

2. Differenciálgeometria (anal3)

Szorgalmi házi feladatok + Matlab

verzió: 2017.11.07. – 14:48:15

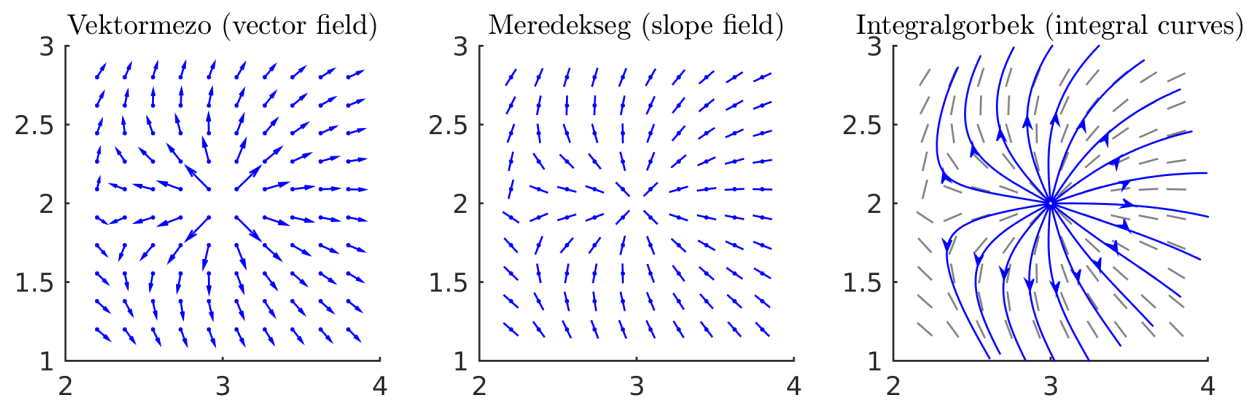
Contents

1	Integrálgörbék (integral curves)	1
2	Koordinátafüggetlen deriváltak (csak a legbátrabbaknak)	2
2.1	Alapfogalmak	2
2.2	Áttérés Descartes koordinátákról polárkoordinátákra (2D)	3
2.3	Polárkoordináták bázisvektorai	5
2.4	Metrika tenzor	5
2.5	Christoffel szimbólum	6
2.6	Kovariáns derivált operátor	6
2.6.1	Skalármező kovariáns deriváltja és gradiense	6
2.6.2	Ternzormező kovariáns deriváltja	7
2.6.3	Vektormező divergenciája	7
2.7	Egy skalármező második kontravariáns deriváltja	8
2.8	Feladatok	9

1 Integrálgörbék (integral curves)

Jelölje $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a folyó felületén mért áramlási sebességet adott (x, y) pontban. Az integrálgörbék a $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{F}(\gamma(t))$ közönséges differenciálegyenlet megoldásai különböző $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ kezdeti feltételek mellett, azaz

ha $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$, akkor $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = F_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}_1(t) = F_2(x(t), y(t)) \end{cases}$ (1)



1. állítás (integrálgörbék invarianciája). legyen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektormező és $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan pozitív értékű skalármező. Illetve legyen $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Ekkor ha $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$ integrálgörbéje $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ -nak, akkor $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ -nak is integrálgörbéje (és fordítva). *Költői kérdés: ez miért hasznos nekünk?*

- 1. feladat.** Bizonyítsuk be az állítást!
- 2. feladat** (Görbe kanonikus paraméterezése).
- 3. feladat** (Ekvidisztáns pontok egy görbén).

2 Koordinátafüggetlen deriváltak (csak a legbátrabbaknak)

2.1 Alapfogalmak

Descartes koordináta rendszerben bármilyen $\mathbf{v}$ (koordinátafüggetlen) vektor felírható $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{i} + v^2 \mathbf{j}, \text{ ezt jelöltük mi eddig úgy, hogy } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Fogalmak, jelölések:

- $\mathbf{R}$: a tér egy adott ponja, NEM FÜGG a koordináta rendszer megválasztásától.
- $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R})$ vektormező: a tér minden pontjához hozzárendel egy adott hosszúságú és adott irányú vektort, ez NEM FÜGG a koordináta rendszer megválasztásától.
- $v^i = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$ tenzormező: a tér minden pontjához hozzárendel egy koordináta mátrixot (ami egy tenzor¹), függ a koordináta rendszer megválasztásától, méghozzá "tenzorosan függ": $v^{i'} = v^i J_i^{i'}$ (lásd később).
- $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ a Descartes koordináta rendszer bázisvektorai. Más jelölések: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, vagy $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ (fizikusok). Általánosságban egy bármilyen Z^i koordináta rendszer kovariáns² bázisvektorai: $\mathbf{Z}_i$.

