

LINEÁRIS ALGEBRA elmélet

TÉTEL: Az n . egységgyökök csoportot alkotnak a komplex számok szokásos szorzására nézve.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\text{Zárttság: } (\varepsilon_k \varepsilon_l)^n &= \left(\cos(k+l) \frac{2\pi}{n} + i \sin(k+l) \frac{2\pi}{n} \right)^n = \\ &= \cos(k+l) n \frac{2\pi}{n} + i \sin(k+l) n \frac{2\pi}{n} = 1\end{aligned}$$

$$\text{Egység: } 1 = 1 \left(\cos \frac{0}{n} + i \sin \frac{0}{n} \right)$$

$$\text{Inverz: } \varepsilon_k \varepsilon_j = 1 \left(\cos \frac{0}{n} + i \sin \frac{0}{n} \right) \text{ alapján } \frac{k \cdot 2\pi}{n} + \frac{j \cdot 2\pi}{n} = \frac{n \cdot 2\pi}{n}, \text{ ahonnan } j = n - k$$

$$\text{Tehát } \varepsilon_k \text{ inverze } (\varepsilon_k)^{-1} = \varepsilon_{n-k}$$

Az asszociatív és kommutatív tulajdonság a valós számok összegének asszociatív és kommutatív tulajdonságából következik, hiszen két egységgyök szorzatát úgy kapjuk, hogy argumentumaikat összeadjuk

DEFINÍCIÓ: n -ik egységgyökök nevezzük a z komplex számot, ha $z^n = 1$.

TÉTEL: Az összes n . egységgyök előáll az első ($\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$) egységgyök hatványaiként.

DEFINÍCIÓ 1: Azt az ε_k n . egységgyököt, amelynek hatványai az összes többi egységgyököt előállítják, primitív egységgyöknek nevezzük.

DEFINÍCIÓ 2: Az az egységgyök, amelynek n . hatványa 1, és semelyik ennél kisebb hatványa nem 1, primitív egységgyök.

DEFINÍCIÓ 3: Ha ε_k n . egységgyök, továbbá k és n relatív prímek (nincsen olyan szám, amely mindkettőt maradék nélkül osztaná), akkor ε_k primitív n . egységgyök.

TÉTEL: Legyen az n az a legkisebb szám, amire ε_k^n egységgyök. Mivel az egységgyökök csoportot alkotnak, mindegyik hatvány egységgyök. Mivel pontosan n különböző egységgyök van, ha a hatványok mind különbözők, akkor elő is állítják a többi egységgyököt.

TÉTEL: Ha ε_k n . primitív egységgyök, akkor k és n relatív prímek (nincsen olyan egész szám, amely mindkettőt maradék nélkül osztaná).

TÉTEL: Ha n és k relatív prímek, akkor ε_k primitív n . egységgyök.

DEFINÍCIÓ: A $z = r e^{i\varphi}$ alakot, ahol r a z komplex szám abszolút értéke, φ az argumentuma, a komplex szám exponenciális alakjának nevezzük.

TÉTEL: Ha a z komplex szám gyöke egy polinomnak, akkor konjugáltja is gyöke.

ALGEBRA ALAPTÉTELE: Az n -edfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok körében. (Multipllicitással számolva a gyököket, pontosan n db komplex gyök van.



KÖVETKEZMÉNY: Miden polinom felírható gyöktényezős alakban $z_k \in \mathbb{C}$ a polinom gyöke, $a \in \mathbb{C}$ a legmagasabb fokú tag együtthatója

GYÖKTÉNYEZŐS ALAK:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z^1 + a_0 = a(z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}$$

DEFINÍCIÓ: Az $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melynek függvényértékét $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ -nal jelöljük, skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. **pozitív definit:** $\forall \mathbf{x} \in V$ esetén $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ és $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x} = 0$
2. **szimmetrikus:** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
3. **homogén:** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
4. **lineáris:** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ esetén $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

DEFINÍCIÓ: A skalárszorzattal ellátott tereket Euklideszi tereknek nevezzük

TÉTEL: Minden, véges dimenziós vektortérben megadható skalárszorzat.

TÉTEL: Minden skalárszorzatos tér normált tér

Bizonyítás:

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1. $\forall \mathbf{x} \in V \quad ||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$
 $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$ csak akkor, ha $\mathbf{x} = 0$
2. $\forall \mathbf{x} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ||\lambda x|| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} =$
 $\sqrt{\lambda \langle x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \langle \lambda x, x \rangle} =$
 $\sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| ||x||$
3. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad ||x + y|| = \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq$
 $||x|| + ||y|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$

TÉTEL: Minden normált tér metrikus tér

Bizonyítás:

$$d(x, y) := ||x - y||$$

1. $d(x, y) = ||x - y|| \geq 0$
 $||x - y|| = 0$ csak akkor, ha $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
2. $d(x, y) = ||x - y|| = ||-(y - x)|| =$
 $| -1 | ||y - x|| = d(y, x)$
3. $||x + y|| = \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq$
 $||x|| + ||y|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$

DEFINÍCIÓ: A H halmazt metrikus térnek nevezzük, ha van olyan metrikának nevezett $d: H \times H \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ függvény, amelyre a következők teljesülnek:

1. **pozitív definit:** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ -ra $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$,
 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
2. **szimmetria:** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ -ra $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
3. **háromszög egyenlőtlenség:** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H$ -ra
 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$

A metrika tehát a 3 dimenziós geometriai tér távolság fogalmának egyik általánosítása.

