Hasító táblázatok

8. előadás

Hasító táblázatok

- A gyakorlatban sokszor csak a BESZÚR, KERES, TÖRÖL műveleteket megvalósító dinamikus szerkezetre van szükségünk
  - Hogyan lehetne ezt hatékonyan tenni?
- Az eddigi kereső szerkezeteink
  - A kulcsok összehasonlításán alapultak
  - Végrehajtási idő $\mathcal{O}(n)$ vagy $\mathcal{O}(\log n)$ volt
- Szeretnénk az előzőnél jobbat elérni …
- Ha vektorban indexelünk, az csak $\mathcal{O}(1)$ …

Hasító táblázatok

- Vizsgáljuk meg, hogy a személyi szám alkalmas-e kulcsnak?

Mezőnév	nem	év	hó	nap	azonosító	
Példaérték	2	72	08	15	2806	
Értékek száma	2	100	12	31	999	~74M

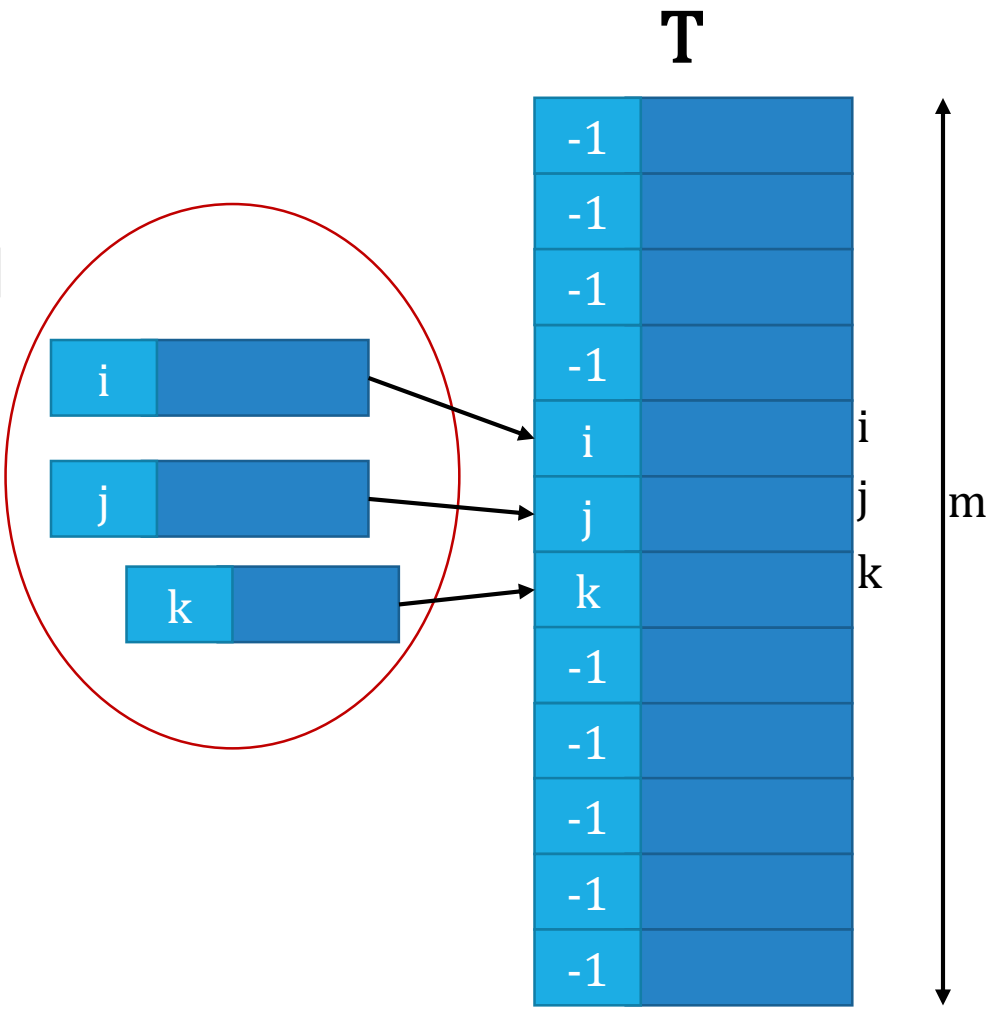
  - (Az utolsó 4 jegyből csak 3 értékes jegy, 1 a többiből képződik.)
- Ha összeszámoljuk az összes kitöltési lehetőséget, akkor ~74 milliót kapunk …
- A ~10 millió lakosra pedig elég egy ~12 millió rekordot tartalmazó fájl.
  - A személyi szám tehát nem alkalmas kulcsnak.
- Kell egy olyan h függvény, ami minden személyi számhoz rendel egy egészet a $[0; 12 * 10^6 - 1]$ intervallumból!

Hasító táblázatok

- A hash-elés jelensége
  - Adott a K kulcsok halmaza. A K elemeivel azonosított rekordok száma azonban várhatóan jóval kisebb, mint K számossága.
  - Ekkor K-t egy alkalmas h függvénnyel leképezzük az ábrázolás alapját képező kisebb tartományra. Legyen ez a $[0 \,..\, M-1]$ intervallum.
  - A $h: K \to [0 \,...\, M-1]$ függvényt hash-függvénynek nevezzük.
  - Mivel $M < |K|$, sőt általában $M \ll |K|$, ezért h nem lehet injektív, hanem szükségképpen fellép a kulcsütközés: van olyan $k \neq k'$, amelyre $h(k) = h(k')$.
  - A hasításos technikák feladata éppen az, hogy megoldást adjanak a kulcsütközésre.
- Fontos kérdés
  - Milyen hatékonyságot várhatok?

Hasító táblázatok

- A közvetlen hozzáférésű (címzésű) táblák – a legegyszerűbb eset
- Tegyük fel, hogy az elemek kulcsai különböző egész értékek a $[0, m-1]$ intervallumból, és m nem túl nagy
- Használjuk magukat a kulcsértékeket, hogy kiválasszunk egy helyet a T közvetlen hozzáférésű táblában, melyben az elemeket tároljuk
- Egy k kulcsú elem keresése: nézzük meg a k indexű elemet
  - ha van itt egy érték, megtaláltuk,
  - ha a jelző itt pl. -1, akkor nincs benne.
- Konstans idő, $\mathcal{O}(1)$
- Beszúrás, törlés is $\mathcal{O}(1)$



Hasító táblázatok

```
Közvetlen_címzésű_keresés (T, k)
        return T[k]
Közvetlen_címzésű_beszúrás (T, x)
        T[x.kulcs] ← x
Közvetlen_címzésű_törlés (T, x)
        T[x.kulcs] ← -1
```