Tenzor index jelölés. Einstein vezette be a mátrix-vektor, mátrix-mátrix és általában a tenzor-tenzor szorzatok szummás felírásának rövidítésére. Pl. legyen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad u = (u^1 \quad u^2 \quad u^3) \quad (3)$$

Ekkor

$$Av = \begin{pmatrix} A_{11}v^1 + A_{12}v^2 + A_{13}v^3 \\ A_{21}v^1 + A_{22}v^2 + A_{23}v^3 \\ A_{31}v^1 + A_{32}v^2 + A_{33}v^3 \end{pmatrix}, \quad vu = \begin{pmatrix} v^1u^1 & v^1u^2 & v^1u^3 \\ v^2u^1 & v^2u^2 & v^2u^3 \\ v^3u^1 & v^3u^2 & v^3u^3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ekkor Av vektor i -edik eleme, vagy vu mátrix ij -edik eleme:

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} v^j \stackrel{\text{jel}}{=} A_{ij} v^j, \quad (vu)^{ij} = v^i u^j = u^j v^i \quad (5)$$

Egy mátrix nyomát is ki lehet fejezni ilyen módon:

$$\text{tr}(B) = \sum_{i=1}^2 B_i^i \stackrel{\text{jel}}{=} B_i^i, \quad \text{viszont} \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^3 A_{ii} \neq A_{ii} \quad (\text{értelmetlen, mert mindkét } i \text{ alsó index})$$

Jelölje $[\cdot]$ egy tenzor index jelöléssel megadott objektum mátrix reprezentációját, pl.

$$[Z_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Azonban óvatosnak kell lennünk, ugyanis az indexelt objektumok mátrix reprezentációja nem egyértelmű. Egy kovariáns v_i egy indexű objektumot többnyire sorvektorként, egy kontravariáns v^i egy indexű objektumot pedig oszlopvektorként értelmezünk, de ez nem szabály. Pl. Z_{ij} -t a következő képpen és értelmezhetjük:

$$[Z_{ij}] = (1 \quad 0 \mid 0 \quad r^2) \quad (7)$$

vagyis, mint egy hiper-sorvektor, de nem ez a megszokott.

Szabályok

1. alsó (kovariáns) indexek: v_i és felső (kontravariáns) indexek: A_{ij} fontos jelentőséggel bírnak.
2. két azonos index szummázást jelent a megadott dimenziók szerint, de csak akkor értelmes a kifejezés, ha az egyik index alsó a másik felső. Egy index legfeljebb csak kétszer szerepelhet egy kifejezésben.

$$T_{jt}^{klm} = U_{ij}^{kl} V_t^{im} = \sum_{i=1}^n U_{ij}^{kl} V_t^{im} \quad (\text{ennek van értelme}) \quad (8)$$
$$U_{ij} V_j \text{ vagy } U_{ij} V^j W_j \quad (\text{értelmetlen})$$

¹jelen esetben egy 1 dimenziójú tenzort (1-tenzort)

²kovariáns - alsó index i (sorvektornak feleltethető meg), kontravariáns - felső index i (oszlopvektornak feleltethető meg), bár a tenzoralképpben nincs olyan, hogy sorvektor vagy oszlopvektor, ezt csak akkor hozzuk be, ha lineáris algebrai úton próbáljuk elképzelni a tenzoralképpbeli változókat, szorzatokat

3. Ha egy felső index a nevezőben van, akkor az alsó index lesz az eredményben:

$$T_i = \frac{\partial V}{\partial Z^i} \quad (9)$$

4. lásd még: [1, 4.5 fejezet]

Megj. nem minden indexelt objektumot hívunk tenzornak, csak azokat amelyek “tenzorosán függnek” a koordináta rendszer megválasztásától, vagyis

