A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás

A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás során célunk az $\mathbb{R}^n$ tér egy $(f_1, \ldots, f_n)$ bázisából olyan $(b_1, \ldots, b_n)$ bázist konstruálni, mely

- ortonormált (azaz a bázisvektorok egységhosszúságúak, és páronként merőlegesek),
- teljesíti az $\mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k) = \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_k)$, minden $k = 1, \ldots, n$ esetén (vagyis az új bázis első k darab vektora ugyanazt az alteret generálja, mint az eredeti bázis első k darab vektora).

A módszer lépései:

1. A b_1 vektor meghatározása: megadjuk az f_1-gyel egyező irányba mutató egységvektort.
$$b_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$$
2. A b_2 vektor meghatározása: két lépésben történik; először megkeressük a megfelelő irányú $\widetilde{b}_2$ vektort, majd ezt normáljuk, azaz elosztjuk a hosszával, hogy megkapjuk b_2-t.
$$\widetilde{b}_2 = f_2 - \langle f_2, b_1 \rangle b_1, \qquad b_2 = \frac{\widetilde{b}_2}{\|\widetilde{b}_2\|}$$
(Itt $\widetilde{b}_2$ kiszámolásánál valójában f_2-ből kivonjuk f_2-nek a b_1 vektorra eső merőleges vetületét, így a kapott vektor már merőleges lesz b_1-re.)
3. A többi b_k vektor kiszámolása: hasonlóan történik, mint b_2, az alábbi képletek szerint:
$$\widetilde{b}_k = f_k - \langle f_k, b_1 \rangle b_1 - \langle f_k, b_2 \rangle b_2 - \cdots - \langle f_k, b_{k-1} \rangle b_{k-1}, \qquad b_k = \frac{\widetilde{b}_k}{\|\widetilde{b}_k\|}$$
(Itt $\widetilde{b}_k$ kiszámolásánál az f_k vektorból kivonjuk f_k-nak az összes addig megkonstruált $b_1, \ldots, b_{k-1}$ vektorra eső merőleges vetületét, így a kapott vektor ortogonális lesz az összes már „kész” bázisvektorra.)

Megjegyzés: a módszer tetszőleges $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzattal (és abból származó $\|\cdot\|$ normával) működik.
A kanonikus belső szorzattal ellátott $\mathbb{R}^n$ euklideszi vektortér esetén, ha $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ és $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ tetszőleges vektorok, akkor

- v és w belső szorzata: $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$,
- v normája/hossza: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$.

1. feladat Konstruáljunk ortonormált bázist a következő bázisból:

$$f_1 = (1, 1, 1),\ \ f_2 = (2, -1, -1),\ \ f_3 = (2, 3, 1).$$

Megoldás:

- b_1 meghatározása:

$$b_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

- b_2-höz először szükségünk van a $\widetilde{b}_2 = f_2 - \langle f_2, b_1\rangle b_1$ vektorra. Mivel

$$\begin{aligned}\langle f_2, b_1\rangle =& \left\langle (2,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle (2,-1,-1),(1,1,1)\rangle = \\ =& \frac{1}{\sqrt{3}}(2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

(ami azt jelenti, hogy f_2 és b_1 ortogonálisak), ezért

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_2 =& f_2 - \underbrace{\langle f_2, b_1\rangle}_{0} b_1 = (2,-1,-1) \\ \Longrightarrow \quad b_2 =& \frac{\widetilde{b}_2}{\|\widetilde{b}_2\|} = \frac{(2,-1,-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1).\end{aligned}$$

- b_3 meghatározása: először ismét a $\widetilde{b}_3 = f_3 - \langle f_3, b_1\rangle b_1 - \langle f_3, b_2\rangle b_2$ vektort kell kiszámolnunk.

$$\langle f_3, b_1\rangle = \left\langle (2,3,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 6$$

$$\langle f_3, b_2\rangle = \left\langle (2,3,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 1\cdot(-1)) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 0 = 0$$

Ezért

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_3 =& f_3 - \langle f_3, b_1\rangle b_1 - \underbrace{\langle f_3, b_2\rangle}_{0} b_2 = (2,3,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \\ =& (2,3,1) - \frac{6}{3}(1,1,1) = (2,3,1) - (2,2,2) = (0,1,-1).\end{aligned}$$

Innen

$$b_3 = \frac{\widetilde{b}_3}{\|\widetilde{b}_3\|} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).$$

A keresett bázis tehát

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1),\quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).$$

2. feladat Konstruáljunk ortonormált bázist a következő bázisból:

$$f_1 = (1,1,2),\ f_2 = (2,1,1),\ f_3 = (1,-1,2).$$

Megoldás:

- b_1 meghatározása:

$$b_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{(1,1,2)}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$$

- b_2 meghatározása: először a $\widetilde{b}_2 = f_2 - \langle f_2, b_1\rangle b_1$ vektort számoljuk ki. Mivel

$$\langle f_2, b_1\rangle = \left\langle (2,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 5,$$

ezért

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_2 =& f_2 - \langle f_2, b_1\rangle b_1 = (2,1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 5\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2) = \\ &= \left(\frac{12}{6},\frac{6}{6},\frac{6}{6}\right) - \left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{10}{6}\right) = \left(\frac{7}{6},\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right)\end{aligned}$$

$$\|\widetilde{b}_2\| = \sqrt{\frac{49}{36}+\frac{1}{36}+\frac{16}{36}} = \frac{\sqrt{66}}{6} \quad\Rightarrow\quad b_2 = \frac{\widetilde{b}_2}{\|\widetilde{b}_2\|} = \frac{6}{\sqrt{66}}\left(\frac{7}{6},\frac{1}{6},\frac{-4}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{66}}(7,1,-4).$$

- b_3 meghatározása: először a $\widetilde{b}_3 = f_3 - \langle f_3, b_1\rangle b_1 - \langle f_3, b_2\rangle b_2$ vektort számoljuk ki.

$$\langle f_3, b_1\rangle = \left\langle (1,-1,2), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 4$$

$$\langle f_3, b_2\rangle = \left\langle (1,-1,2), \frac{1}{\sqrt{66}}(7,1,-4)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{66}}(1\cdot 7 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-4)) = \frac{1}{\sqrt{66}}\cdot(-2)$$

Ezért

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_3 &= f_3 - \langle f_3, b_1\rangle b_1 - \langle f_3, b_2\rangle b_2 = \\ &= (1,-1,2) - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2) - \frac{1}{\sqrt{66}}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{66}}(7,1,-4) = \\ &= \left(\frac{66}{66},\frac{-66}{66},\frac{132}{66}\right) - \left(\frac{44}{66},\frac{44}{66},\frac{88}{66}\right) - \left(\frac{-14}{66},\frac{-2}{66},\frac{8}{66}\right) = \left(\frac{36}{66},\frac{-108}{66},\frac{36}{66}\right) = \\ &= \left(\frac{6}{11},\frac{-18}{11},\frac{6}{11}\right) = \frac{6}{11}(1,-3,1).\end{aligned}$$

Innen

$$\|\widetilde{b}_3\| = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2(1^2+(-3)^2+1^2)} = \frac{6}{11}\sqrt{11}$$

$$\Longrightarrow\quad b_3 = \frac{\widetilde{b}_3}{\|\widetilde{b}_3\|} = \frac{11}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\frac{6}{11}(1,-3,1) = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,-3,1).$$

A keresett bázis tehát

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2),\quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{66}}(7,1,-4),\quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,-3,1).$$