

Matematikai Analízis III.

Gyakorló feladatok az 1. Zh-hoz

2017. október

Vektoranalízis

V1. Legyenek $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ és $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvények, valamint $c \in \mathbb{R}^3$. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási" szabályokat:

1. $\text{grad}(c^T F) = c^T (DF)$.
2. $\text{div}(f F) = \langle F, \nabla f \rangle + \text{div}(F) f$.

V2. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\text{div grad } f = \Delta f,$$

ahol Δ a Laplace operátor.

F1. Számolja ki az alábbi felületi integrált:

$$\iint_S F(x, y, z) \, d\mathbf{S},$$

ahol $F(x, y, z) = (x, y, z)$ és S az a felület, melyet alulról az $z = x^2 + y^2$ paraboloid, felülről a $z = 1$ sík határol. Az $\underline{n}$ normálvektor mutasson mindig felfelé. Magyarázza meg geometriailag, hogy miért lesz negatív a kapott érték.

F2. Számolja ki az alábbi felületi integrált:

$$\iint_S F(x, y, z) \, d\mathbf{S},$$

ahol $F(x, y, z) = (0, 0, z)$ és S az a felület, melyet alulról az $z^2 = x^2 + y^2$ kúp, felülről a $z = 1$ sík határol.

F3. Legyen $F(x, y) = (2y, x)$. Határozza meg ennek vonalintegrálját az origó körüli egységkör mentén valamelyik módon:

1. közvetlenül, vagy
2. a Green tétel segítségével kettős integrálként.

F4. Lássuk be, hogy az $F(x, y, z) = (x, y, z)$ vektormező fluxusa bármely S sima zárt felületre megegyezik a közrezárt térfogat 3-szorosával.

S1. Igazolja a Stokes tételt a következő esetben: M az egység sugarú gömb $x > 0$ félsíkba eső félgömbjének felülete, ∂M ennek határa, és $F(x, y, z) = (x, -z, y)$.

S2. Igazolja a Stokes tételt abban az esetben, ha S az origó középső egységkörnek az a fele, melyben $y \geq 0$. $\underline{n}$ az y tengely pozitív részével hegyesszöget zár be, és $F(x, y, z) = (y, 2x, x)$.

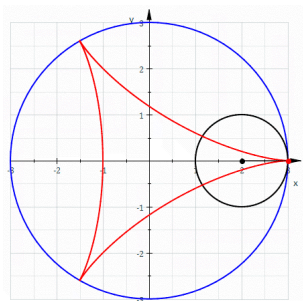
- S3. Mondja ki és igazolja a Stokes tételt abban az esetben, ha $F(x, y, z) = (y, z, x)$ és S az $x + y + z = 0$ sík azon darabja, melyet az $x^2 + y^2 = 1$ henger metsz ki belőle (ellipszis).
- S4. Igazolja a Stokes tételt a következő esetben: M az egység sugarú gömb felső félgömbjének felülete ("gömbhéj"), ∂M ennek határa, és

$$H(x, y, z) = (x, z, y) \quad \text{ill.} \quad G(x, y, z) = (y, z, x)$$

- S6. Határozza meg az $F(x, y, z) = zy\mathbf{k}$ vektormező fluxusát a ∂M felületre nézve, ha ∂M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabjának a felszíne, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ síkban van.

- G1. A Green tétel segítségével számolja ki egy deltoid területét:

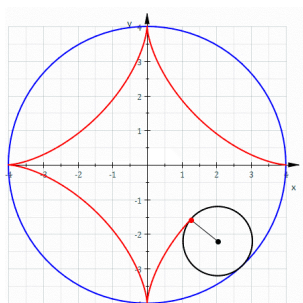
$$x(t) = 2a \cos(t) + a \cos(2t), \quad y(t) = 2a \sin(t) - a \sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi]$$



- G2. A Green tétel segítségével határozza meg egy asztroid által közrezárt területet. Ennek egyenlete:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1, \quad t \in [0, 2\pi],$$

lehetséges paraméterezése: $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (Ism: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.)



