

Analízis III. 7. heti feladatok 2017. október 27.

Differenciál formák, külső deriválás $\mathbb{R}^3$ -ban.

1. Határozza meg $d\omega$ -t és $d(d\omega)$ -t az alábbi formákra:

$$(a) \omega_1 = e^x \cos(xy) \quad (b) \omega_2 = xdx + ydy \quad (c) \omega_3 = xyz \, dx \wedge dz.$$

2. • Vektormezők és formák közötti izometria ismétlése $\mathbb{R}^3$ -ban.
• deriválás, külső deriválás
• $\omega = fdx + gdy + hdz \longleftrightarrow (f, g, h)$
• dx, dy, dz , elemei formák $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ -val való analógiája

3. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$ -ban:

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \quad \tau = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz.$$

Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

Az ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G -vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

Integrálás sokaságokon.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$ -ban egy differenciál forma differenciál 2-forma:

$$(a) \omega = f(x, y, z) \, dx \wedge dy \quad (b) \omega = f(x, y, z) \, dz \wedge dx$$

Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:

$$M = \{ (u, v, \varphi(u, v)) : (u, v) \in R \}, \quad R \subset \mathbb{R}^2.$$

Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

- [HF] 5 Legyen $\mathbb{R}^3$ -ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x, y, z) \, dx + f_2(x, y, z) \, dy + f_3(x, y, z) \, dz$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ egydimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek.

6. Igazoljuk, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{ (u, v, \varphi(u, v)) : (u, v) \in R \}, R \subset \mathbb{R}^2$.)

7. Igazoljuk, hogy a *klasszikus Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{ (u, v, z) : b(u, v) \leq z \leq t(u, v), (u, v) \in R \}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

8. Igazoljuk, hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorpotenciális vektormező, akkor minden zárt S felület mentén

$$\iint_S F \cdot \underline{n} \, dS = 0,$$

ahol $\underline{n}$ a felület egységnyi normálvektora minden pontjában.