nak) információt

3.6(b) Az AC impedancia

- Az egyes áramköri elemek impedanciája
  - Ellenállás: $\boldsymbol{Z_R = \frac{V_R}{I_R} = R}$ $[\Omega]$
  - Induktivitás: $\boldsymbol{Z_L = \frac{V_L}{I_L} = j\omega L}$ $[\Omega]$
  - Kapacitás: $\boldsymbol{Z_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C}}$ $[\Omega]$
- Az impedancia a kapcsolási rajzból közvetlenül felírható
- Az impedanciákkal formálisan mint az ellenállásokkal egy DC hálózatban lehet és kell számolni
- Az AC impedancia az $\boldsymbol{s}$ tartományban felírt impedanciából formálisan az $\boldsymbol{s = j\omega}$ behelyettesítéssel megkapható

$$\boldsymbol{Z(j\omega) = Z(s) \mid_{s=j\omega}}$$

- Az impedanciafüggvény a hálózatot teljesen jellemzi, azt kiértékelni mindig az adott gerjesztő frekvencián kell

Az AC impedancia és admittancia definiciója

Az **AC impedanciá**t a feszültséghez és áramhoz rendelt komplex amplitúdók hányadosaként definiáljuk (lásd Ohm törvény)

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = |Z|\angle\boldsymbol{\theta_Z} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{X}$$

ahol $\boldsymbol{Z}$ = impedancia, $\boldsymbol{R}$ = ellenállás, $\boldsymbol{X}$ = reaktancia

AC admittancia definiciója

$$\boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{Z}} = |Y|\angle\boldsymbol{\theta_Y} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{B}$$

ahol $\boldsymbol{Y}$ = admittancia, $\boldsymbol{G}$ = vezetés, $\boldsymbol{B}$ = szuszceptancia

A komplex amplitúdók és AC impedanciák/admittanciák használata:

- Az impedanciákkal/admittanciákkal formálisan úgy kell számolni mint az ellenállásokkal/vezetésekkel egy DC hálózatban
- Vigyázz, minden komplex (impedancia/admittancia és komplex amplitúdó is)
- Valamennyi áramköri törvény és a 3.3(a)–3.3(h) pontokban felsorolt hálózati tételek igazak a komplex amplitúdókra és impedanciákra/admittanciákra
- A 3.3(i) tétel kiterjesztendő az impedanciákra: Az illesztés feltétele a komplex konjugált lezárás, azaz $\boldsymbol{Z_L} = \boldsymbol{Z_T^*}$
- Az impedancia-/admittanciafüggvények a hálózatot teljesen jellemző függvények, értéküket mindig az adott gerjesztő frekvencián kell meghatározni
- Eltérő frekvenciás gerjesztések esetén szuperpozíciót kell alkalmazni az időtartományban

Vedd észre:

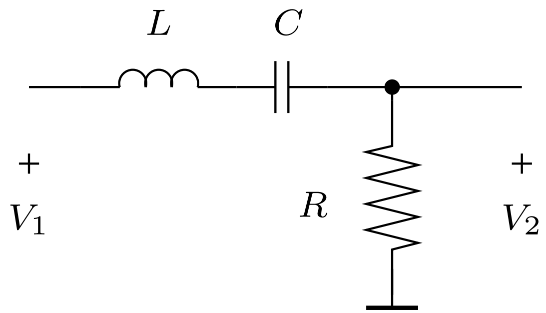
- Azáltal, hogy a jelekhez egy komplex amplitúdót rendeltünk
  Azaz átmentünk egy transzformált tartományba
- Elértük amit akartunk, hiszen a kapcsolási rajzból az impedanciák/admittanciák segítségével algebrai egyenletek alakjában fel tudjuk írni a keresett válasz komplex amplitúdóját
- Amiből a választ az időtartományban inverz transzformációval kapjuk meg
- Jó hír: Differenciál egyenlettel sehol sem találkozunk!!!

Áramkör $\Longrightarrow$ Egyszerűsített áramkör		
		$\Downarrow$
Időtartomány		**Transzformált-tartomány**
Válaszjel az időtartományban	$\Longleftarrow$ Inverz transzformáció	$\Downarrow$ Transzformált rendszer • Komplex amplitúdók • Impedanciák $\downarrow$ $\boxed{\text{Algebrai egyenlet}}$ $\downarrow$ Megoldás a transzformált tartományban: Válaszjel komplex amplitúdója

Vedd észre:
- Differenciál egyenlettel sehol sem találkozunk!!!
- Gerjesztéseket a színuszos (saját) függvényének osztályára korlátoztuk

3.6(c) Frekvenciaválasz-függvény

Egy másodrendű sáváteresztő szűrő kapcsolási rajza



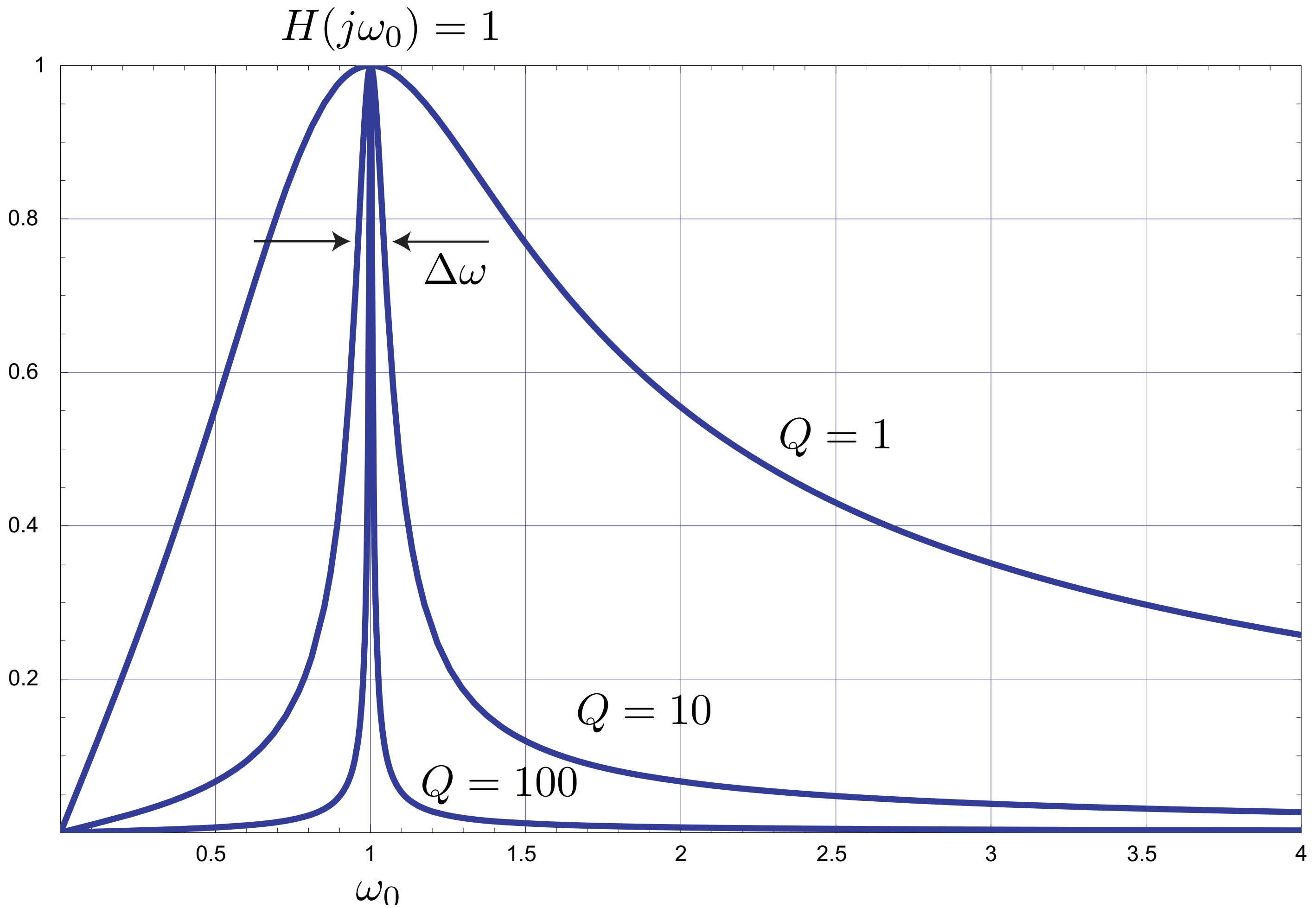
Frekvenciaválasz-függvénye

$$\boldsymbol{H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega\frac{R}{L}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\omega\frac{R}{L}} = \frac{j\omega\frac{R}{L}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\frac{R}{L}}}$$

Ez egy ún. rezgőkör, amelynek paraméterei:

- Rezonanciafrekvencia: $\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$
- Jósági tényező: $\boldsymbol{Q = \frac{\omega_0 L}{R}}$
- Sávszélesség (félteljesítményű pontok között): $\boldsymbol{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$

A frekvenciaválasz-függvény ábrázolása

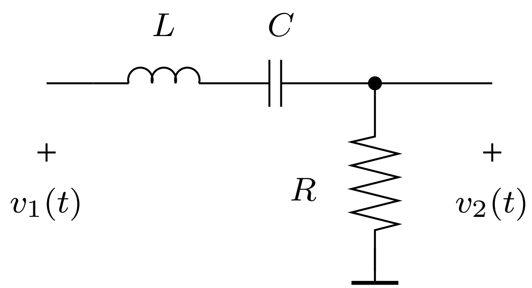


Összefoglaló: Állandósult állapotú AC áramkörök analízise

Áramkör $\Longrightarrow$ Egyszerűsített áramkör		
		$\Downarrow$
Időtartomány		**Transzformált tartomány**
		$\Downarrow$ Transzformált rendszer $\Downarrow$ Impedanciák és transzfer függvények $j\omega$-ban $+$
Gerjesztés az időtartományban	$\Longrightarrow$ Transzformáció	Komplex amplitúdók
		$=$
Válaszjel az időtartományban	$\Longleftarrow$ Inverz transzformáció	Megoldás a transzformált tartományban: Válaszjel komplex amplitúdója

Az analízis lépései

(1) A feladat:



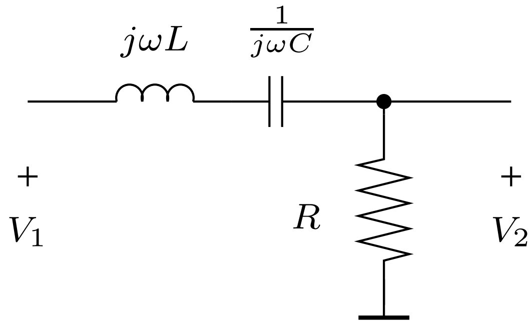
Gerjesztés: $\boldsymbol{v_1(t) = A\cos(\omega_g t + \theta_g)}$

Kérdés: $\boldsymbol{v_2(t) = ?}$

(2) Transzformáció a komplex amplitúdók tartományába

$$\boldsymbol{v_1(t) = A\cos(\omega_g t + \theta_g) \quad \Longrightarrow \quad V_1 = \frac{A}{\sqrt{2}}\exp(j\theta_g)}$$

(3) A frekvenciaválasz- (vagy impedancia) függvény felírása a $j\omega$ tartományban:



$$\boldsymbol{H_{21}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R}}$$

(4) A válaszjel komplex amplitúdója

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V_2} &= \boldsymbol{H_{21}(j\omega)}\Big|_{\omega=\omega_g} \boldsymbol{V_1} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R}}\Bigg|_{\omega=\omega_g} \boldsymbol{V_1} \\ &= \frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{2}} |\boldsymbol{H_{21}(j\omega_g)}| \exp\left(\boldsymbol{j}\left[\boldsymbol{\theta_g} + \angle \boldsymbol{H_{21}(j\omega_g)}\right]\right) \end{aligned}$$

(5) Inverz transzformáció: A válaszjel az időtartományban

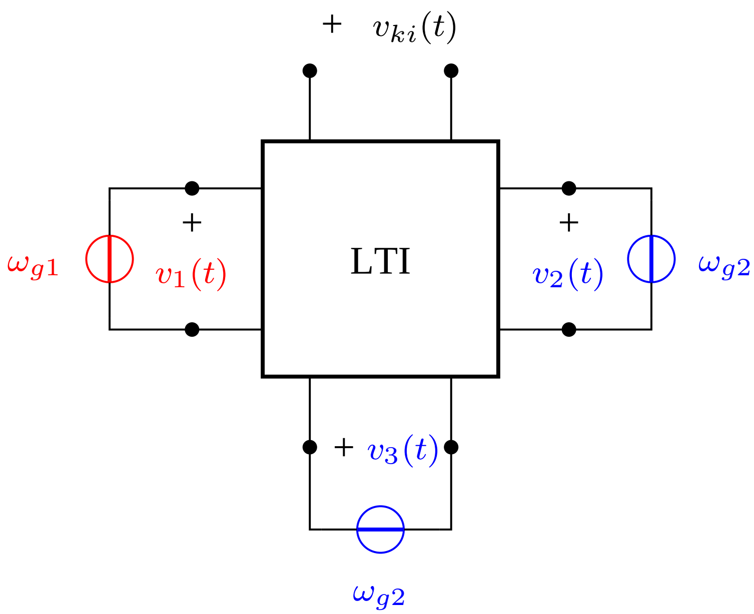
$$\boldsymbol{v_2(t) = |H_{21}(j\omega_g)|\, A \cos\left[\omega t + \theta_g + \angle H_{21}(j\omega_g)\right]}$$

Szuperpozició: Hol alkalmazzuk?