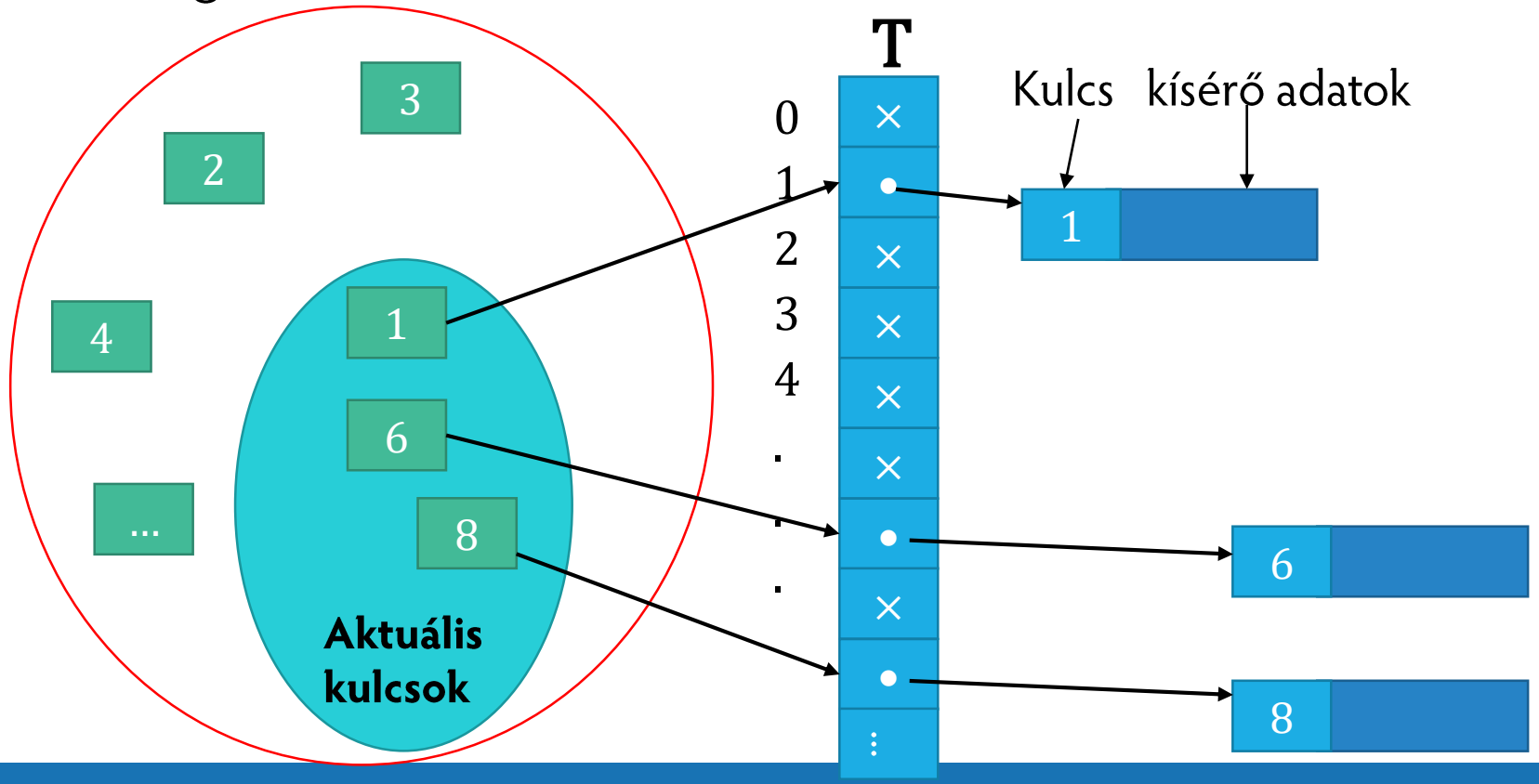
- Mindegyik $\mathcal{O}(1)$ idejű

Hasító táblázatok – megszorítások

- Megszorítások
  - Kulcsok **egészek** kell legyenek
  - Kulcsok **egyediek** kell legyenek
  - Kulcsok **kis intervallumból** kerülhetnek ki
  - A tárolás hatékonysága miatt a kulcsok sűrűn kell legyenek az intervallumban
  - Ha ritkásan vannak – sok üres hely van az értékek között – túl sok helyet használunk el, hogy a sebességet megnyerjük
    - „Hely a sebességért kereskedelem” ☺

Hasító táblázatok

- A közvetlen címzésű táblák: T-indexei a kulcsok, T-ben mutatók, csak akkor tárolom az egészet, ha kell:



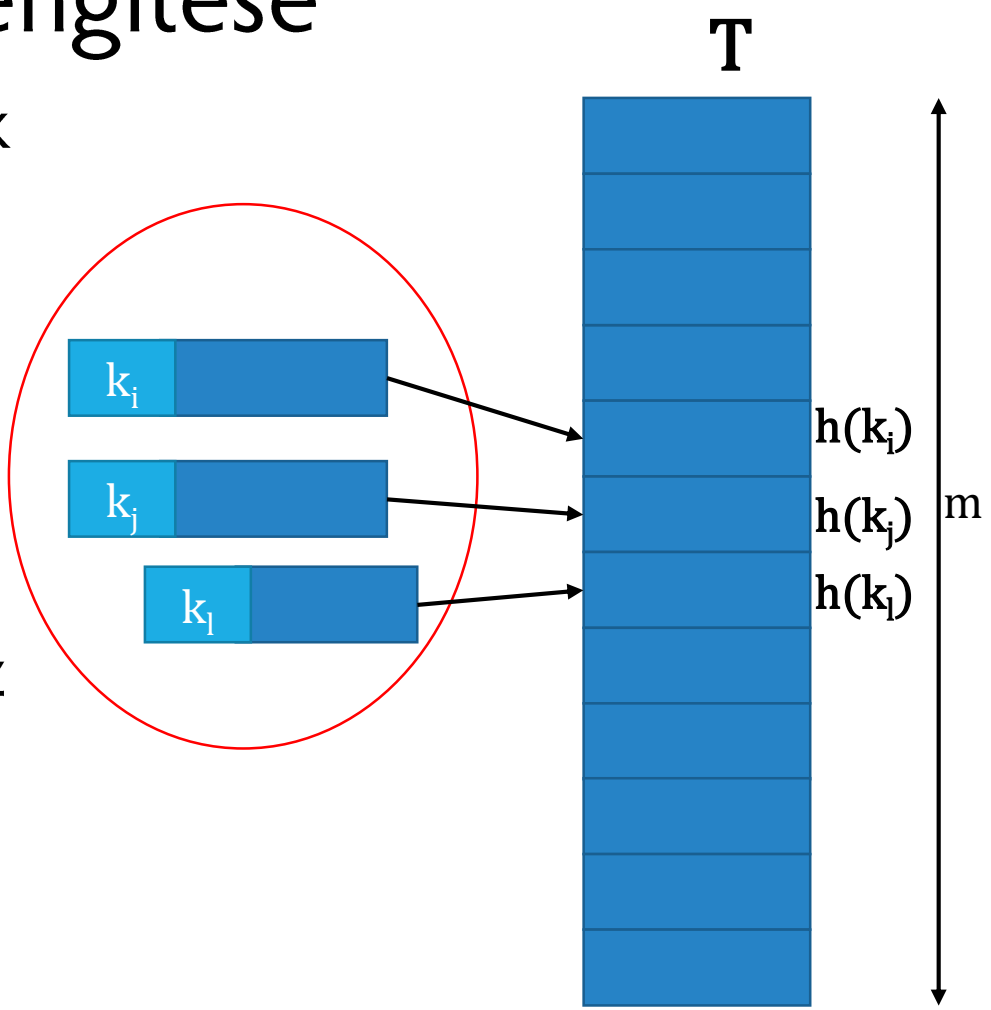
Hasító táblázatok

```
T inicializálása
  minden elemét null-ra állítjuk
Közvetlen_címzésű_keresés (T, k)
  return  „a T[k] által mutatott objektum”
Közvetlen_címzésű_beszúrás (T, x)
  helyet foglalunk x-nek,
  T[x.kulcs] mutatóját erre állítjuk
Közvetlen_címzésű_törlés (T, x)
  felszabadítjuk  a T[x.kulcs] által mutatott objektumot
  (T[x.kulcs] is null lesz!)
```

- Mindegyik $\mathcal{O}(1)$ idejű

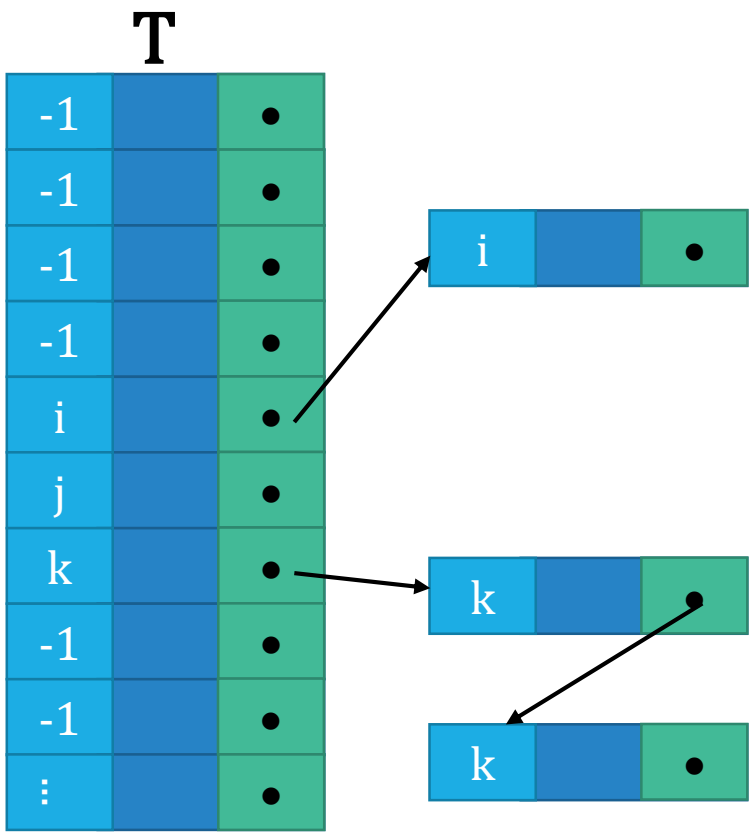
A megszorítások gyengítése

- A kulcsok egészek legyenek
  - Kell egy hash függvény $h(\text{kulcs}) \rightarrow \text{egész}$
- Ezt a függvényt a kulcsra alkalmazva egy indexet kapunk
- Ha h minden kulcsot egy egyedi egész értékre képez le a $0 \ldots m-1$ intervallumban, akkor a keresés $\mathcal{O}(1)$

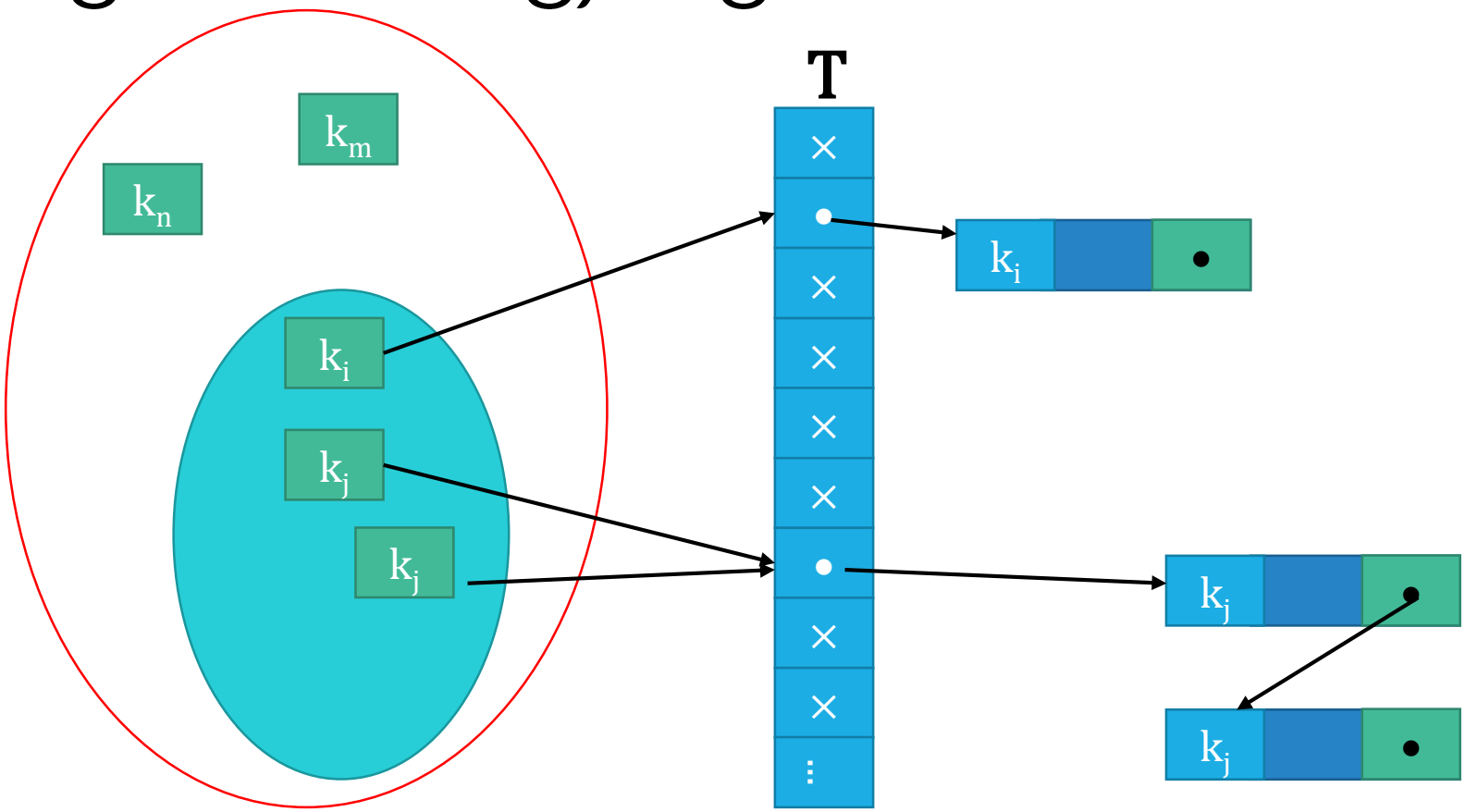


A megszorítások gyengítése

- A kulcsoknak egyedieknek kell lenniük
  - hozzuk létre a duplikátumok láncolt listáját, és ezt kapcsoljuk a táblához
  - ha egy keresésnek elég akármelyik k kulcsú elem, a végrehajtás még mindig $\mathcal{O}(1)$
- De ha az elemnek még van valami más megkülönböztető jegye is, ami meg kell egyezzen, akkor $\mathcal{O}(n_{dup\_max})$-t kapunk, ahol n_{dup_max} a duplikátumok legnagyobb száma – vagyis a leghosszabb lista hossza



