

Analízis III. 2. heti feladatok 2017. szeptember 22.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Legyen $F(x, y, z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \begin{pmatrix} y/z \\ z/x \\ x/y \end{pmatrix}$. Számoljuk ki a következőket:
 (a) $\operatorname{div}(F) = ?$ (b) $\operatorname{rot}(F) = ?$
2. $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(|r|^5)) = ?$
3. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
 (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
 (b) $\operatorname{div}(fF) = \langle F, \nabla f \rangle + f \cdot \operatorname{div}(F)$.
 (c) $\operatorname{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \operatorname{rot}(F)$.
 (d) $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot}(F) \rangle - \langle F, \operatorname{rot}(G) \rangle$.
4. Milyen a és b értékekre lesz konzervatív (azaz skalárpotenciális) az alábbi vektormező:

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + ayz \\ bxyz + y^2 \end{pmatrix}.$$

Erre az értékekre határozzuk meg F egy skalárpotenciálját.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

5. Speciális esetként legyen a $C \subset \mathbb{R}^2$ görbe egy valós függvény gráfja:

$$\gamma(t) = (t, \varphi(t)), \quad t \in [a, b].$$
 Mi lesz egy kétváltozós $f(x, y)$ függvény vonalintegrálja: $\int_C f(x, y) dl = ?$
6. "Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől": integráljuk az $f(x, y) = x^2 + 3y$ skalármezőt a $P(1, 2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.

$$\Gamma = \{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0, 1]\} = \{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0, 2]\}.$$
7. Adott a síkon a C egységnyezet, melynek átellenes csúcsai $(0, 0)$ és $(1, 1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x, y) = (x, y)$ vektormezőnek C -re vonatkozóan?
8. Legyen $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$.
 (a) Határozzuk meg az $F = \nabla f$ vektormezőt.
 (b) Mennyi lesz $\int_C \langle F, d\mathbf{l} \rangle$ maximális értéke a síkbeli lehetséges görbék mentén? Adjunk meg egy lehetséges görbét, ahol ez a maximális érték elérhető.
- D1* Tegyük fel, hogy az $f(x, y, z)$ és $g(x, y, z)$ függvények gradiense ugyanaz egy $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő tartományban. Igazoljuk, hogy ekkor $\exists c$ konstans, melyre $f(x, y, z) = g(x, y, z) + c$ ebben a D tartományban.
- D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\operatorname{rot}(F) = \operatorname{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről?