

1. Vektoranalízis (anal3)

Szorgalmi házi feladatok + Matlab

verzió: 2017.10.05. – 13:33:28

Contents

1	Alapfeladatok (numerikus függvénytan)	2
2	Numerikus integrálok	2
3	Skalárpotenciális vektormezők a fizikában	4
4	Vektormezők ábrázolási módjai	5
5	Coulomb törvény, elektromos tér	6
6	Biot-Savart törvény, mágneses tér	7

Jelölések, alapfogalmak

1. Vektor értékű mennyiségek:

helyzetvektor (pozícióvektor):

2D: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 3D: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dimenziófüggetlen jelölés: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

vektor értékű függvények (vektormezők):

tipikusan erőterek, fizikai mennyiségek: $\mathbf{F}(x, y)$,

a kis betűs jelölést is intenzíven használjuk: $\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

rövidített jelölés: $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

paraméteres görbék: $\gamma(t)$ (gamma), $\varrho(t)$ (rho)

paraméteres felületek: $\mathbf{s}(u, v)$, $\mathbf{S}(u, v)$

vektor értékű differenciálformák

vonal menti differenciál: $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{r}$

felület menti differenciál: $d\mathbf{S}$, $d\mathbf{A}$

Írásban a vektor értékű mennyiségeket többnyire nem jelölöm, ha mégis, akkor a következő jelölést használok: $\vec{r}$, $\vec{F}(x, y)$, $d\vec{S}$, ...

vektor iránya alatt egy vektor tartóegyeneseinek meredekségét értem.

Ennek értelmében $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorok iránya megegyezik.

vektor irányítása megadja, hogy az adott vektor a tartóegyenes mentén melyik irányba mutat.

Ennek értelmében $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorok irányítása ellentétes.

2. skalármező gradiense:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \tag{1}$$

3. vektormező Jacobi mátrixa:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \tag{2}$$

4. polárkoordináták: (r, ϑ) vagy (r, θ)

5. gömbi polárkoordináták: (r, ϑ, φ) vagy (r, θ, φ)

1 Alapfeladatok (numerikus függvénytan)

1. feladat (Szigorúan monoton függvény inverzének kiszámítása). Adott egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő függvény, melynek nem ismert az analitikus alakja, csak diszkrét pontokban ismerjük az értékét. Ezt a következő képpen jelölöm:

$$f : \{(x_i, y_i) \mid f(x_i) = y_i, i = \overline{1, N}\} \tag{3}$$

Hogyan tudnák hasonlóképpen megadni az f függvény inverzét.

2. feladat (Interpoláció). interp1
Adott $f : \{(x_i, y_i) \mid f(x_i) = y_i, i = \overline{1, N}\}$, továbbá adottak $x'_j \in [x_1, x_N]$. Számítsuk ki (közelítő érték) $y'_j = f(x'_j)$ -t, ahol $j = \overline{1, M}$.

3. feladat (Függvényösszetétel numerikusan). Hogyan értelmeznénk numerikus reprezentációjú függvények összetételét?

2 Numerikus integrálok

4. feladat. Numerikus integrálás normáltartományon integral2

Számítsuk ki numerikusan az $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ felületintegrált, ahol $f(x, y)$ egy tetszőleges skalár értékű függvény pl. $f(x, y) = x^2y + e^{-(x^2+3xy+4y^2)}$, D pedig egy tetszőleges normáltartomány, pl.

kezdetben: $D = [-1, 2] \times [-2, 4]$ (4)

majd: $D = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [h_1(x), h_2(x)]\}$ (5)

5. feladat. Numerikus integrálás egy “furcsa” tartományon integral2

Számítsuk ki numerikusan az $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ felületintegrált, ahol $f(x, y)$ egy tetszőleges függvény pl.