A megszorítások gyengítése



Láncolásos hasítás műveletei

T inicializálása

minden elemét null-ra állítjuk

Láncolt_hasító_keresés (T, k)

a k kulcsú elem keresése a T[h(k)] listában

Láncolt_hasító_beszúrás (T, x)

helyet foglalunk x-nek,
beszúrjuk a T[h(x.kulcs)] lista elejére

Láncolt_hasító_törlés (T, x)

x törlése a T[h(x.kulcs)] listából

(T[x.kulcs] is null lesz!)

Hash függvények

- A hash függvény formája
  - Példa – egy n-karakteres kulcsot használva

```
int hash(char *s, int n)
{
    int sum = 0;
    while(n--) sum=sum+ *s++;
    return sum % 256;
}
```

    ez a függvény a $0 \ldots 255$ egy értékét adja vissza
  - a `xor` függvényt is gyakran használják

```
sum=sum^ *s++;
```

  - De tetszőleges függvény, ami a $0..m-1$-ben generál értékeket egy megfelelő (nem túl nagy) m–re jó lesz!
  - Amíg a hash függvény maga $\mathcal{O}(1)$!

Kulcsütközések

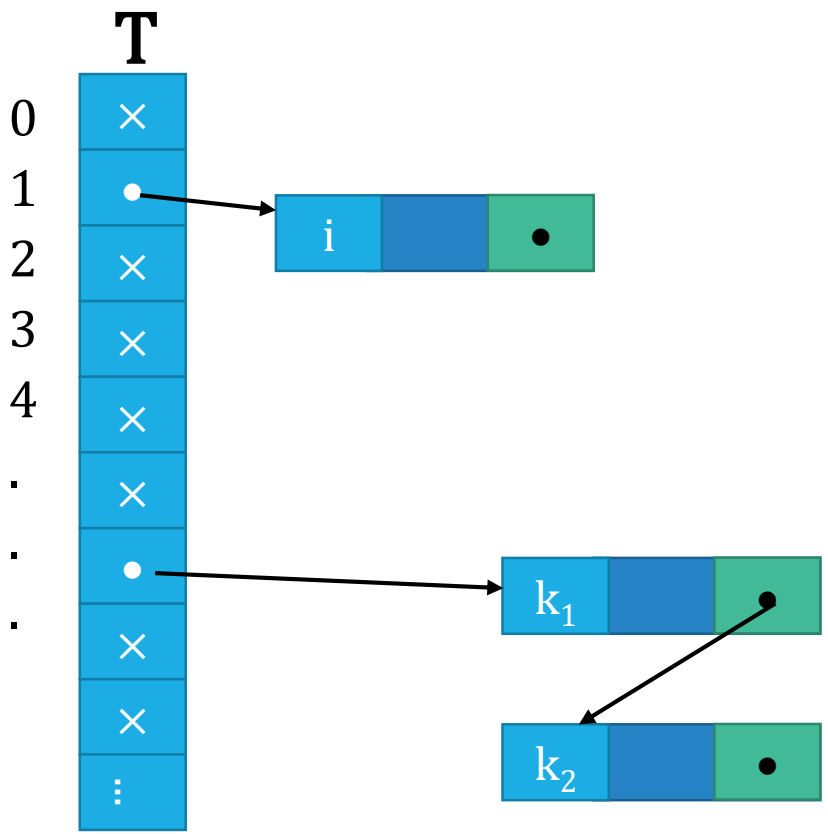
- Hash függvény
  - Ezzel a hash függvénnyel:
  - ```
    int hash(char *s, int n)
    {
        int sum = 0;
        while(n--) sum=sum+*s++;
        return sum % 256;
    }
    ```
  - `hash("AB", 2)` és `hash("BA", 2)` ugyanazt az értéket adják!
  - Ezt hívjuk kulcsütközésnek
    - Számos technikát használnak a kulcsütközés feloldására
    ```

Kulcsütközés feloldása

- Kulcsütközés
  - Akkor fordul elő, ha a hash függvény két különböző kulcshoz rendeli ugyanazt a címet
    - A táblázat fel kell ismerje és fel kell oldja ezt
    - Felismerés
      - Tároljuk az aktuális kulcsot az elemmel a hash táblában:
      - Számítsuk ki a címét k = h(kulcs)
      - Ellenőrizzük a találatot:
        - `if (table[k].key == kulcs) then találat else próbáld a következőt`
    - Javaslat
      - Számos technika – néhányat megnézünk

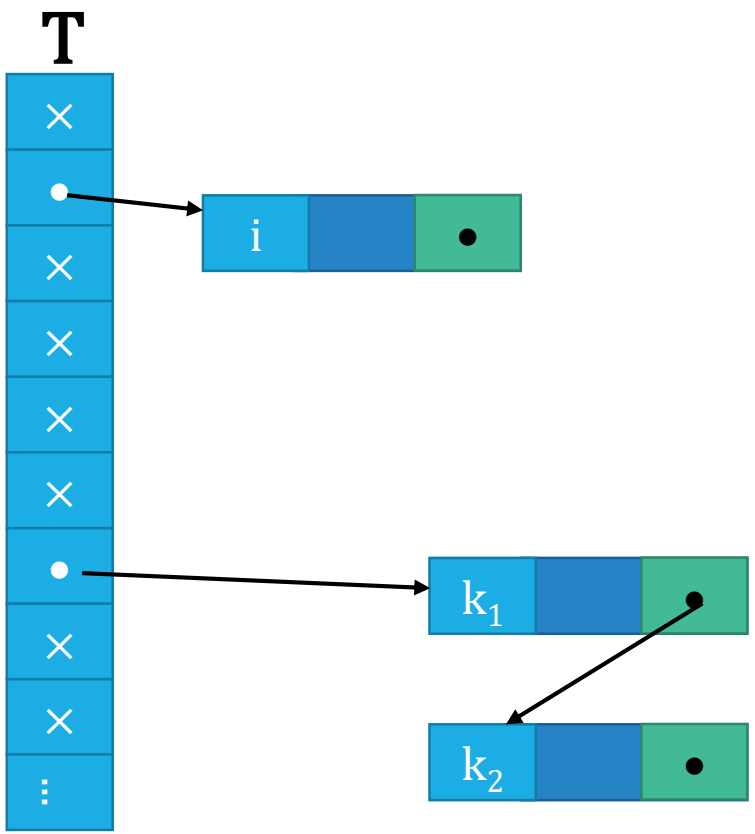
Láncolt listák

- Kulcsütközés - Javaslat
  - minden táblaelemhez egy láncolt listát rendelünk
  - Keressünk i kulcsú elemet:
  - Láncolt_hasító_keresés(T,i)
    - kiszámítjuk h(i)-t
    - keressük az i kulcsú elemet a T[h(i)] listában
    - ha NULL-t találunk, a kulcs nincs a táblában



Láncolt listák

- Kulcsütközés - Javaslat
  - minden táblaelemhez egy láncolt listát rendelünk
- Beszúrunk x-t:
  - Láncolt_hasító_beszúrás(T,x)
    - kiszámítjuk h(x.kulcs)-t
    - Beszúrunk a T[h(x.kulcs)] lista elejére
- Törlés – hasonlóan a T[h(x.kulcs)] listából



Hasító táblázatok – betöltési tényező

- Az ütközések nagyon valószínűek
- A tábla betöltési tényezőjét alacsonyan kell tartani:

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

  - n az elemek száma, m a helyek száma
- Az átlagos lánchosszúságok kiterjedt analízise ismert
- Külön láncolás
  - Minden helyhez külön adjuk a láncolt listákat
  - Jobb végrehajtást ad
  - De több helyet foglal

Láncolásos hasítás műveletigénye

- Milyen hatékonysággal működik a láncolásos hasítás?
  - Legyen T egy m rést tartalmazó hasító táblázat, amelyben n elem van.
  - Az α kitöltési tényező: $\frac{n}{m}$ = az egy láncba fűzött elemek átlagos száma.
