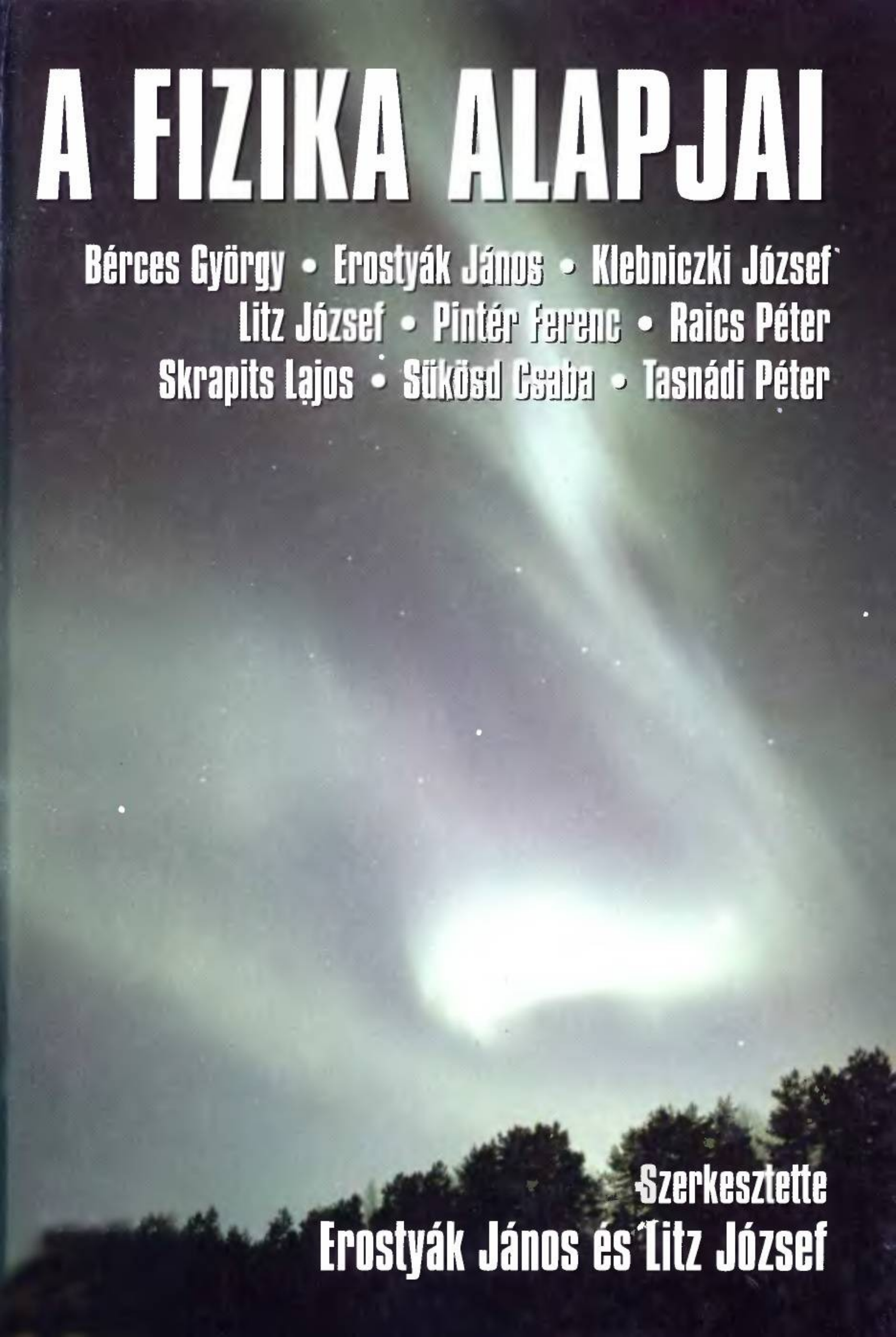
A FIZIKA ALAPJAI

Bérces György • Erostyák János • Klebniczki József
Litz József • Pintér Ferenc • Raics Péter
Skrapits Lajos • Sükösd Csaba • Tasnádi Péter