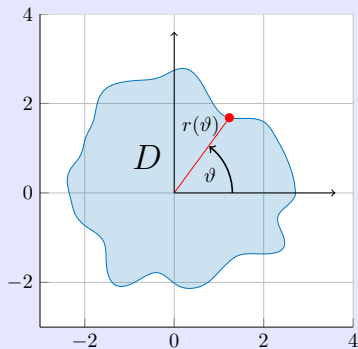
D pedig az itt látható tartomány, mely polárkoordinátákban normáltartományként is megadható:

$$D = \{(r, \vartheta) \mid r \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, r(\vartheta)]\} \tag{6}$$

Az $r(\vartheta)$ függvény analitikus alakját nem ismerjük, ezért ezt numerikusan diszkrét pontokban megadjuk a következő módon:

$$\{(r_i, \vartheta_i) \mid i = \overline{1, n}\} \quad (\text{egyszerűbb eset}) \tag{7}$$

$$\{(x_i, y_i) \mid i = \overline{1, n}\} \quad (\text{bonyolultabb eset}) \tag{8}$$



A [vekanal_amoba.mat](#) állomány négy egyforma hosszúságú tömböt tartalmaz: `x`, `y`, `r`, `theta`.

6. feladat. Polárkoordinátákra való áttérés polar

Azt tudjuk, hogy a polárkoordináták ismeretében a Descartes koordináták könnyen számolhatók:

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases} \tag{9}$$

azonban az inverz leképzés esetén bajban vagyunk

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \end{cases} \tag{10}$$

ugyanis $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ nem értelmezett a $(0, y)$ pontok esetén, továbbá, $(-1, -1)$ és $(1, 1)$ pontokra ugyanazt a szöveget adja. Adjunk meg $\vartheta(x, y)$ -ra egyetlen képletben egy olyan függvényt, mely minden $\vartheta \in [0, 2\pi)$ -re működik. A 5. feladatban megadott tartomány határvonala diszkrét pontokban Descartes koordinátákban és polárkoordinátákban is meg van adva. A képlet alapján próbáljuk meg rekonstruálni egyiket a másiktól, azaz $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$ majd $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$. Polárkoordinátás ábrázoláshoz használhatjuk a `polar(theta, r)` beépített függvényt.

7. feladat. Vonalintegrál**integral**

Matlabban számítsuk ki numerikusan mekkora munkát gyakorol egy F erőter egy anyagi pontra, miközben az anyagi pont a Γ által leírt görbe mentén halad. Magyarán szólva, integráld az F vektormezőt Γ görbe mentén. F és Γ tetszőlegesen megválasztható, támpontként szolgálhat az 1. gyakorlat 5-7. feladata. Ugyanazokat a függvényeket is lehet használni.

Támpont:

1. Definiáljunk egy x és y -től függő F , majd egy t -től függő **gamma** szimbolikus függvényt.
2. $\gamma(t)$ deriváltjának kiszámításához használjuk a **diff** parancsot.
3. A **subs** parancs segítségével helyettesítsük be $[x;y]$ helyébe a **gamma**-t, hogy megkapjuk $F(\gamma(t))$ -t.
4. A szimbolikus **t** változótól függő integrandust alakítsuk anoním függvénnyé a **matlabFunction** segítségével. Nevezzük el (pl.) **Integrand_fh**-nek
5. Végül hívjuk meg az **integral** parancsot numerikus integrálás végett:
`I = integral(Integrand_fh,t0,t1)`

8. feladat. Felületintegrál**integral2**

Matlabban számítsuk ki numerikusan mekkora a *hozama* egy $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektormező által leírt áramlásnak egy $\mathbf{S}(u,v)$ paraméteresen megadott felületen keresztül. Vagyis:

$$\int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mathbf{n} dS = ? \quad (11)$$

3 Skalárpontenciális vektormezők a fizikában

Érdekes, hogy a fizikában a potenciálfüggvényt negatív előjellel illetik meg, azaz egy $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektormezőnek $V(\mathbf{r})$ a potenciálfüggvénye, ha $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, ahol $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a vizsgálandó pont pozícióvektora vagy helyzetvektora.

Gravitációs mező és potenciál

A gravitációs mező a Föld felszíne mentén lokálisan egy homogén mezőként viselkedik:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad (12)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás. A gravitációs mező potenciálfüggvénye: $V_G(\mathbf{r}) = gz$. Egy m tömegű test potenciális energiája, illetve a rá ható gravitációs erő $\mathbf{r}$ pontban a következők:

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{r}) = m\mathbf{G}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3 \quad V_m(\mathbf{r}) = mV_G(\mathbf{r}) \in \mathbb{R} \quad (13)$$

Elektromos mező és potenciál

Az elektromos mező erőssége a vizsgálandó $\mathbf{r}$ pontban az origóban elhelyezett Q ponttöltés körül:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \mathbf{r}, \text{ ahol } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (14)$$

Ezen elektromos mező potenciálfüggvénye

$$V_E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\|\mathbf{r}\|} \quad (15)$$

Ekkor az elektromos tér egy q töltésre ható ereje: $\mathbf{F}_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (Coulomb törvénye). Továbbá egy q töltés potenciális energiája ezen erőterben: $V_q(\mathbf{r}) = qV_E(\mathbf{r})$.

9. feladat. Igazold, hogy $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ valóban skalárpontenciális, vagyis $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$.

Potenciálfüggvény kiszámításának módja

Legyen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} yz \\ xy \\ xy \end{pmatrix}, \quad \text{skalárpontenciális mivel } \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0. \quad (16)$$

Ennek $V(\mathbf{r})$ potenciálfüggvénye $\mathbf{r}$ pontban a következő vonalintegrállal számítható:

$$V(\mathbf{r}) = \pm \int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}), d\mathbf{l} \rangle, \quad \text{ahol } \Gamma = \left\{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, 1], V(\gamma(0)) = 0 \text{ és } \gamma(1) = \mathbf{r} \right\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} + & : \text{matematikus potenciál: } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = +\nabla V(\mathbf{r}) \\ - & : \text{fizikus potenciál: } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (18)$$

Vagyis integráljuk a vektormezőt egy nulla potenciálú ponttól az $\mathbf{r}$ pontig egy tetszőleges úton (mivel potenciális). A nulla potenciálú pont tetszőlegesen megválasztható. Ponttöltés elektromos mezője esetén szokás szerint egy végtelen távol lévő pontra mondjuk, hogy nulla potenciálú. Homogén (lokális) gravitációs mező esetén szokás szerint egy, a Föld felszínén lévő pontot választunk nulla potenciálú pontnak. Ezen feladat esetén legyen az origóban nulla a potenciál, vagyis $V(\mathbf{0}) = 0$, ekkor

$$\gamma(t) = t \cdot \mathbf{r} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (19)$$

A potenciál függvény tehát így számítható (matematikus potenciál):

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}), d\mathbf{l} \rangle = \int_0^1 \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_0^1 t^2 (yz \quad xy \quad xy) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T dt \quad (20)$$

$$= xyz \int_0^1 3 \cdot t^2 dt = xyz \cdot t^3 \Big|_{t=0}^1 = xyz. \quad \text{Valóban } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla V(\mathbf{r}). \quad (21)$$

Potenciálszámítás.

Matlab: **potential**

10. feladat. Ezen módszerrel számoljuk ki $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ lokális gravitációs mező (12) *fizikus* potenciálját.

11. feladat. Ezen módszerrel számoljuk ki egy Q ponttöltés $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos mező (14) *fizikus* potenciálját.

4 Vektormezők ábrázolási módjai

Egy $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ típusú függvény (vektormező) ábrázolási módjai:

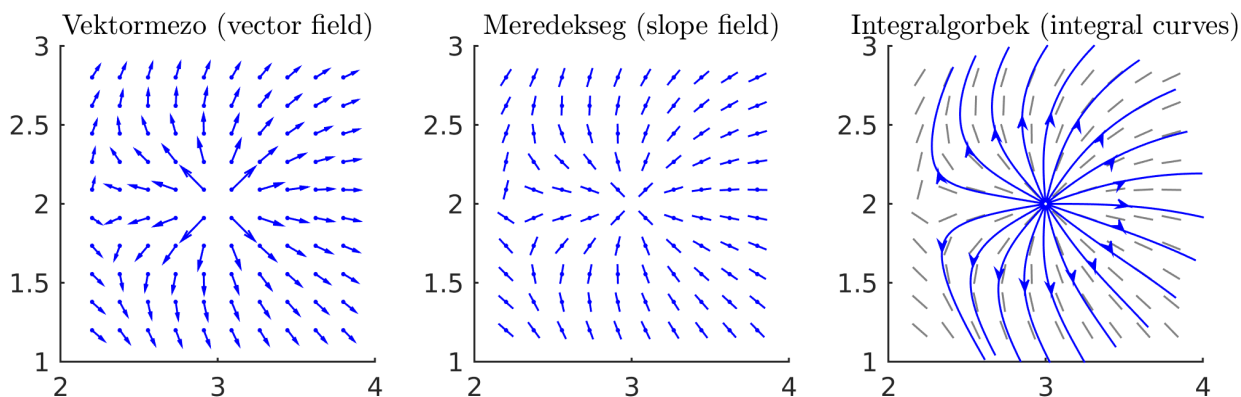
Vektoros ábrázolás (Matlab: quiver) A függvény (vektor típusú) értékét diszkrét pontokban vektorként ábrázoljuk. A kiértékelési pont adja meg a vektor kiindulási pontját, a függvény $\|\mathbf{F}(x, y)\|_2$ normája pedig a vektor hosszát adja meg.

Merekségek (slope field) Ez az ábrázolási mód elhanyagolja a vektor értékű függvény pontos irányát csak a vektor tartóegyenest ábrázolja. A kiértékelési pont a szakasz *középpontját* adja meg. Az ábrán a kellemesebb látvány érdekében a szakaszok hosszát lenormáltam.

Integrálgörbék (integral curves) Azon pályák, melyet pl. egy áramló folyó vízének felszínére helyezett gumilambda írna le. Ez esetben jelölje $\mathbf{F}(x, y)$ a folyó felületén mért áramlási sebességet adott (x, y) pontban. Az integrálgörbék tehát a $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{F}(\gamma(t))$ közönséges differenciálegyenlet megoldásai különböző $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ kezdeti feltételek mellett, azaz

$$\text{ha } \mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}, \text{ akkor } \begin{cases} \dot{x}_1(t) = F_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}_1(t) = F_2(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (22)$$

Ezen ábrázolási mód rendkívül hasznos dinamikus rendszerek (közönséges differenciálegyenlet rendszerek) vizsgálatára.



1. állítás (integrálgörbék invarianciája). egyen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektormező és $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan pozitív értékű skalármező. Illetve legyen $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Ekkor ha $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$ integrálgörbéje $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ -nak, akkor $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ -nak is integrálgörbéje (és fordítva). *Költői kérdés: ez miért hasznos nekünk?*

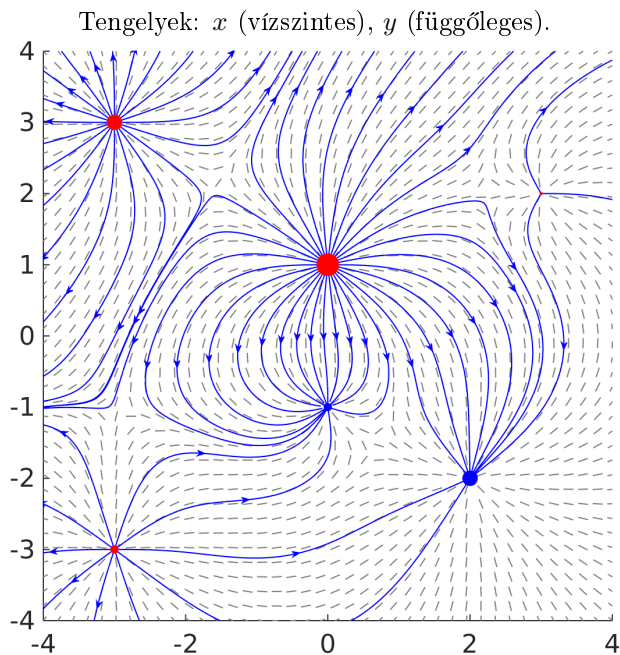


Figure 1: Multipólus elektromos erővonalai és a hálózatban az erőter meredeksége.