1. egy T^i objektumot akkor tenzor, ha ennek értéke Z' koordináták mellett $T^{i'} = T^i J_i^{i'}$ [1, 6.3.1]
2. egy T_k^{ij} objektum “háromszorosan” tenzor, ha ennek érték az új koordinátákban $T_{k'}^{i'j'} = T_k^{ij} J_i^{i'} J_j^{j'} J_k^k$ [1, 6.4 Tensors of Higher Order]

2.2 Áttérés Descartes koordinátákról polárkoordinátákra (2D)

Kiindulási koordináták: $Z^i = x, y$. (i felső index, nem hatványkitevő)

Célkoordináták: $Z^{i'} = r, \theta$. Leképzés:

$$Z^i = Z^i(Z^{1'}, Z^{2'}) \stackrel{\text{jel}}{=} Z^i(Z') : \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (10)$$

A leképzés Jacobi mátrixa:

$$J_{i'}^i := \frac{\partial Z^i}{\partial Z^{i'}}, \quad J := [J_{i'}^i] = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z^1}{\partial Z^{1'}} & \frac{\partial Z^1}{\partial Z^{2'}} \\ \frac{\partial Z^2}{\partial Z^{1'}} & \frac{\partial Z^2}{\partial Z^{2'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (11)$$

```
syms x y r theta real
Z = [ x ; y ];
Zp = [ r ; theta ];

Mapping = [
    r*cos(theta)
    r*sin(theta)
];

Jip = jacobian(Mapping, Zp);
```

Határozzuk meg az inverz leképzést. Emeljük négyzetre mindkét egyenletet (10), majd adjuk őket össze. Mivel r csak pozitív lehet, kapjuk:

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cos^2(\theta) \\ y^2 = r^2 \sin^2(\theta) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (12)$$

Ha $x \neq 0$, akkor a második egyenletet az elsővel osztva kapjuk:

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta) \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (13)$$

Tehát az inverz leképzés:

$$Z^{i'} = Z^{i'}(Z^1, Z^2) \stackrel{\text{jel}}{=} Z^{i'}(Z) : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (14)$$

```
assume(in(r, 'real') & r > 0 & x > 0 & y > 0)

Zp_sol = solve(Mapping - Z, Zp)

Mappingp(r, theta) = simplify([
    Zp_sol.r(1)
    Zp_sol.theta(1)
])
```

Matlab által adott válasz:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = -2 \arctan\left(\frac{x - \sqrt{x^2 + y^2}}{y}\right) \end{cases} \quad (15)$$

4. feladat. Helyes-e a válasz? Miért ezt kaptuk, hogyan számolt a Matlab? Próbáljuk meg reprodukálni (papíron ceruzával).

Számítsuk ki a Jacobi mátrixát az inverz leképezésnek. Használjuk az általunk számolt leképezést (14).

$$J_i^{i'} := \frac{\partial Z^{i'}}{\partial Z^i}, \quad J := [J_{i'}^i] = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z^{1'}}{\partial Z^1} & \frac{\partial Z^{1'}}{\partial Z^2} \\ \frac{\partial Z^{2'}}{\partial Z^1} & \frac{\partial Z^{2'}}{\partial Z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

5. feladat. Igazoljuk, hogy $J_{i'}^i J_j^{i'} = \delta_j^i$ (i.e. $J_{i'}^i$ és $J_j^{i'}$ mátrixszorzata egységmátrixot ad), vagyis $J_{i'}^i$ mátrixinverze $J_j^{i'}$ -nak.

