

Analízis III. 6. heti feladatok 2017. október 19.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismétlés)

1. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

2. (Részben az órai anyag speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$ -ben két vektor, és az őket tartalmazó mátrix:

$$v, w \in \mathbb{R}^n, \quad A = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2}. \quad (2)$$

Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

3. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad (3)$$

5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$ -ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.
(Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

6. Végezzük el $\mathbb{R}^3$ -ban az $\omega \wedge \tau$ külső szorzást, ha $\omega = dx_2$ és $\tau = dx_1 \wedge dx_3$.

7. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:

$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$$

8. Definíció 2.2.6. (jegyzet 37. old) szerint számoljuk ki a $dx_{13} \wedge x_4(A) := (dx_1 \wedge dx_3) \wedge dx_4(A)$ -t, ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad (4)$$

9. Adott $\mathbb{R}^2$ -ben két 1-forma: $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$, $\tau = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$. Igazoljuk, hogy $\omega \wedge \tau = D dx_1 \wedge dx_2$, ahol

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

(a) Mi lehet a hasonló állítás $\mathbb{R}^3$ -ban ill. $\mathbb{R}^n$ -ben?

(b) Mi van a 'háttér'-ben?

Differenciál formák. Külső deriválás.

10. Határozzuk meg $d\omega$ -t és $d(d\omega)$ -t az alábbi formákra:

$$(a) \omega_1 = e^{x_1} \cos(x_1 x_2) \quad (b) \omega_2 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 \quad (c) \omega_3 = x_1 x_2 x_3 \, dx_1 \wedge dx_3.$$

11. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$ -ben abban a speciális esetben, amikor

$$\omega = f dx_1,$$

ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $d(d\omega) = 0$.

12. Igazoljuk a Poincaré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$ -ban.