    - α lehet kisebb, egyenlő és nagyobb is mint 1.
  - A legrosszabb esetben: minden elem egy helyre képeződik le, így n hosszú lista keletezik
    - Ez pedig $\Theta(n)$ a keresés végrehajtási ideje (plusz a h kiszámítási ideje)

Láncolásos hasítás műveletigénye

- Feltételezzük először, hogy a h hasító függvény egyenletesen osztja szét az elemeket , minden elem egyforma valószínűséggel képződik le bármelyik értékre, (ez az egyszerű egyenletes hasítási feltétel)
- Jelöljük a T[j] lista hosszát n_j-vel, ekkor

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$$

  - n_j várható értéke: $\mathrm{E}[n_j] = \frac{n}{m} = \alpha$
- Feltéve, hogy a $h(k)$ érték $\mathcal{O}(1)$ idő alatt számítható ki, akkor a k kulcsú elem keresése lineárisan függ a T[h(k)] lista hosszától.

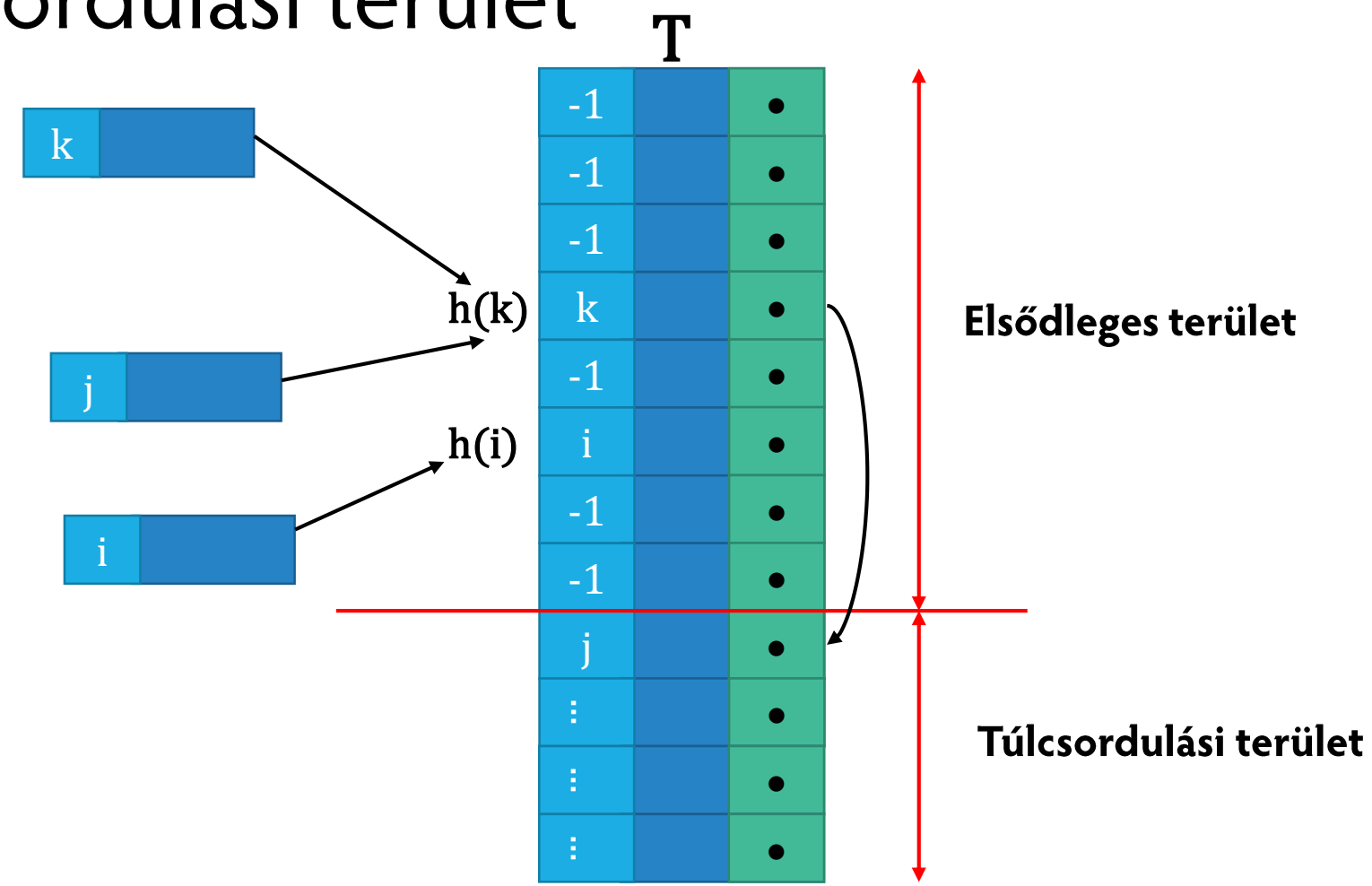
Láncolásos hasítás műveletigénye

- Ha egy hasító táblázatban az ütközések feloldására láncolást használunk és a hasítás egyszerű egyenletes, akkor a sikeres és a sikertelen keresésekre is igaz, hogy az átlagos idejük $\Theta(1+\alpha)$.
  - Bizonyítás: Cormen könyvében
- Mi következik ebből? Ha a hasító táblázat réseinek száma arányos a táblázatbeli elemek számával, akkor $n = \mathcal{O}(m)$, így $\alpha = \frac{n}{m} = \frac{\mathcal{O}(m)}{m} = \mathcal{O}(1)$.
- Optimális hash függvény esetén az az összes művelet megvalósítható $\mathcal{O}(1)$ idő alatt
  - Tehát a beszúrás/törlés/keresés megvalósul.

Túlcsordulási terület

- Túlcsordulási terület
  - a „láncolt" listát a tábla egy speciális területén hozzuk létre – ez a túlcsordulási terület
    - Tfh. $h(k) = h(j)$
    - és a k lett először tárolva
    - Beszúrjuk a j-t a hash táblába
      - Kiszámítjuk $h(j)$ értéket
      - Megtaláljuk k-t, ami a táblában már benne van
      - Megkeressük az első szabad helyet a túlcsordulási területen
      - Oda betesszük j értéket
      - k „pointere" erre mutat (a mutató itt a táblabeli index)
    - Többféle lehetőség a – lista elejére, végére is szúrhatunk be
    - Keresés – ugyanaz, mint a láncolt lista
    - Törlésnél – lehet a lista utolsó elemét idetenni, de lehet új állapotot bevezetni a töröltre, ez majd jön

Túlcsordulási terület



Nyílt címzés

- Az elemeket a táblában tároljuk.
  - Egy elem keresésénél végigmegyünk a táblázaton, amíg meg nem találjuk, vagy el tudjuk dönteni, hogy nincs benne a táblában.
  - Elem beszúrásánál kipróbáljuk az összes helyet, amíg üreset nem találunk – valamilyen stratégia szerint – ez a beszúrandó kulcs függvénye, nem a $0 \dots m-1$ felsorolás!
  - Kiterjesztjük a hash függvény értelmezési tartományát az ún. kipróbálási számmal:
    - $h: K \times \{0, 1, \dots, m-1\} \to \{0, 1, \dots, m-1\}$
    - Megköveteljük, hogy minden k kulcsra a $(h(k,0), h(k,1), h(k,2), \dots, h(k,m-1))$ kipróbálási sorozat a $\{0, 1, \dots, m-1\}$ egy permutációja legyen
      - Így előbb-utóbb minden hely szóba jön

Nyílt címzés

- Tegyük fel, hogy a T hasító táblázatban csak kulcsok vannak vagy NIL
- Beszúrás:

```
Hasító_beszúr(T,k)
i←0
repeat j←h(k,i)
  if T[j]=NIL
    then T[j]←k
      return
    else i←i+1
until i=m
error „hasító táblázat túlcsordulás”
```

Nyílt címzés

- Keresésnél aszerint keressük, ahogy a beszúrás betehette

```
Hasító_keres(T, k)
i←0
repeat j←h(k,i)
  if T[j]=k
    then return j
      i←i+1
until T[j]=NIL vagy i=m
return NIL
```

Nyílt címzés

- Törlés: bonyolultabb, ugyanis nem elég csak NIL-t írni, hiszen akkor egy következő keresés nem találná meg azokat, amelyek később vannak a táblába
  - vezessünk be a NIL-en kívül még egy szimbólumot, a TÖRÖLT-et

```
Hasító_töröl(T, k)
i←0
repeat j←h(k,i)
  if T[j]=k
    then T[j]←TÖRÖLT
      return
  i←i+1
until T[j]=NIL vagy i=m
```

Nyílt címzés

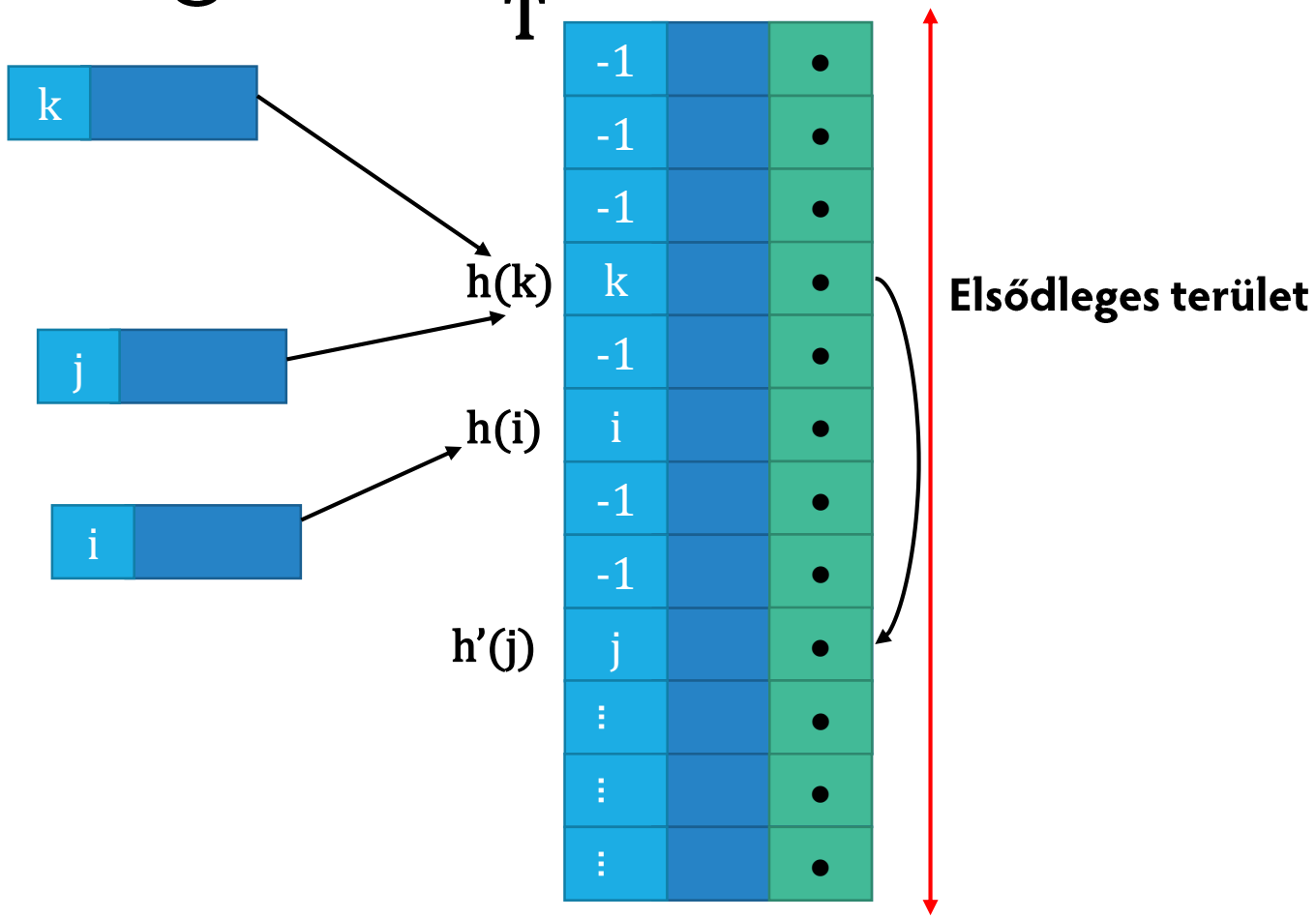
- A beszúrást is módosítani kell, hiszen most már a TÖRÖLT-be is be lehet szúrni:

```
Hasító_beszúr(T,k)
i←0
repeat j←h(k,i)
  if T[j]=NIL vagy T[j]=TÖRÖLT
    then T[j]←k
      return
    else i←i+1
until i=m
error „hasító táblázat túlcsordulás”
```

Re-hashing – kettős hashelés

- Használjunk egy második hash függvényt – h'
  - Sok variáció
  - általános név: re-hashing – kettős hashelés
- $h(k) = h(j)$
- k lett először tárolva
- Beszúrjuk j-t a hash táblába
  - Kiszámítjuk $h(j)$ értéket
  - Így megtaláljuk k kulcsot, ami már a táblában van
  - Ismételjük, míg találunk üres helyet:
    - Kiszámítjuk $h'(j)$-t
  - Betesszük j-t
- Keresés – használd $h(x)$-t, aztán $h'(x)$-t
- Egy mezőnek 3-féle státusza lehet
  - üres – foglalt – törölt (hogy a keresés folytatódhasson)

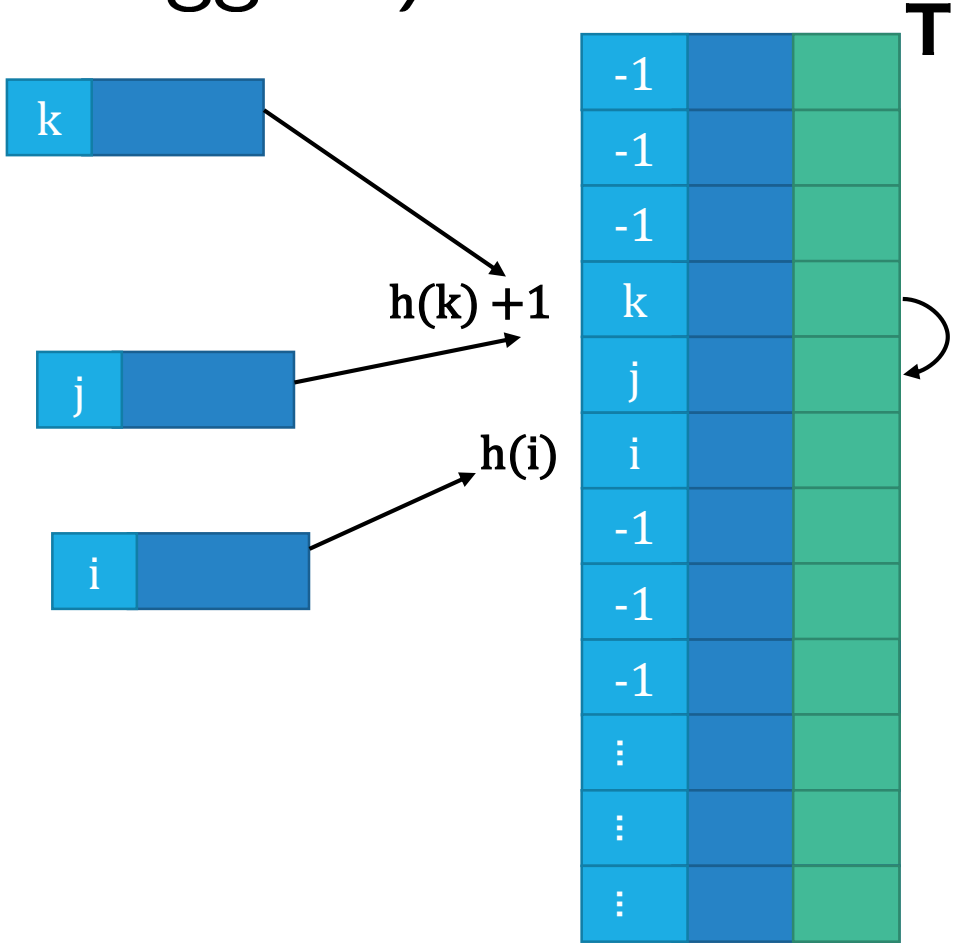
Re-hashing – kettős hashelés



Re-hash függvények

- A második hash függvény
  - Sok variáció
    - Lineáris kipróbálás
      - h: $K \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$ hash függvény,
      - $h'(k, i) = (h(k) + i) \bmod m$
    - Próbáld először a $T[h(k)]$-t, aztán
    - Vegyük a következőt ciklikusan, amíg nem találunk egy üreset
    - Rossz csomósodások lehetnek
      - A Re-hash kulcsok kitöltik az üres helyet az egyéb kulcsok között és súlyosbítják a kulcsütközés problémáit – elsődleges csomósodás

Re-hash függvények – lineáris kipróbálás



Re-hash függvények

- A második hash függvény
  - Sok variáció
    - Négyzetes próba
      - $h'(k,i) = (h(k) + c_1 i + c_2\, i^2)$ mod m az i. próbánál, ahol $c_1, c_2 \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots\ m-1$
      - Elkerüli az elsődleges csomósodást
      - Ahhoz, hogy az egész táblázatot lefedje, megkötések kellenek c_1, c_2 és m-re
      - Másodlagos csomósodás lehet:
        - Minden kulcs, amelyik ütközik h-ban ugyanazon sorozat mentén
        - Először
          - $a = h(j) = h(k)$
        - Ez után pl. $a + c,\ a + 4c,\ a + 9c, \ldots.$
        - Ez általában kisebb probléma

Re-hash függvények

- A második hash függvény
  - Sok variáció
    - Dupla hasítás
      - $h'(k,i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$ az i. próbánál $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$-re
      - A $h_2(k)$ relatív prím kell legyen a táblázat m méretéhez képest.
        - Lehet például az m-t 2 hatványnak választani és h_2-t úgy választani, hogy mindig páratlan számot állítson elő
        - Lehet úgy is, hogy m prím és h_2 mindig m-nél kisebb pozitív egészet ad vissza

Hasító táblázatok

- Potenciális $\mathcal{O}(1)$ keresési idő
  - Ha egy megfelelő $h(\text{kulcs}) \rightarrow \text{integer}$ függvényt találunk
- „Hely a sebességért" kereskedelem
  - "Teljes" hasító táblázatok nem működnek
  - Az ütközések elkerülhetetlenek
  - A hash függvény csökkenti a kulcs információtartalmát
  - Különböző feloldási stratégiák
    - láncolt listák
    - túlcsordulási területek
    - Re-hash függvények
      - Lineáris próbálás h' a $+1$
      - Négyzetes próbálás h' a $+ci^2$
      - Bármilyen más hash függvény!
        - vagy akár függvények sorozata!

A hash függvény választása

- "Majdnem minden függvény jó lesz"
  - De bizonyos függvények egyértelműen jobbak, mint mások!
- Kulcs kritérium
  - ütközések minimális száma
    - röviden tartja a láncokat
    - karbantartja az $\mathcal{O}(1)$ átlagot

Hash függvény választása

- Egyszerű egyenletes hasítás
  - Ideális hash függvény
    - $P(k) =$ annak valószínűsége, hogy a k kulcs előfordul
    - ha van m hely a hasító táblánkban,
    - egy egyenletes hash függvény, $h(k)$, biztosítani fogja

$$\sum_{k|h(k)=0} P(k) = \sum_{k|h(k)=1} P(k) = \cdots = \sum_{k|h(k)=m-1} P(k) = \frac{1}{m}$$

      - Olyan k értékekre történik az összegzés, ahol a $h(k) = 0$
    - a kulcsok száma minden helyre azonos

Egyenletes hash függvény

- Ha a kulcsok a $[0, r)$-on egyenletesen szétszórt egészek, akkor

$$h(k) = \left\lfloor \frac{mk}{r} \right\rfloor$$

  egy egyenletes hash függvény (megmutatható)
- A legtöbb hash függvény megadható oly módon, hogy a kulcsokat valamely r-re a $[0, r)$-ra képezze le.

Csökkentsünk a $[0, m)$-ra

- A kulcsokat egészek egy intervallumára képeztük le: $0 < k < r$