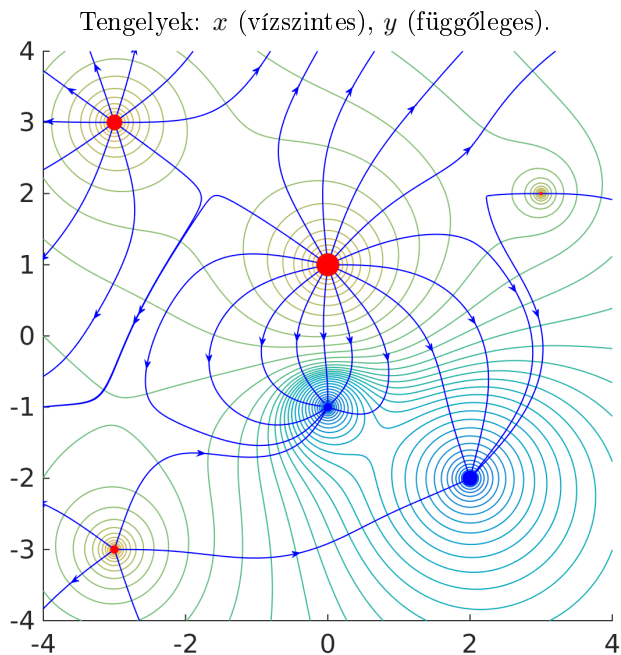


Figure 2: Multipólus elektromos erővonalai és ekvipotenciális görbék.

5 Coulomb törvény, elektromos tér

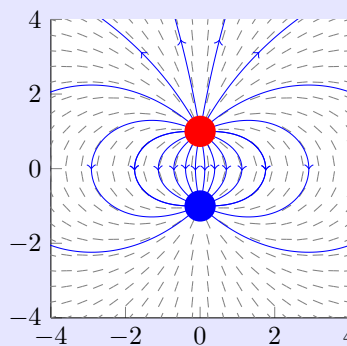
12. feladat. Egy tetszőleges erőter integrálgörbéi (erővonalai)

`ode45`, `quiver`

Számítsuk ki egy két azonos Q nagyságú de ellentétes előjelű elektromos töltés (elektromos dipólus) elektromos erőterét, ábrázoljuk azt a fentiekben leírt módszerek segítségével. Az elektromos mezőt Coulomb törvénye alapján tudjuk megadni:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^3} - \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|^3} \right), \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (23)$$

ahol $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ a két töltés pozíciója, $\mathbf{r}$ pedig az a pont amelyben megszeretnénk megadni az elektromos mező irányát és erősségét. Az integrálgörbék számításakor érdemes a pozitív töltés körül felvenni a kezdeti feltételeket, majd megoldani az $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{E}(\gamma(t))$ differenciálegyenletet.



13. feladat (Az előző feladathoz kapcsolódóan). Számítsuk ki az integrálgörbéit egy elektromos multipólus elektromos mezejének. A ponttöltések száma (N), (előjeles) erőssége (Q_i) és pozíciója ($\mathbf{r}_i$) lehet tetszőleges.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} \quad (24)$$

Ábrázolás során figyelembe vehetők a következő szempontok (lásd Figure 1)

1. negatív töltéseket kék, pozitívakat piros körrel jelöljük
2. a töltéseket jelölő kör nagysága legyen arányos a töltés nagyságával
3. a pozitív töltésekből induló erővonalak száma legyen arányos a töltés nagyságával

14. feladat. Ekvipotenciális görbék

`Symbolic Toolbox: syms, potential, matlabFunction; contour`

Ábrázoljuk egy elektromos mező ekvipotenciális görbéit. Ezen görbék mentén az elektromos skalárpotenciál értéke nem változik. Adjuk meg a (23) és a (24) elektromos mezők $U(\mathbf{r})$ skalárpotenciálját, amelyre $\nabla U(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r})$, majd ábrázoljuk $U(\mathbf{r})$ függvény szintvonalait, ezek fogják megadni $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ekvipotenciális görbéit (lásd Figure 2).