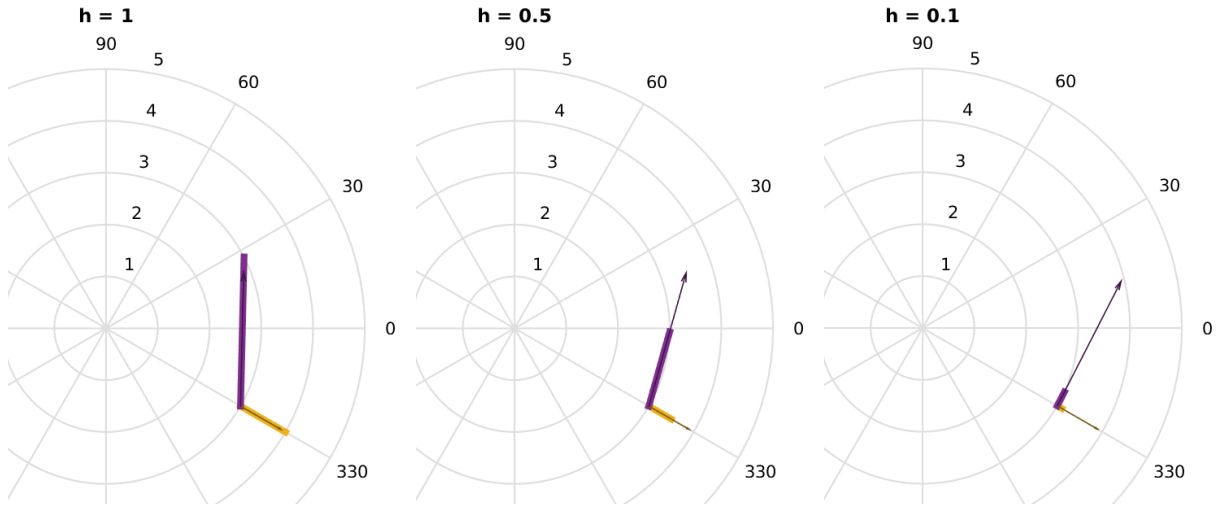


Figure 1: Barna vektor: $\mathbf{Z}_r$, lila vector: $\mathbf{Z}_\theta$.

2.3 Polárkoordináták bázisvektorai

Legyen $\mathbf{R} = \mathbf{R}(r, \theta)$ egy pont a térben. $\mathbf{R}$ koordinátáfüggetlen pont a térben, az $\mathbf{R}(r, \theta)$ jelölés csak azt modja meg, hogy r és θ koordináták szerint dekomponálom.

Határozzuk meg, hogyan változik $\mathbf{R}$ pont helyzete, ha egyik koordináta szerint egységre elmozdítom:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1^{\text{jel}} \mathbf{Z}_r &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(r+h, \theta) - \mathbf{R}(r, \theta)}{h} = \frac{\partial \mathbf{R}(r, \theta)}{\partial r}, \quad \|\mathbf{Z}_r\| = 1 \\ \mathbf{Z}_2^{\text{jel}} \mathbf{Z}_\theta &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(r, \theta+h) - \mathbf{R}(r, \theta)}{h} = \frac{\partial \mathbf{R}(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad \|\mathbf{Z}_\theta\| = r, \quad \text{lásd Figure. 1.} \end{aligned} \quad (17)$$

6. feladat. Igazold, hogy $\|\mathbf{Z}_i\|$ valóban a fentiekben megadott értékek.

A különböző koordináták mentén történő egységnyi elmozdulásvektorok fogják megadni a Z^i koordináta-rendszer $\mathbf{Z}_i$ bázisvektorait:

$$\mathbf{Z}_i := \frac{\partial \mathbf{R}(Z)}{\partial Z^i} \quad (18)$$

Megjegyzés. A fizikában ezen bázisvektorokat *normalizálják* és így jelölik:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{Z}_r}{\|\mathbf{Z}_r\|}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\mathbf{Z}_\theta}{\|\mathbf{Z}_\theta\|}, \quad \text{Descartes k.r.: } \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{i} = \mathbf{Z}_x, \quad \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{j} = \mathbf{Z}_y, \quad \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{k} = \mathbf{Z}_z \quad (3D) \quad (19)$$

2.4 Metrika tenzor

Megszokhattuk, hogy Descartes koordináta rendszerben a skalárszorzat a következőképpen működik:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle u^1 \mathbf{i} + u^2 \mathbf{j}, v^1 \mathbf{i} + v^2 \mathbf{j} \rangle = u^1 v^1 + u^2 v^2 \quad (20)$$

mivel $\langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{i} \rangle = 0$. Tény, hogy polárkoordináták esetén is $\mathbf{Z}_r \perp \mathbf{Z}_\theta$, azonban a bázisvektorok nem normáltak, ezért

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle u^1 \mathbf{Z}_1 + u^2 \mathbf{Z}_2, v^1 \mathbf{Z}_1 + v^2 \mathbf{Z}_2 \rangle = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\text{tenzor index jelöléssel:} \quad = \langle u^i \mathbf{Z}_i, v^j \mathbf{Z}_j \rangle = u^i v^j \langle \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j \rangle = u^i v^j Z_{ij}$$

ahol $Z_{ij} = Z_{ji} = \langle \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j \rangle$ a metrix tenzor. Lineáris algebrából szemlélve egy n dimenziós vektortérben Z_{ij} egy szimmetrikus pozitív definit $n \times n$ -es mátrix. Z_{ij} inverzét Z^{ij} -vel jelöljük, ez a kontravariáns metrika tenzor: $Z_{ij} Z^{jk} = \delta_i^k$ ("egységtenzor").