- Most csökkentsük ezt az intervallumot $[0, m)$-ra, ahol m a hash tábla egy elfogadható mérete
- Stratégiák:
  - Osztás – használjuk a mod függvényt
  - Szorzás
  - Univerzális hashelés

Csökkentsünk a $[0, m)$-ra

- Osztás – használjuk a mod függvényt
$$h(k) = k \bmod m$$
- m választása?
  - A 2-hatványok általában nem jók!
    $h(k) = k \; mod \; 2^n$ a k utolsó n bitjét választja

k mod 2^8 ezeket választja

`01100101110000011010`

    - Általában nem egyformán valószínű minden kombináció
    - Jobb olyan hasító függvényt választani, ami a kulcs összes bitjétől függ
    - A 2^n–hez közeli prímek jó választásnak tűnnek
  - Például ~ 4000 méretű tábla kellene, válasszunk $m = 4093$-t

Csökkentsünk a [0, m) -re

- Szorzó módszer
  - Szorozzuk meg a kulcsot egy A konstanssal, $0 < A < 1$
  - Vegyük ki belőle a tört részt $(kA - \lfloor kA \rfloor)$
  - Szorozzuk meg m-mel $h(k) = \lfloor m * (kA - \lfloor kA \rfloor) \rfloor$
  - Most m nem kritikus, és 2 hatvány választható
  - Így ez a módszer gyors egy tipikus digitális számítógépen
    - Legyen $m = 2^p$
    - Szorozzuk meg k-t (w bit) $\lfloor A \cdot 2w \rfloor$–val ← $2w$ bit szorzat
    - vedd ki a p alsó felének a legszignifikánsabb bitjeit
    - $A = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ jó választásnak tűnik (lásd Knuth)

Univerzális hashelés

- Ha egy rosszakarónk válogatja ki a hasító-táblába kerülő kulcsokat, tud adni olyan sorozatot esetleg, hogy mind az n elemre ugyanaz legyen a $h(i)$ érték, s így a keresés átlagos ideje $\mathcal{O}(n)$ legyen.
- Univerzális hasító technika: a hash-függvényt véletlenül, az aktuálisan tárolandó kulcsoktól függetlenül választjuk meg – ez jó átlagos teljesítményhez vezet.
- Alapgondolat: a hasító függvényt egy gondosan megtervezett függvényosztályból futás közben véletlenül választjuk ki
  - Így nem lehet olyan bemenet, ami biztosan a legrosszabb viselkedést váltja ki.

Univerzális hashelés

- Legyen H hasító függvények egy véges halmaza, melyek egy adott K kulcsuniverzumot a $[0, m)$ tartományba képeznek le.
- A H–t univerzálisnak hívjuk, ha $\forall x, y \in K, x \neq y$ kulcspárra azoknak a $h \in H$ hasító függvényeknek a száma, amelyre $h(x) = h(y)$ pontosan $\frac{|H|}{m}$
- Ez azt is jelenti, hogy egy véletlenül választott $h \in H$ hasító függvényre $\forall x, y \in K, x \neq y$ kulcsok közötti kulcsütközés valószínűsége pontosan $\frac{1}{m}$, ami ugyanaz, mint a $\{0, 1, \dots, m-1\}$ halmazból véletlenül kiválasztott $h(x)$ és $h(y)$ egyenlőségének valószínűsége

Univerzális hashelés

- Meg tudjuk tervezni univerzális hash függvények egy halmazát?
- Elég könnyen:
  - Válasszunk egy olyan p prímszámot, amely elég nagy, hogy minden kulcs benne legyen a $[0 \dots p-1]$-ben $(p > m)$
  - Jelölés: $Z_p = \{0,1, \dots, p-1\},\ Z_p^* = \{1,2, \dots, p-1\}$
  - Definiáljuk: $\forall a \in Z_p^*, \forall b \in Z_p,$
    - $h_{a,b}(k) = \big((a * k + b) \bmod p\big) \bmod m$
  - Az ilyen függvények osztálya:
    - $H_{p,m} = \{ h_{a,b} : a \in Z_p^*, b \in Z_p \}$
- Tétel:
  - A hasító függvények fenti egyenlőségekkel definiált Hp,m osztálya univerzális.

Hasító táblázatok – Általános tervezés

- Válasszuk meg a tábla méretét
  - A nagy tábla csökkenti az ütközések valószínűségét!
  - tábla méret: m
  - n elem
  - ütközések valószínűsége $\alpha = \frac{n}{m}$
- Válasszuk meg a tábla szervezését
  - növekedni fog a gyűjtemény?
    - Láncolt listák – Gondoljunk a fákra is!
    - A méret relatíve statikus?
    - Túlcsordulási terület vagy
    - Re-hash
- Válasszunk egy hash függvényt

Hasító táblázatok - Általános tervezés

- Válasszunk egy hash függvényt
  - Egy egyszerű (és gyors) jó lenne ...
  - Olvassunk irodalmat jó ötletekért!
- Vizsgáljuk a hash függvényt az adatainkkal
  - Fix adatokkal
    - Próbáljunk különböző h, m értékeket amíg a maximális ütközési lánc elfogadható lesz
    - Ismert hatékonyság
  - Változó adatokkal
    - Válasszunk jellemző adatokat
    - Próbáljunk különböző h, m értékeket amíg a maximális ütközési lánc elfogadható lesz
    - Általában megjósolható hatékonyság

Rendező algoritmusok

Következő alkalommal