6 Biot-Savart törvény, mágneses tér

A **Biot-Savart törvény** [1, 21. oldal] értelmében, ha egy zárt áramkörben I áram folyik, akkor a tér egy tetszőleges pontjában a mágneses térerősség:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{\dot{\gamma}(t) \times (\mathbf{r}_1 - \gamma(t))}{\|\mathbf{r}_1 - \gamma(t)\|^3} dt \quad (25)$$

ahol

- $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a, b]\}$ egy zárt vagy végtelen hosszú görbe, a vezeték amiben az áram folyik
- $d\mathbf{r} = \dot{\gamma}(t)dt$ elemi vezetékdarab, a vektor iránya a vezetékre érintőleges, irányítása pedig megegyezik az áram folyásának irányával
- $\mathbf{r} = \gamma(t)$ az elemi vezetékdarab pontja
- $\mathbf{r}_1$ a kérdéses pont
- $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ az elemi vezetékdarabtól a kérdéses pont felé mutató vektor
- $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}\|$ az elemi vezetékdarab és a kérdéses pont közötti távolság
- $\mathbf{r}_1$ az integrál kiértékelése során konstansnak tekintendő.

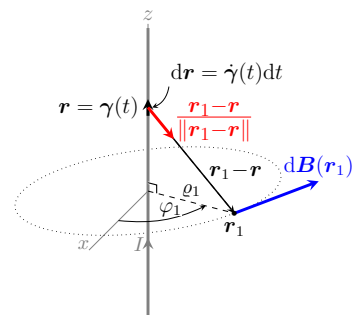


Figure 3:

Végtelen hosszú z irányban haladó egyenes vezetékben folyó áram mágneses mezeje.

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\dot{\gamma}(t) \times (\mathbf{r}_1 - \gamma(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{r}_1 - \gamma(t)\| = \sqrt{t^2 + x_1^2 + y_1^2} \quad (27)$$

Mivel elég csúnya kifejezéseket kaptunk, érdemes x_1 és y_1 -et átírni polárkoordinátákra:

$$\begin{cases} x_1 = \varrho_1 \cos(\varphi_1) \\ y_1 = \varrho_1 \sin(\varphi_1) \end{cases} \Rightarrow \dot{\gamma}(t) \times (\mathbf{r}_1 - \gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\varrho_1 \sin(\varphi_1) \\ \varrho_1 \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{r}_1 - \gamma(t)\| = \sqrt{t^2 + \varrho_1^2} \quad (28)$$

Ezek után a (25) integrál a következőképpen alakul:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{B}(\varrho_1, \varphi_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_1 dt}{\sqrt{t^2 + \varrho_1^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

A belső integrál kiszámítása:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_1 dt}{\sqrt{t^2 + \varrho_1^2}^3} = \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 + \varrho_1^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\varrho_1}$$

Ezért

$$\mathbf{B}(\varrho_1, \varphi_1) = \frac{\mu_0 I}{4\varrho_1 \pi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

15. feladat (Egységkörben folyó áram mágneses mezeje).

számoljuk ki analitikusan

A Γ görbe által leírt zárt huzalban I erősségű áram folyik. Számoljuk ki a keltett mágneses mező értékét a z tengely mentén, ha

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\}, \quad \text{vagyis } \mathbf{B}(z_1) = ?, \quad B(z_1) = \|\mathbf{B}(z_1)\| = ? \quad (31)$$

16. feladat. Tekercsben folyó áram mágneses mezeje

Matlabban ábrázoljuk

Adott egy tekercs, melyet Γ görbe ír le. A tekercsben I erősségű áram folyik. Számoljuk ki (analitikusan vagy numerikusan) a keltett mágneses mező értékét először a z tengely, majd a Γ_1 görbe mentén, ha

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ at \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ paraméter} \right\} \quad (32)$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \gamma_1(z_1) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \mid z_1 \in \mathbb{R}, b > 0 \text{ paraméter} \right\} \quad (33)$$

Különböző a és b értékek mellett ábrázoljuk Matlabban a mágneses mező értékét z tengely mentén, vagyis a $B(z_1) := \|\mathbf{B}(z_1)\|$ függvényt z_1 szerint.

References

- [1] K. Simonyi and L. Zombory. *Elméleti villamosságtan*. Műszaki Könyvkiadó Budapest, 2000.