Polárkoordináták esetén:

$$[Z_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad [Z^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Megjegyzés. A metrika tenzor megadja, hogy adott pontból adott irányba milyen mértékben torzul a hosszúságmérés. A fizikában Z_{ij} -t főleg g_{ij} -vel jelölik.

2.5 Christoffel szimbólum [1, 5.12 fejezet]

Más néven *konnerxiós koeficiensek* [2, 4.4 fejezet]: Γ_{ij}^k , melyet a következő képlettel számolhatunk

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} Z^{km} \left(\frac{\partial Z_{mi}}{\partial Z^j} + \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Z^i} - \frac{\partial Z_{ij}}{\partial Z^m} \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Z^{km} \left(\frac{\partial Z_{mi}}{\partial Z^j} + \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Z^i} - \frac{\partial Z_{ij}}{\partial Z^m} \right) \quad (23)$$

Ezt egy háromdimenziós hipermátrixként lehet felfogni, hogy pontosan mit jelent a fent említett referenciákban pontosan le van írva. Ennek automatikus kiszámítása sem egyszerű, ezért ennek Matlab kódját megadom:

```
syms r t real % koordinatak r: tavolsag origotol
zi = [ r ; t]; % t, azaz theta: x tengellyel bezart szog

Z_ij = [ .. ]; % kovarians metrika tenzor (also index)
Zij = [ .. ]; % kontravarians metrika tenzor (felso index)

% Gamma(i,j,k) kiszamitasa
Gamma = sym(zeros(n,n,n));
for i = 1:n
    for j = 1:n
        for k = 1:n
            for m = 1:n % osszegzes m szerint
                Gamma(i,j,k) = Gamma(i,j,k) + 0.5 * Zij(k,m) * ( ...
                    diff(Z_ij(m,i), zi(j)) + diff(Z_ij(m,j), zi(i)) - diff(Z_ij(i,j), zi(m)) ...
                );
            end
        end
    end
end
Gamma
```

$$\begin{aligned} \text{Gamma}(:, :, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix} \\ \text{Gamma}(:, :, 2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1/r \\ 1/r & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{vagyis: } \Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

7. feladat (Christoffel szimbólum kiszámítása).

Matlab: **reshape**, **permute**

A fenti Matlab kód egy négyszer egymásba ágyazott for ciklusokkal számolja ki Γ_{ij}^k -t. Ez Matlabban rendkívül időigényes. Számoljuk ki Γ_{ij}^k -t csak a beépített hatékony vektorműveletekkel.

2.6 Kovariáns derivált operátor ∇_j

2.6.1 Skalármező kovariáns deriváltja és gradiense

2. definíció (Skalármező kovariáns deriváltja, gradiense). Skalármezőre alkalmazva a kovariáns derivált operátort így definiáljuk [1, Eq. (8.18)]:

$$\nabla_j F = \frac{\partial F}{\partial Z^j} \quad (25)$$

És ez nem más, mint a skalármező gradiense *kovariáns* komponensei [1, Eq. (6.49)], azaz

$$\text{grad } F = \nabla_j [F] Z^j = \frac{\partial F}{\partial Z^j} Z^j = Z^{ij} \nabla_j [F] Z_i = Z^{ij} \frac{\partial F}{\partial Z^j} Z_i \quad (26)$$

Tehát $Z^{ij} \nabla_j F$ a gradiens kontravariáns (megszokott) komponensei.