Idő és/vagy a **komplex amplitúdó**k tartományában?

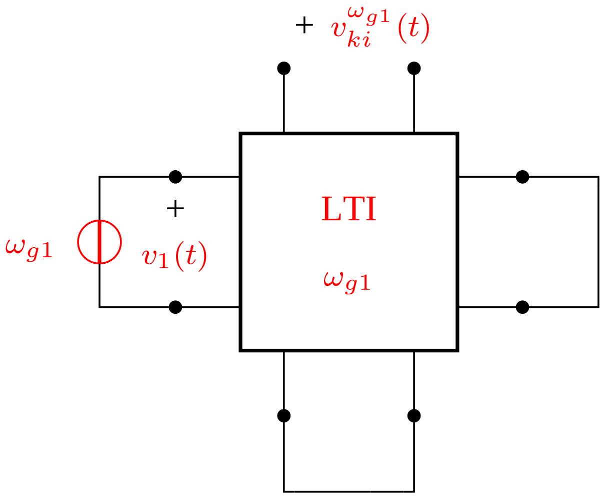
Esetleg mindkét helyen? Akkor hogyan?

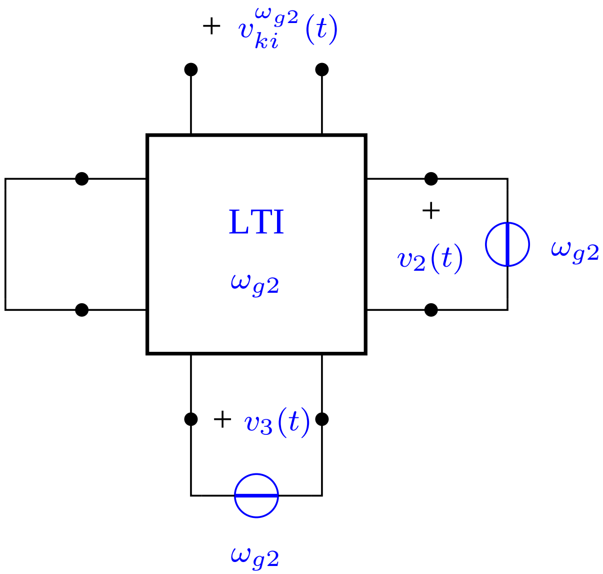
(1) A feladat



(2) Szuperpozició az időtartományban

- Probléma: Komplex amplitúdók **csak egy** gerjesztő frekvenciára írhatók fel
- Viszont LTI rendszer, tehát a szuperpozició alkalmazható az **időtartományban**

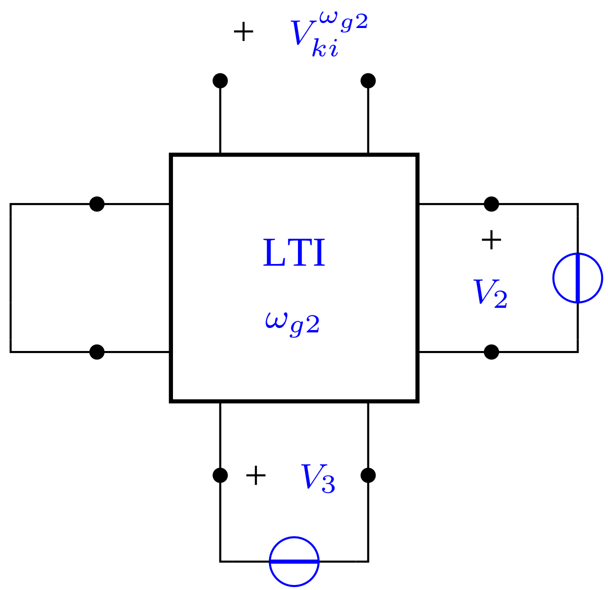




$$\boldsymbol{v_{ki}(t) = v_{ki}^{\omega_{g1}}(t) + v_{ki}^{\omega_{g2}}(t)}$$

(3) $v_{ki}^{\omega_{g2}}(t)$ feszültség meghatározása a komplex amplitúdók tartományában