DEFINÍCIÓ: A V vektorteret normálnak nevezzük, ha van olyan $n: V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ függvény, az ún. norma, amelyre a következők teljesülnek: ($n(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||$)

1. **pozitív definit:** $\forall \mathbf{x} \in V$ esetén $n(\mathbf{x}) \geq 0$
 $n(\mathbf{x}) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x} = 0$
2. **homogén:** $\forall \mathbf{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ esetén
 $n(\alpha \mathbf{x}) = |\alpha| n(\mathbf{x})$
3. **háromszög egyenlőtlenség:**
 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén $n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq n(\mathbf{x}) + n(\mathbf{y})$

CAUCHY-BUNYAKOVSKIJ-SCHWARZ EGYENLŐTLENSÉG

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$$

norma függvény bevezetése:

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$$

Bizonyítás:

Tekintsük az $\langle a + \lambda b, a + \lambda b \rangle$ skalárszorzatot.

A pozitív definit tulajdonság miatt:

$$0 \leq \langle a + \lambda b, a + \lambda b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, \lambda b \rangle + \langle \lambda b, a \rangle + \langle \lambda b, \lambda b \rangle = \langle a, a \rangle + 2\langle a, \lambda b \rangle + \langle \lambda b, \lambda b \rangle = \lambda^2 \langle b, b \rangle + 2\langle a, b \rangle \lambda + \langle a, a \rangle$$

Ez a λ -ra nézve egy egyismeretlenes másodfokú egyenlőtlenség:

$$\lambda^2 \langle b, b \rangle + 2\langle a, b \rangle \lambda + \langle a, a \rangle = A\lambda^2 + B\lambda + C$$

Mivel e függvénynek legfeljebb egy gyöke lehet, a diszkrimináns nem pozitív, azaz $B^2 - 4AC \leq 0$. A megfelelő értékeket behelyettesítve:

$$4(\langle a, b \rangle)^2 - 4\langle b, b \rangle \langle a, a \rangle \leq 0, \text{ amiből } (\langle a, b \rangle)^2 = \langle b, b \rangle \langle a, a \rangle$$

TÉTEL: Ortonormális, nem nulla vektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás:

A függetlenség definíciójából indulunk ki:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$$

Azt kell bizonyítani, hogy mindegyik $\alpha_i = 0$.

Vegyük rendre az $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektorokkal való skalárszorzatot:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \quad / x_j \quad j=1, 2, \dots, k$$

Ezzel azt kapjuk, hogy $\alpha_i \langle x_i, x_i \rangle = 0$ skalárszorzat a pozitív definit tulajdonsága miatt $\langle x_i, x_i \rangle > 0$, ezért mindegyik $\alpha_i = 0$.

DEFINÍCIÓ: Egy transzformációt szimmetrikusnak nevezünk, ha van olyan bázis, amelyre nézve a transzformáció mátrixa szimmetrikus.

↓

LEMMA: Ha a leképezés $\underline{A}$ mátrixa szimmetrikus és $\langle x, y \rangle := y^T x$, akkor $\langle x, \underline{A} y \rangle = \langle \underline{A} x, y \rangle$

DETERMINÁNSOK SZORZÁS TÉTELE

$\det(\underline{A} \underline{B}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{B})$, ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ $n \times n$ -es mátrixok

DEFINÍCIÓ: Ortonormált a vektorrendszer, ha páronként ortogonális, és minden elemének normája 1.

↓

KÖVETKEZMÉNY: Minden euklideszi térnek van ortonormált bázisa

Bizonyítás: (konstruktív, megmutatjuk, hogy lehet az ortonormált rendszert létrehozni)

Legyen a norma a skalárszorzatból származtatott:

$$\|c_i\|^2 = \langle c_i, c_i \rangle$$

Tetszőleges bázisból kiindulva, a Gram-Schmidt eljárással kapott ortogonális bázis minden elemét szorozzuk ezen norma reciprokával:

$$c_i^* = \frac{c_i}{\|c_i\|}, \text{ ekkor valóban}$$

$$\|c_i^*\|^2 = \left\langle \frac{c_i}{\|c_i\|}, \frac{c_i}{\|c_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|c_i\|^2} \langle c_i, c_i \rangle = \frac{1}{\|c_i\|^2} * \|c_i\|^2 = 1$$

DEFINÍCIÓ: $\mathbf{a}$ vektor ortogonális $\mathbf{b}$ vektorra,
ha $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$

DEFINÍCIÓ: Legyen $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ egy skalárszorzat V -ben és
valamely $\mathbf{x}$ vektor normája $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$.

$$\text{Ekkor: } \cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

TÉTEL: Minden Euklideszi térben van ortogonális
bázis.

TÉTEL: Minden altérben van ortogonális bázis.

DEFINÍCIÓ: Egy transzformáció ortogonális, ha van
olyan bázis, melyben mátrixa ortogonális.

TÉTEL: Az ortogonális transzformáció megőrzi a
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ skalárszorzatot.

TÉTEL: Ortogonális transzformáció sajátértékeinek
abszolútértéke 1.

TÉTEL: Ortogonális mátrix determinánsának abszolút
értéke 1.

TÉTEL: Az euklideszi tér valamely bázisa akkor és csak
akkor ortonormált, ha egy vektor koordinátáját a
következésképpen kapjuk meg:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i, \quad \alpha_k = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_k \rangle$$

TÉTEL: Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez
tartozó sajátvektorok ortogonálisok (3 dimenzióig
merőlegesek)

TÉTEL: Ortogonális transzformáció távolságtartó,
normatartó, szögtartó, ha a függvényeket a
skalárszorzatból származtatjuk.