Az (26)-ben látott egyenlőségsorozat nem következik egyértelműen, az egyenlőség a ∇_j operátor metrilinikus tulajdonságából adódik [1, 8.6.7. fejezet], ami azt jelenti, hogy

$$\nabla_k Z_{ij} = 0, \quad \nabla_k Z^{ij} = 0, \quad \nabla_j Z_i = 0, \quad \nabla_j Z^i = 0 \quad (27)$$

Görbült sokaságokon értelmezett koordinátarendszerben ez nem teljesül, azonban most a klasszikus $\mathbb{R}^n$ -ben vagyunk, csak az $\mathbb{R}^n$ -ben felvett koordinátarendszer az ami nem a megszokott, ugyanis pontonént változó bázisvektorú, görbe vonalú koordinátákkal dolgozunk. A (27)-nek következtében:

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= \nabla_j [F] Z^j + F \nabla_j [Z^j] = \nabla_j [F Z^j] = \nabla_j [F (Z^{ij} Z_i)] = \nabla_j [Z^{ij} (F Z_i)] \\ &= Z^{ij} \nabla_j [F Z_i] + \underbrace{\nabla_j [Z^{ij}] F Z_i}_{=0} = Z^{ij} \nabla_j [F Z_i] = Z^{ij} \nabla_j [F] Z_i + \underbrace{F \nabla_j [Z_i]}_{=0} = Z^{ij} \nabla_j [F] Z_i \end{aligned} \quad (28)$$

A fenti levezetésben a $[Z^{ij}]$ jelölés nem a Z^{ij} tenzor mátrix reprezentációját jelöli. A $[\]$ zárójellel azt jelöljük, hogy aktuálisan mire alkalmazzuk a kovariáns deriválást.

2.6.2 Tenzormező kovariáns deriváltja

Legyen $\mathbf{V}(x, y)$ egy vektormező, melynek kontravariáns komponensei a $Z^i = x, y$ Descartes koordinátarendszerben legyen $V^i(x, y)$, $Z^{i'} = \varrho, \vartheta$ polárkoordinátákban pedig legyen $V^{i'}(\varrho, \vartheta)$, azaz

$$\mathbf{V}(x, y) = V^i(x, y)\mathbf{Z}_i = V^1(x, y)\mathbf{Z}_x + V^2(x, y)\mathbf{Z}_y = V^{1'}(\varrho, \vartheta)\mathbf{Z}_\varrho + V^{2'}(\varrho, \vartheta)\mathbf{Z}_\vartheta = V^{i'}(\varrho, \vartheta)\mathbf{Z}_{i'} = \mathbf{V}(\varrho, \vartheta)$$

Egy konkrét példa:

$$\mathbf{V} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{Z}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{Z}_y = 1 \cdot \mathbf{Z}_r + 0 \cdot \mathbf{Z}_\theta \quad (29)$$

Descartes koordináta rendszerben egy $\mathbf{V}$ vektormező megváltozását a V^i koordinátáinak deriváltjaival adtuk meg (Jacobi mátrix):

$$DV^i(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1}{\partial x} & \frac{\partial V^1}{\partial y} \\ \frac{\partial V^2}{\partial x} & \frac{\partial V^2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Mi a helyzet az általános koordináták rendszerekkel? Észrevehetők, hogy $\mathbf{V}$ vektormező polárkoordináták szerinti kontravariáns $V^{i'}$ koordináta komponensei konstans értékűek (a Jacobi mátrix nulla), pedig tudjuk, hogy $\mathbf{V}$ értéke pontonként változik. Azonban ez a változás nem tükröződik a polárkoordinátákban, mert a $\mathbf{Z}_{i'} = \mathbf{Z}_\varrho, \mathbf{Z}_\vartheta$ bázisvektorok értéke is pontonként változik. Ezt a változást valahogy bele kell integrálni a $\nabla_j V^i$ kovariáns deriváltba.

3. definíció (Tenzormező kovariáns deriváltja). Egy $V^i(Z)$ tenzormező kovariáns deriváltja tehát a mögöttes invariáns $\mathbf{V} = V^i(Z)\mathbf{Z}_i$ vektormező megváltozását hivatott megadni az egyes Z^i koordináták szerint. A $V^i(Z)$ tenzormező kovariáns deriváltját a következő formula definiálja [1, Eq. (8.11)]:

$$\nabla_j V^i(Z) = \frac{\partial V^i}{\partial Z^j} + \Gamma_{jm}^i V^m(Z), \quad \text{ahol } V^i(Z) = V^i(Z^1, \dots, Z^n). \quad (31)$$