- G3. Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ egy általános helyzetű négyzet, melynek határa $C = \partial R$. Igazolja, hogy az alábbi integrál értéke csak a négyzet nagyságától függ, és független annak elhelyezkedésétől:

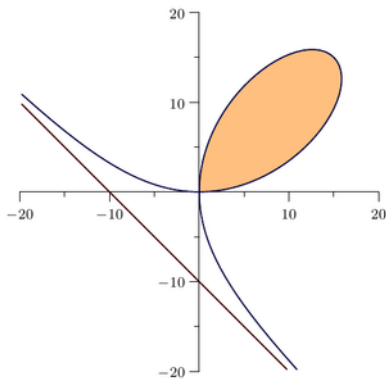
$$\oint_C xy^2 dx + (x^2y + 2x)dy$$

- G4. A Green tétel segítségével határozza meg egy Descartes levél területét. A levél körvonalának egyenlete:

$$x^3 + y^3 = 3xy, \quad x, y \geq 0.$$

Paraméterezése:

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t \in [0, \infty).$$



(Javaslat: A számolás során használjuk ki, hogy $y = tx$.)

Differenciálgeometria

- M1. Igazolja, hogy

$$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

kétdimenziós sokaság. Adjon meg egy lehetséges térképgyűjteményt és paraméterezést.

- M2. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ az origón és az $(1, 2, 3)$ ponton átmenő egyenes.

1. Igazoljuk, hogy ez egy egydimenziós sokaság. Adjuk meg explicit és implicit paraméterezését is.
2. Adott M -ben egy pont, $p = (-1, -2, -3)$. Adja meg a T_p érintőtér és az N_p normáltér bázisvektorait.

- M3. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ az (x, y) síkban fekvő egységkör.

1. Igazoljuk, hogy ez egy kétdimenziós sokaság. Adjuk meg explicit és implicit paraméterezését is.
2. Adott M -ben egy pont, $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Adja meg a T_p érintőtér és az N_p normáltér bázisvektorait.

- M4. Legyen adott

$$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

1. Igazoljuk, hogy ez egy kétdimenziós sokaság. Adjuk meg explicit és implicit paraméterezését is.

2. Adott M -ben egy pont, $p = (1, 0, 0)$. Adja meg a T_p érintőtér és az N_p normáltér bázisvektorait.

- D1. Igazolja a Poincaré lemmát arra a speciális esetre, amikor

$$\omega = f(x, y, z)$$

- D2. Az ω differenciál 1-forma *egzakt*, ha $d\omega = 0$. Igazolja, hogy

$$\omega = zdx - zdy + (x - y)dz$$

egzakt. Milyen τ -ra teljesül, hogy $\omega = d\tau$?

- D3. Tekintsük az alábbi formákat $\mathbb{R}^3$ -ban:

$$\omega = y^2 dx + \cos(x + z) dz, \quad \tau = (x - z) dx \wedge dy.$$

Határozza meg:

$$d\omega = ? \quad d\tau = ? \quad \tau \wedge \omega = ?$$

- D4. Tekintsük az alábbi formákat $\mathbb{R}^3$ -ban:

$$\omega = x^2 dx + 2xy dy + (x + z) dz, \quad \tau = (x + y + 2z) dx \wedge dy.$$

Határozza meg:

$$d\omega = ? \quad d\tau = ? \quad \tau \wedge \omega = ?$$

- D5. Legyenek adottak $\mathbb{R}^3$ -ban az

$$\alpha = yz dx + xz dy + xy dz, \quad \beta = z \sin(xy) dx \wedge dy$$

differenciálformák. Számoljuk ki az $\alpha \wedge \beta$, $d\alpha$, $d\beta$ formákat!

- D6. Adott két 1-forma $\mathbb{R}^2$ -ben. $\omega, \tau \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^2)$, melyeket így jelölünk:

$$\omega = v_1 dx + v_2 dy, \quad \tau = w_1 dx + w_2 dy, \quad v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}.$$

Ezek külső szorzata egy 2-forma: $\omega \wedge \tau = c dx \wedge dy$.

1. Mennyi c ?

2. Mi köze van c -nek a $v = (v_1, v_2)$ és $w = (w_1, w_2)$ vektorokhoz?

- D7. Adott két 1-forma $\mathbb{R}^3$ -ban. $\omega, \tau \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$, melyeket így jelölünk:

$$\omega = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz, \quad \tau = w_1 dx + w_2 dy + w_3 dz, \quad v_i, w_j \in \mathbb{R}.$$

Ezek külső szorzata egy 2-forma: $\omega \wedge \tau = c_1 dy \wedge dz + c_2 dx \wedge dz + c_3 dx \wedge dy$.

1. Mennyi c_1, c_2, c_3 ?

2. Mi köze van c -nek a $v = (v_1, v_2, v_3)$ és $w = (w_1, w_2, w_3)$ vektorokhoz?

Megoldások

(Fokozatosan bővül)

F4. *Javaslat:* Alkalmazzuk a G-O tételt.

S2. **Paraméterezések.** Az S felület paraméterezése:

$$S := \{s(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, \pi]\}.$$

Ennek határa az (x, z) síkban levő egységkör. Ezt így adhatjuk meg:

$$C = \{\gamma(t) : t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos(t), 0, -\sin(t)).$$

(A körvonal harmadik koordinátája az irányítás miatt lesz negatív. "Lefelé" indul a görbe.)

A Stokes tétel:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \, d\mathbf{S} = \oint_C F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}.$$

Jobboldal. Kiszámoljuk a vonalintegrált.

$$\begin{aligned} \oint_C F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (0, 2\cos(t), \cos(t)), (-\sin(t), 0, -\cos(t)) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos^2(t)) \, dt = -\pi. \end{aligned}$$

Baloldal.

$$\operatorname{rot} (F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2x & x \end{vmatrix} = -\mathbf{j} + \mathbf{k} = (0, -1, 1).$$

A felület normálvektora $\mathbf{n} = (x, y, z)$, ezért $\operatorname{rot} (F) \cdot \mathbf{n} = -y + z$.

Kiszámoljuk a felületi integrált.

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_S (-y + z) \, dS \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi (-\sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= -\int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta + \int_0^\pi \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^\pi d\theta = (*) \end{aligned}$$

A második integrál értéke 0, hiszen

$$\int_0^\pi \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2\varphi) \, d\varphi = 0.$$

Az első integrál két tényezője

$$\int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = [-\cos \theta]_0^\pi = 2.$$

Ezért

$$(*) = -\pi.$$

A két oldal valóban egyenlő.

G1. A Green tétel következménye szerint a terület így számolható:

$$A(D) = - \oint_C y \, dx.$$

Most

$$dx = -2a \sin(t) \, dt - 2a \sin(2t) \, dt,$$

ezért

$$\begin{aligned} -y \, dx &= (2a \sin(t) - a \sin(2t))(-2a \sin(t) \, dt - 2a \sin(2t) \, dt) \, dt = \\ &= [4a^2 \sin^2(t) - 2a^2 \sin^2(2t) + 2a^2 \sin(t) \sin(2t)] \, dt. \end{aligned}$$

Tagonként integrálva:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \, dt &= \pi = \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \, dt. \\ \int_0^{2\pi} \sin(t) \sin(2t) \, dt &= \int_0^{2\pi} 2 \sin^2(t) \cos(t) \, dt = 0. \end{aligned}$$

Ezért

$$A(D) = 4a^2\pi - 2a^2\pi = 2a^2\pi.$$

G2. A Green tétel következménye szerint a terület így is számolható:

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx).$$

Most

$$dx = 3 \cos^2(t)(-\sin(t)) \, dt, \quad dy = 3 \sin^2(t) \cos(t) \, dt.$$

Ezért

$$\begin{aligned}x \, dy - y \, dx &= [3 \cos^4(t) \sin^2(t) + 3 \sin^4(t) \cos^2(t)] \, dt = \\&= 3 \cos^2(t) \sin^2(t) [\sin^2(t) + \cos^2(t)] \, dt \\&= 3 \cos^2(t) \sin^2(t) \, dt = \frac{3}{4} \sin^2(2t) \, dt.\end{aligned}$$

Végül

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx) = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \, dt = \frac{3\pi}{8}.$$