

Matematikai Analízis III.

Gyakorló feladatok

2016. december

Variációszámítás

- V1. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I_1(\phi) = \iint_D |\text{grad } \phi(x, y)|^2 dx, y).$$

- V2. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I_2(\phi) = \iint_D (\phi'_x(x, y) + \phi'_y(x, y)) dx, y).$$

Differenciálgeometria, sokaságok

- S1. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ az origón és az $(1, 2, 3)$ ponton átmenő egyenes.

- (a) Igazoljuk, hogy ez egy egydimenziós sokaság. Adjuk meg explicit és implicit paraméterezését is.
- (b) Adott M -ben egy pont, $p = (-1, -2, -3)$. Adja meg a T_p érintőtér és az N_p normáltér bázisvektorait.

- S2. Legyen adott

$$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

- (a) Igazoljuk, hogy ez egy kétdimenziós sokaság. Adjuk meg explicit és implicit paraméterezését is.
- (b) Adott M -ben egy pont, $p = (1, 0, 0)$. Adja meg a T_p érintőtér és az N_p normáltér bázisvektorait.

- S3. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ térbeli halmaz az (x, y) síkban fekvő egységkör.

- (a) Igazoljuk, hogy ez egy-dimenziós sokaság. Adjuk meg explicit és implicit paraméterezését is.
- (b) Adott M -ben egy pont, $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Adja meg a T_p érintőtér és az N_p normáltér bázisvektorait.
- S4. Igazolja, hogy a valós projektív sík $(\mathbb{R}^2 / \sim)$ egy-dimenziós sokaság.

Differenciálgeometria, formák

F1. Adott két 1-forma $\mathbb{R}^2$ -ben. $\omega, \tau \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^2)$, melyeket így jelölünk:

$$\omega = v_1 dx + v_2 dy, \quad \tau = w_1 dx + w_2 dy, \quad v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}.$$

Ezek külső szorzata egy 2-forma: $\omega \wedge \tau = c dx \wedge dy$.

- (a) Mennyi c ?
- (b) Mi köze van c -nek a $v = (v_1, v_2)$ és $w = (w_1, w_2)$ vektorokhoz?

F2. Legyenek adottak $\mathbb{R}^3$ -ban az

$$\alpha = yz dx + xz dy + xy dz, \quad \beta = z \sin(xy) dx \wedge dy$$

differenciálformák. Számoljuk ki az $\alpha \wedge \beta$, $d\alpha$, $d\beta$ formákat!

F3. Igazolja a Poincaré lemmát arra a speciális esetre, amikor

$$\omega = f(x, y, z).$$

F4. Az ω differenciál 1-forma *egzakt*, ha $d\omega = 0$. Igazolja, hogy az alábbi forma egzakt:

$$\omega = z dx - z dy + (x - y) dz.$$

Milyen τ -ra teljesül, hogy $\omega = d\tau$?

F5. Tekintsük az alábbi formákat $\mathbb{R}^3$ -ban:

$$\omega = y^2 dx + \cos(x + z) dz \quad \tau = (x - z) dx \wedge dy$$

Határozza meg:

$$d\omega = ? \quad d\tau = ? \quad \tau \wedge \omega = ?$$

F6. Tekintsük az alábbi formákat $\mathbb{R}^3$ -ban:

$$\begin{aligned}\omega &= x^2 dx + 2xy dy + (x+z) dz \\ \tau &= (x+y+2z) dx \wedge dy\end{aligned}$$

Határozza meg: $d\omega = ?$ $d\tau = ?$ $\tau \wedge \omega = ?$

F7. Adott két 1-forma $\mathbb{R}^2$ -ben. ω és $\tau \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^2)$, melyeket így jelölünk:

$$\omega = v_1 dx + v_2 dy, \quad \tau = w_1 dx + w_2 dy, \quad v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}.$$

Ezek külső szorzata egy 2-forma: $\omega \wedge \tau = c dx \wedge dy$.

(a) Mennyi c ?

(b) Mi köze van c -nek a $v = (v_1, v_2)$ és $w = (w_1, w_2)$ vektorokhoz?

Differenciálgeometria, integrálás sokaságokon

I1. Legyen $\mathbb{R}^n$ -ben egy differenciál 1-forma

$$\omega = \sum_{k=1}^n f_k(x) dx_k, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ 1 dimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált:

$$\int_M \omega = ?$$

I2. Legyen $\mathbb{R}^3$ -ban egy differenciál 2-forma $\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ az egységgömb felszínének az a fele, melyben a harmadik koordináta pozitív:

$$M = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0 \}.$$

Számoljuk ki a sokaságon vett integrált:

$$\int_M \omega = ?$$

I3. Fogalmazzuk meg az absztrakt Stokes tételt, ha $n = 2$ és $k = 2$. Melyik klasszikus tételt kapjuk?

Parciális differenciálegyenletek, transzport egyenlet

T1. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport-egyenletet

$$u'_t + u'_x = 0, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad u(x, 0) = e^x.$$

T2. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport-egyenletet

$$u'_t + u'_x = x - t, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad u(x, 0) = e^x.$$

T3. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport-egyenletet

$$u'_t + 2u'_x = x^2 + 4tx, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad u(x, 0) = 0.$$

T4. Oldjuk meg az elsőrendű transzport-egyenletet!

$$u'_t + 2u'_x = x \cos(t), \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad u(x, 0) = e^x.$$

Parciális differenciálegyenletek, Laplace egyenlet

L1. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását:

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

az alábbi peremfeltételekkel:

$$u(0, y) = 0$$

$$u(1, y) = 0$$

$$u(x, 1) = 0$$

$$u(x, 0) = 1$$

L2. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0, 1) \times (0, 1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$u(0, y) = 0$$

$$u(1, y) = 0$$

$$u(x, 1) = \sin(2\pi x)$$

$$u(x, 0) = 1$$

L3. Legyen $\Omega = \{(x, y) : x, y > 0\}$, – tehát egy síknegyed. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

$$u(0, y) = \sin(y), \quad y > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad \forall y \geq 0.$$

L4. Legyen $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y > 0\}$. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & \forall y > 0 \\ u(\pi, y) &= 0, & \forall y > 0 \\ u(x, 0) &= \sin(2x), & 0 < x < \pi \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) &= 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

L5. Legyen $\Omega = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < \pi\}$. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} u'_y(x, 0) &= 0, & \forall x > 0 \\ u'_y(x, \pi) &= 0, & \forall x > 0 \\ u(0, y) &= \cos(2y), & 0 < y < \pi \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) &= 0 & 0 \leq y \leq \pi \end{aligned}$$