Ugyanennek a $\mathbf{V} = V^i(Z)\mathbf{Z}_i = V_i(Z)\mathbf{Z}^i$ vektormezőnek a megváltozását a $V_i(Z)$ kovariáns komponensek kovariáns deriváltjával is megadhatjuk [1, Eq. (8.14)] (egyik a másiktól levezethető):

$$\nabla_j V_i(Z) = \frac{\partial V_i}{\partial Z^j} - \Gamma_{ij}^m V_m(Z). \quad (32)$$

A kovariáns derivált pontos fizikai értelmét a [1, 8. fejezet] és [2, 4.5. fejezet] pontosan megmagyarázza. Ennek segítségével megadhatjuk egy tenzormező divergenciáját illetve egy skalármező Laplacian-ját tetszőleges koordináta rendszerben.

Descartes koordináta rendszerben $\Gamma_{ij}^k = 0$, ezért itt $\nabla_j V^i$ megegyezik a $DV^i(x, y)$ Jacobi mátrixal. Pl.

$$\mathbf{V}(x, y) = V^1(x, y)\mathbf{Z}_x + V^2(x, y)\mathbf{Z}_y = xy\mathbf{Z}_x + (x^2 + y^2)\mathbf{Z}_y, \text{ vagyis } V^i(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Mivel $\Gamma_{ij}^k = 0$, a kovariáns derivált a következő lesz:

$$\nabla_j V^i(x, y) = \frac{\partial V^i}{\partial Z^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1}{\partial x} & \frac{\partial V^1}{\partial y} \\ \frac{\partial V^2}{\partial x} & \frac{\partial V^2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = DV^i(x, y) \quad (34)$$

2.6.3 Vektormező divergenciája

Eddigi tudásunk szerint a divergencia nem más mint a Jacobi mátrix nyoma, azaz:

$$\text{div}(\mathbf{V}(x, y)) = \text{tr}(DV^i(x, y)) = \frac{\partial V^1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V^2(x, y)}{\partial y} \quad (35)$$

Általánosságban is így van (egy kis korrekcióval):

4. definíció (Egy vektor-/tenzormező divergenciája). Egy tenzormező divergenciáját a következőképpen definiáljuk [1, Eq. (8.2)]:

$$\text{div}(\mathbf{V}(x, y)) = \text{tr}(\nabla_j V^i) = \nabla_i V^i = \frac{\partial V^i}{\partial Z^i} + \Gamma_{im}^i V^m \quad (36)$$

A tenzorkontrakciónak [1, 6.3.2. fejezet] köszönhetően a divergencia **invariáns**, azaz a *koordináták megválasztásától független*, ezért nyugodt lélekkel azt is mondhatjuk, hogy $\nabla_i V^i$ a mögöttes **invariáns** $\mathbf{V} = V^i \mathbf{Z}_i$ vektormező divergenciáját adja meg.

Mindez Matlabban

Legyen

$$\mathbf{V} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{Z}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{Z}_y = 1 \cdot \mathbf{Z}_r + 0 \cdot \mathbf{Z}_\theta \quad (37)$$

Most csak a polárkoordinátákat tekintjük: $V^{i'}(\varrho, \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

```

Vi = [ 1 ; 0 ];
% Kontravariáns derivált számítása:
Nabla_jVi = jacobian(Vi,Z);
for j = 1:n
    for i = 1:n
        for m = 1:n
            Nabla_jVi(i,j) = Nabla_jVi(i,j) + Gamma(j,m,i)*Vi(m);
        end
    end
end
% Divergencia számítása:
div_Vi = trace(Nabla_jVi)

```

$$\begin{aligned}
 \text{Nabla_jVi} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix} \\
 \text{div_Vi} &= 1/r
 \end{aligned}
 \quad \text{vagyis: } \left[\nabla_j V^{i'}(\varrho, \vartheta) \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \quad \text{div}(\mathbf{V}) = \nabla_{i'} V^{i'}(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{r}
 \quad (38)$$

Descartes koordináta rendszerben a következőt kapnánk:

$$\text{div}(\mathbf{V}(x, y)) = \text{div} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \right) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}
 \quad (39)$$