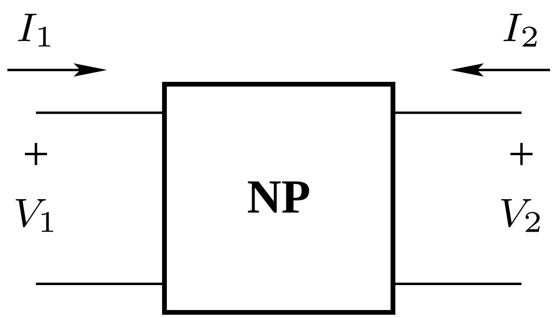
- Mivel $v_2(t)$ és $v_3(t)$ gerjesztések frekvenciája azonos, minden módszer használható:
  komplex amplitúdókra vonatkoztatott szuperpozició, Kirchhoff törvények, hurokáramok és csomóponti potenciálok módszere, hálózatokra kidolgozott tételek, stb



Vedd észre, **ebben** az ábrában **csak komplex amplitúdók** szerepelnek!

3.6(d) Négypólus paraméterek

Lineáris négypólus (NP) jellemzése az impedancia mátrix segítségével



A komplex amplitúdok közti kapcsolat

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V_1} &= \boldsymbol{Z_{11} I_1} + \boldsymbol{Z_{12} I_2} \\ \boldsymbol{V_2} &= \boldsymbol{Z_{21} I_1} + \boldsymbol{Z_{22} I_2} \end{aligned}$$

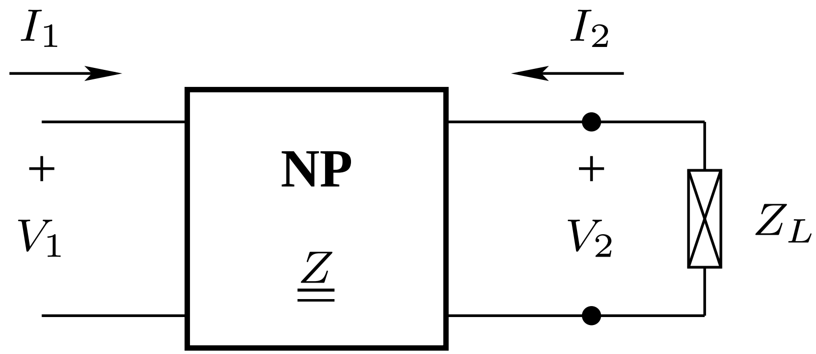
ahol az **impedancia mátrix** $[\,\underline{\underline{Z}}\,]$ **:**

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{V_1} \\ \boldsymbol{V_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z_{11}} & \boldsymbol{Z_{12}} \\ \boldsymbol{Z_{21}} & \boldsymbol{Z_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I_1} \\ \boldsymbol{I_2} \end{pmatrix}$$

Az impedancia paraméterek meghatározása

$$\boldsymbol{Z_{11}} = \frac{\boldsymbol{V_1}}{\boldsymbol{I_1}}\Big|_{\boldsymbol{I_2}=0}, \quad \boldsymbol{Z_{12}} = \frac{\boldsymbol{V_1}}{\boldsymbol{I_2}}\Big|_{\boldsymbol{I_1}=0}, \quad \boldsymbol{Z_{21}} = \frac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{I_1}}\Big|_{\boldsymbol{I_2}=0} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{Z_{22}} = \frac{\boldsymbol{V_2}}{\boldsymbol{I_2}}\Big|_{\boldsymbol{I_1}=0}$$

Lezárt NP paraméterei



Adott lezáráshoz tartozó bemeneti impedancia

$$\boldsymbol{Z}_{be} \mid_{Z_L} = \frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{I}_1} \mid_{Z_L} = \boldsymbol{Z}_{11} - \frac{\boldsymbol{Z}_{12}\boldsymbol{Z}_{21}}{\boldsymbol{Z}_{22} + \boldsymbol{Z}_L}$$

Adott lezáráshoz tartozó frekvenciaválasz-függvény (feszültség erősítés)

$$\boldsymbol{A}_v \mid_{Z_L} = \frac{\boldsymbol{V}_2}{\boldsymbol{V}_1} \mid_{Z_L} = \frac{\boldsymbol{Z}_{12}\boldsymbol{Z}_L}{\boldsymbol{Z}_{11}\boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{Z}_{11}\boldsymbol{Z}_{22} - \boldsymbol{Z}_{12}\boldsymbol{Z}_{21}}$$