

Analízis III. 1. heti feladatok 2017. szeptember 14.

Ismétlés: Vektormező. Derivált.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
 - (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
 - (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.
2. Legyen $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ az a vektormező, melyre $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 2x + y^2 \end{pmatrix}$.
 - (a) $DF(x, y) = ?$
 - (b) Milyen (x, y) esetén nem invertálható a Jacobi mátrix?
 - (c) Ha F invertálható $(0, 0)$ -ban, legyen az inverze G . Mennyi $DG(0, 0)$?
3. Legyen $F(x, y, z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y} \right)^T$. Mi lesz a vektormező Jacobi mátrixa, $DF = ?$
4. Számítsa ki G deriváltját, ha $G(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$. $DG = ?$
5. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
 - (a) $\text{grad}(fg) = f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f$.
 - (b) $D(fF) = F \cdot \text{grad } f + f \cdot DF$. (A jobboldal első tagjában diadikus szorzat van.)

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$ -ben és $\mathbb{R}^3$ -ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén. Vektormező potenciálja.

6. Írjuk fel a paraméteres megadását annak az origó középpontú ellipszisnek, melynek tengelyei $2a$ és $2b$ hosszúak. Legyen Γ ennek az ellipszisnek az a negyede, melynek kezdőpontja $A(a, 0)$, végpontja $B(0, b)$. Írjuk fel paraméterezését.
7. Integráljuk az $F(x, y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt fenti Γ görbe mentén.
8. Számítsuk ki az $G(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P -be vezet.
9. Számítsuk ki az $H(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.
 - (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t - 5, t) \mid t \in [0, 3]\}$.
 - (b) Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1 -ből P_2 -be vezet.
10. Potenciálosak/e a fenti feladatban szereplő f, G, H vektormezők? Ha igen, írjuk fel egyik potenciálfüggvényüket. (Vajon egyértelmű-e a potenciálfüggvény? Miért?)
11. Egészítsük ki az alábbi állítást (többféle megoldás lehetséges):
Állítás. Adott $S \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és összefüggő tartomány. $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor F pontosan akkor potenciálos, ha
 Ez alapján ellenőrizzük le az előző feladatok számolásait.