Egy általános $V^i(r, \theta)$ tenzormező kontravariáns deriváltja és divergenciája:

```

syms r t real
Vi = [ sym('V1(r,t)') ; sym('V2(r,t)') ];
assume(in(Vi, 'real'))
Nabla_jVi = jacobian(Vi,Z);
for j = 1:n
    for i = 1:n
        for m = 1:n
            Nabla_jVi(i,j) = Nabla_jVi(i,j) + Gamma(j,m,i)*Vi(m);
        end
    end
end
div_Vi = trace(Nabla_jVi)

```

$$\begin{aligned}
 \text{Nabla_jVi} &= \begin{bmatrix} \text{diff}(V1(r, t), r), \text{diff}(V1(r, t), t) - r*V2(r, t) \\ \text{diff}(V2(r, t), r) + V2(r, t)/r, \text{diff}(V2(r, t), t) + V1(r, t)/r \end{bmatrix} \\
 \text{div_Vi} &= \text{diff}(V1(r, t), r) + \text{diff}(V2(r, t), t) + V1(r, t)/r
 \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
 \left[\nabla_j V^i \right] &= \begin{pmatrix} \frac{\partial V^1(r, t)}{\partial r} & \frac{\partial V^1(r, t)}{\partial t} - rV^2(r, t) \\ \frac{\partial V^2(r, t)}{\partial r} + \frac{V^2(r, t)}{r} & \frac{\partial V^2(r, t)}{\partial t} + \frac{V^1(r, t)}{r} \end{pmatrix}, \\
 \text{div}(\mathbf{V}) = \text{tr}(\nabla_j V^i) = \nabla_i V^i &= \frac{\partial V^1(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial V^2(r, t)}{\partial t} + \frac{V^1(r, t)}{r}.
 \end{aligned}
 \quad (40)$$

2.7 Egy skalármező második kontravariáns deriváltja

Az eddig ismertetett deriváltak segítségével módunkban áll egy F skalármező második kontravariáns deriváltját is megadni. F első deriváltja $\nabla_i F$, mely egy kovariáns tenzormező, ennek is vehetjük a kovariáns deriváltját.

5. definíció. F skalármező második kontravariáns deriváltja [1, Eq. (8.25)]

$$\nabla_j (\nabla_i F) = \frac{\partial \nabla_i F}{\partial Z^j} - \Gamma_{ij}^m (\nabla_i F) = \frac{\partial^2 F}{\partial Z^i \partial Z^j} - \Gamma_{ij}^m \frac{\partial F}{\partial Z^m}
 \quad (41)$$

ami az F skalármező Hesse-mátrixának felel meg általános koordinárendszerben.

A második derivált segítségével megadhatjuk egy skalármező Laplace operátorát.

6. definíció (A Δ Laplace operátor). Egy F skalármező Laplace-át így definiáljuk [1, Eq. (8.17)]:

$$\Delta F = Z^{ij} \nabla_i \nabla_j F = \nabla^i \nabla_i F = Z^{ij} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Z^i \partial Z^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial Z^k} \right)
 \quad (42)$$

2.8 Feladatok

A továbbiakban használjuk a [1]-et. Az ott leírtak alapján válaszoljuk meg a következő kérdéseket.

8. feladat. Az 2. definíció alapján adjuk meg polárkoordinátákban, hengerkoordinátákban majd gömbkoordinátákban (*továbbiakban p.h.g.*) egy $F(\varrho, \vartheta)$ skalárfüggvény gradiensének kovariáns, majd kontravariáns komponenseit. Részletesebb leírás itt található [1, Eq. (6.49)]. A gradienst általános $F(\varrho, \vartheta)$, $F(\varrho, \vartheta, z)$, $F(\varrho, \vartheta, \varphi)$ függvényekre adjuk meg, lásd pl. (40).

9. feladat. Adjuk meg p.h.g-ben egy $\mathbf{V}$ vectormező kontravariáns deriváltját és divergenciáját.

10. feladat. Adjuk meg p.h.g.-ben egy F skalármező Laplace-át [1, Eq. (8.17, 8.25)].

11. feladat. Az 5. és 6. definíciók alapján Matlabban számoljuk ki egy konkrét skalárfüggvény pl. $F =$ második kovariáns deriváltját és Laplace-át p.h.g-ben, vagy akár ciklois koordinátákban, tetszőleges koordinátákban.

References

- [1] P. Grinfeld, *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces*. Springer New York, 2016.
- [2] P. Hraskó, “Relativitáselmélet,” *Typotex Kiadó Budapest*, 2016.