Szerkesztette
Erostyák János és Litz József

ALAPVETŐ FIZIKAI ÁLLANDÓK

A mennyiség		
neve	jele	közelítő értéke
Atomi tömegállandó (atomi tömegegység)	m_u	$1,66 \cdot 10^{-27}$ kg
Avogadro-állandó	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ l/mol
Bohr-magneton	μ_B	$9,27 \cdot 10^{-24}$ A·m^2
Bohr-sugár	a_0	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m
Boltzmann-állandó	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K
Elektromágneses hullám (fény) terjedési sebessége vákuumban	c	$3 \cdot 10^8$ m/s
Elemi (elektromos) töltés	e	$1,6 \cdot 10^{-19}$ C
Faraday-állandó	F	$9,65 \cdot 10^4$ C/mol
Gravitációs állandó	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2
Moláris gázállandó	R	8,31 J/(mol·K)
Moláris térfogat (ideális gáz normál állapotban)	$V_{m,0}$	$2,24 \cdot 10^{-2}$ m^3/mol
Mag-magneton	μ_N	$5,05 \cdot 10^{-27}$ A·m^2
Nehézségi gyorsulás (Földön)	g	9,81 m/s^2
Nyugalmi elektrontömeg	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
Nyugalmi neutrontömeg	m_n	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
Nyugalmi protontömeg	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
Planck-állandó	h	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s
Rydberg-állandó (H-atomra)	R_∞	$1,10 \cdot 10^7$ l/m
Stefan–Boltzmann-állandó	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^2·K^4)
Vákuum permeabilitása	μ_0	$1,26 \cdot 10^{-6}$ V·s/(A·m)
Vákuum permittivitása	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ C^2/(N·m^2)

SI-PREFIXUMOK

a atto- 10^{-18}	f femto- 10^{-15}	p piko- 10^{-12}	n nano- 10^{-9}	μ mikro- 10^{-6}	m milli- 10^{-3}	c centi- 10^{-2}	d deci- 10^{-1}
da deka- 10^1	h hekto- 10^2	k kilo- 10^3	M mega- 10^6	G giga- 10^9	T tera- 10^{12}	P peta- 10^{15}	E exa- 10^{18}

A FIZIKA ALAPTÖRVÉNYEI

1. Klasszikus mechanika

a) A dinamika alaptörvénye:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}, \text{ ha } \Delta t \to 0$$

b) Gravitációs erőtörvény:

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

2. Termodinamika

a) I. főtétel: $\Delta U = Q + W$

b) II. főtétel (nyílt folyamatokra): $\Delta S \geq \sum_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\Delta Q}{T}$

3. Elektromágnességtan

a) Maxwell-törvények:

$$\sum_{\text{felület}}^{\text{zárt}} \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \text{ ha } \Delta\mathbf{A} \to 0$$

$$\sum_{\text{g}}^{\text{zárt}} \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \text{ ha } \Delta\mathbf{s} \to 0 \text{ és } \Delta t \to 0$$

$$\sum_{\text{felület}}^{\text{zárt}} \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{A} = 0, \text{ ha } \Delta\mathbf{A} \to 0$$

$$\sum_{\text{g}}^{\text{zárt}} \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{s} = \mu_0 \mu_r \sum\left(i + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}\right), \text{ ha } \Delta\mathbf{s} \to 0 \text{ és } \Delta t \to 0$$

b) Elektromágneses erőtörvény:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

4. Relativitáselmélet

a) A tömeg és az energia ekvivalenciája:

$$E = mc^2$$

b) A relativisztikus tömeg:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

5. Kvantummechanika

Schrödinger-egyenlet:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_p)\Psi = 0$$

A FIZIKA ALAPJAI

TASNÁDI PÉTER – SKRAPITS LAJOS – BÉRCES GYÖRGY
Klasszikus mechanika

LITZ JÓZSEF
Termodinamika és molekuláris fizika

LITZ JÓZSEF
Elektromágnességtan

EROSTYÁK JÁNOS
Fénytan és relativitáselmélet

PINTÉR FERENC – KLEBNICZKI JÓZSEF
Atomhéjfizika

RAICS PÉTER – SÜKÖSD CSABA
Atommag- és részecskefizika

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

TARTALOM

I. B) A pontrendszerek mechanikája

I. C) A merev test mechanikája

I. D) A deformálható testek mechanikája

II. TERMODINAMIKA ÉS MOLEKULÁRIS FIZIKA

II. A) Hőmérséklet és hőtágulás

II. B) Molekuláris fizika

II. C) A termodinamika első főtétele és néhány következménye

II. D) A termodinamika második főtétele és az entrópia

II. E) Fázisátalakulások és fázisegyensúlyok

III. ELEKTROMÁGNESSÉGTAN

III. A) Elektrosztatika

IV. C) Fotometria, fényabszorpció

IV. D) Relativitáselmélet

V. ATOMHÉJFIZIKA

V. A) A kvantumfizika kialakulásának előzményei

V. B) A kvantummechanika alapjai

V. C) Molekulafizika és kvantumelektronika

VI. ATOMMAG- ÉS RÉSZECSKEFIZIKA

VI. A) Atommagfizika

Keveset tudunk, mégis csodálatos, hogy ez milyen sok,
s még csodálatosabb, hogy kevés ismeretünk
mekkora hatalom a kezünkben.

BERTRAND RUSSELL

ELŐSZÓ

A világegyetem 15 milliárd évvel ezelőtt ősrobbanással vette kezdetét, majd drámai folyamatokban kialakult a Föld, s rajta kisarjadt az élet. Ennek a nagyon kicsi részekből álló, de roppant kiterjedésű mindenségnek a bebarangolására hívjuk most a kedves Olvasót, csodáljuk meg szépségeit, az égbolt kékségét, a csillagok ragyogását és az élet sokszínűségét. Képzeletbeli utazásunk során tudatosodni fog bennünk, hogy a természet mindig bölcs és mindig tudja, hogy mit csinál, játéka és játékszabályai mindig korrektek, sohasem követ el hibát. Nekünk, gondolkodó lényeknek pedig megadatott, hogy képesek vagyunk kifürkészni titkait, s ezáltal gazdagodik szellemünk. Jól tudjuk azonban, hogy utazásunk fárasztó lesz, mert

„Értékes dolgok nem támadnak soha könnyen,
Nem születik nagyság, csak kínzó áldozatokból,
Roppant fáradozás kell a tudáshoz,
De tenger küzdelmed sose bánd."

JANUS PANNONIUS

Ezt a könyvet azzal a céllal írtuk, hogy a fizikatudomány alapjaival ismertessük meg azokat az egyetemi–főiskolai hallgatókat, akik nem a fizikát választották élethivatásuknak, hanem más tudományok (kémia, biológia, műszaki tudományok) iránt érdeklődnek, de ezek művelésekor a megfelelő fizikai ismereteket nem nélkülözhetik. Bízunk abban is, hogy könyvünket érdeklődéssel fogadják a fizikatanárok és a fizikát szerető középiskolai tanulók.

A tárgyi anyagot úgy rendszereztük, hogy átfogja a fizika legfontosabb mondanivalóit. A könyv hét részre oszlik. Ezek a következők:

I. Klasszikus mechanika
II. Termodinamika és molekuláris fizika
III. Elektromágnességtan
IV. Fénytan és relativitáselmélet
V. Atomhéjfizika

VI. Atommag- és részecskefizika
VII. Függelék: differenciál- és integrálszámítás

A tankönyv főbb jellemzői az alábbiak.

– Az ismeretközlés során az induktív utat követi: a tapasztalatból, a kísérletekből és a mérési eredményekből kiindulva jut el a fizikai törvények megfogalmazásához.

– A szakmai anyag kiválasztásakor megkülönböztetett figyelmet fordítottunk az utóbbi évtizedek, ill. évek kiemelkedő eredményeinek bemutatására és a társtudományokkal (biológiával, kémiával, műszaki tudományokkal) való kapcsolódásokra, koordinációkra.

– A könyv törzsanyagának megértése a középiskolai matematika tananyagot meghaladó felkészültséget nem igényel. Az ezen túlmenő matematikai ismereteket is felhasználó kiegészítő részeket a lapszélen függőleges vonallal jelöltük, ezek elhagyása azonban a törzsanyag megértését nem veszélyezteti.

A szerzők öt hazai egyetem több évtizedes tapasztalattal rendelkező oktatói: Bérces György (ELTE), Erostyák János (PTE), Klebniczki József (SZTE), Litz József (PTE), Pintér Ferenc (SZTE), Raics Péter (DE), Skrapits Lajos (ELTE), Sükösd Csaba (BMGE), Tasnádi Péter (ELTE).

A könyv létrehozásában több segítőtársunk volt. Köszönetet mondunk lektorainknak, DR. FARKAS ZSUZSA egyetemi adjunktusnak, DR. GROMA ISTVÁN egyetemi docensnek, DR. KÜRTI JENŐ egyetemi tanárnak és DR. RAJKOVITS ZSUZSA egyetemi docensnek gondos, minden részletre kiterjedő, segítőkész észrevételeikért. A könyv kiadásának támogatásáért, a kézirat magas színvonalú gondozásáért, az ábrák szép megrajzolásáért hálánkat fejezzük ki PALOJTAY MÁRIA főszerkesztőnek, BALASSA ZSÓFIA főszerkesztő-helyettesnek és GÖRÖG ISTVÁNNÉ műszaki szerkesztő-rajzolónak. A könyv II., III. és VII. részének szerzője külön köszönetet mond BÁNSZKI BARBARÁnak kiemelkedő technikai segítségnyújtásáért. Nélkülük ez a könyv nem születhetett volna meg. Fogadják együtt is szeretetteljes köszönetünket.

Budapest – Debrecen – Pécs – Szeged, 2002. esztendő február havában

A szerzők

A legcsodálatosabb dolog, amit megtapasztalhatunk, a titokzatosság.
Ez a forrása minden igazi tudománynak.
ALBERT EINSTEIN

BEVEZETÉS

1. § A fizikáról általában

1. A fizika tárgya és felosztása

a) A fizika tárgya

A fizikatudomány[1] bölcsőjét az ókori Görögországban ringatták, és a 18. század végéig magában foglalta a természetre vonatkozó ismeretek összességét. Ezt követően a tudatosan átgondolt, rendszeres *megfigyelések*, *kísérletek* és *mérések* eredményeként hihetetlen mennyiségű ismeret halmozódott fel. Ennek következtében az addig egységes tudomány részekre szakadt szét. A *fizika* körébe sorolták az élettelen világnak azokat a jelenségeit, amelyek nem járnak az anyag mélyreható megváltozásával, a kémia körébe pedig a mélyreható változással járó (vegyi) átalakulásokat utalták.

A fizika tárgyköre a 20. század közepétől jelentősen megváltozott. ***A ma fizikája a mindenséget alkotó élettelen és élő anyag egyetemes mozgástörvényeit vizsgálja, mert „lehetetlen a részeket az egész nélkül megismerni"*** (Blaise PASCAL, 1670). A fizika által vizsgált anyagi világ mérettartománya az elemi részecskéktől az univerzum (világegyetem) ismert határáig terjed, s így vált a fizika – mint integráló (összegező) tudomány – valamennyi természettudomány közös alapjává.

b) A fizika felosztása

A *tanulmányozott folyamatok szerint* a fizikatudomány részei a következők: mechanika, termodinamika és molekuláris fizika, elektromosságtan és mágnességtan, fénytan, relativitáselmélet, atomhéj-, atommag- és részecskefizika.

A *kutatás módszere szerint* kísérleti és elméleti fizikát szokás megkülönböztetni. A *kísérleti fizika* feladata a tapasztalati törvények gyűjtése, rendszerezése és elméleti következtetések ellenőrzése, az *elméleti fizikáé* pedig az általános törvények megkeresése és belőlük következtetések levonása.

A *kutatás céljának* hangsúlyozása esetén alap- és alkalmazott (gyakorlati) kutatásról szokás beszélni.

---

[1] A fizika elnevezés a görög φύσις [füszisz] (= természet) szóból ered.

Ezek az elhatárolások azonban csak korlátozott értelemben helytállóak: a fizika egyes részei, a kutatási módszerek és célok szorosan kapcsolódnak egymáshoz. Robert MILLIKAN szavaival (1924): ***„A tudomány két lábon halad előre, e kettő: kísérlet és elmélet."***

c) A fizika kapcsolata a többi természettudománnyal és a technikával

A fizika valamennyi természettudománnyal kapcsolatban van. A relativitáselmélet és az atomfizika vetette meg az égitestek fizikai tulajdonságaival foglalkozó tudományág, az asztrofizika alapjait. Az atomhéjfizika (ezen belül a kvantummechanika) az alapja a kémiai reakciók elméletének. A fizika és a kémia határterületén fejlődött ki a fizikai kémia. A fizika és a biológia, valamint a fizika és a geológia kapcsolata vezetett a biofizika és a geofizika kialakulásához.

Rendkívül szoros a kapcsolat a fizika és a technika között. Ez utóbbi többnyire alkalmazott fizika, és előrehaladásában általában nyomon követi a fizika fejlődését, pl. az elektromágneses indukció felfedezése vezetett a transzformátor megalkotásához. Emellett a technika saját elveket is kifejlesztett, így pl. a hőerőgépek hatásfokának javítására irányuló vizsgálatok nyomán alakult ki a termodinamika.

d) A fizikai megismerés úttörői

Az alapvető természeti törvények felfedezői mély és meghatározó befolyást gyakoroltak világunk kialakulására. A 17–19. században Galileo GALILEI (1564–1642) és Isaac NEWTON (1642–1727) a mechanika, Michael FARADAY (1791–1867) és James Clerk MAXWELL (1831–1879) az elektromágnességtan, Rudolf CLAUSIUS (1822–1888), William THOMSON [Lord KELVIN] (1824–1907) és Ludwig BOLTZMANN (1844–1906) a termodinamika alaptörvényeinek felismerésével döntően hozzájárultak a ***klasszikus fizika*** kialakulásához. A 20. század elején pedig kezdetét vette a Max PLANCK (1858–1947), Albert EINSTEIN (1879–1955), Werner HEISENBERG (1901–1976) és Niels BOHR (1885–1962) nevével fémjelzett ***modern fizika.***

Az emberi haladás igazi hőseinek munkássága nyomán kialakult fizikatudomány eredményei átszövik mindennapi életünket és bizton reméljük, hogy *„az ész és a tudás nagy művei jóval tartósabbak a hatalom és a kéz emlékműveinél"* (Francis BACON, 1605).

2. A fizikai mennyiség

A fizikai állapotokat (pl. a testek hőállapotát) és folyamatokat (pl. a munkavégzést) *fizikai jelenségeknek* nevezzük. Ezek leírására ***fizikai mennyiségek*** szolgálnak, amelyek lehetnek extenzív és intenzív mennyiségek. Az *extenzív mennyiségek* additív jellegűek, értékük az anyagban észlelhető helyi értékek összegeként adódik (pl. térfogat, tömeg, energia). Ezzel szemben az *intenzív mennyiségek* értéke a helyi értékek összegzésével nem adható meg, értékük független az anyag térfogatától és tömegétől (pl. nyomás, hőmérséklet).

A fizikai mennyiségek kapcsolatát a *mennyiségegyenletek* fejezik ki. Mennyiségegyenlet pl. az m tömegű és V térfogatú anyagot jellemző $\rho = m/V$ (tömeg-) sűrűség.

A fizikai mennyiségek közötti összefüggéseket *méréssel* állapítjuk meg. Ahhoz, hogy fizikai mennyiséget mérni tudjunk, alapul kell választani a mennyiségnek valamely rögzített értékét. A fizikai mennyiségnek (jele: x) ezt az alapul választott, rögzített értékét ***mértékegységnek*** (röviden: egységnek, jele: $[x]$) nevezzük. A megmért mennyiség és az alapul választott mértékegység hányadosát ***számértéknek*** (mérőszámnak, jele: $\{x\}$) nevezzük. Ennek ***megfelelően a fizikai mennyiség a számérték és a mértékegység szorzata:***

$$\boxed{x = \{x\} \cdot [x]} \,. \tag{1.1}$$

A fizikai mennyiségek közül egyeseket *alapmennyiségül* választottak (pl. hosszúság, idő). Ezek a többi mennyiség alapján nem definiálhatók. Minden olyan fizikai mennyiség viszont, amely nem alapmennyiség, definiálható az alapmennyiségekkel, ezért ezeket *származtatott mennyiségeknek* nevezzük (pl. a sebesség a hosszúság alapmennyiség és az idő alapmennyiség hányadosa).

Az alapmennyiségek mértékegységei az *alapegységek* [pl. méter, jele: m; másodperc (szekundum), jele: s]. A származtatott mennyiségek egységei a *származtatott egységek* (pl. méter per másodperc, jele: m/s).

Az állandó számértékű fizikai mennyiségek tényezők, együtthatók, számok vagy állandók.

– ***Tényezőnek*** (régebbi nevén faktornak) nevezzük azokat a fizikai mennyiségeket, amelyeknek mértékegysége 1 (pl. súrlódási tényező). Kivételt képeznek azok a mennyiségek, amelyeknek mértékegysége 1, de elfogadott nevük van (pl. hatásfok, relatív permittivitás).

– ***Együtthatónak*** (régebbi nevén koefficiensnek) nevezzük a mértékegységes számokat (pl. önindukciós együttható, kivétel pl. a bomlási állandó).

– A ***számok*** általában személynevekhez fűződnek (pl. Avogadro-szám, kivétel pl. a rendszám).

– Az ***állandók*** univerzális (egyetemes) természeti tényezők (pl. finomszerkezeti állandó) vagy együtthatók (pl. gravitációs állandó). Az állandók gyakran személynevekhez kapcsolódnak (pl. Avogadro-állandó, Faraday-állandó), de sok állandónak külön neve is van (pl. vákuumbeli fénysebesség, a vákuum permittivitása).

3. A Nemzetközi Mértékegységrendszer (SI)

a) Az SI alapmennyiségei és alapegységei

A nemzetközi együttműködés szükségessé tette a tudomány, a technika és a mindennapi élet valamennyi területére érvényes, összehangolt (koherens), átfogó ***Nemzetközi Mértékegységrendszer*** [franciául: Système International d'Unités, angolul: System International of Units, jele: SI (kiejtése: es-i)] kidolgozását és elfogadását (1960).

A Nemzetközi Mértékegységrendszernek hét alapmennyisége, ill. alapegysége van *(1.1. táblázat)*.

Megjegyzések:

– Régebben az alapmennyiségeken és az alapegységeken, ill. a származtatott mennyiségeken és a származtatott egységeken kívül megkülönböztettek két *kiegészítő mennyiséget* (síkszöget, térszöget) és két *kiegészítő egységet* (radiánt, jele: rad; szteradiánt, jele: sr). Az újabb nemzetközi megállapodások szerint ezek is származtatott SI-mennyiségek, ill. SI-egységek. A magyar mérésügyi rendelet ezt még nem tükrözi.

– A *radián* a kör sugarával egyenlő hosszúságú körívhez tartozó középponti szög.

– A *szteradián* a gömbsugár négyzetével egyenlő területű gömbfelületrészhez tartozó középponti térszög.

Az SI alapmennyiségei és alapegységei *1.1. táblázat*

Sorszám	Az alapmennyiség		Az SI-alapegység		
	neve	jele	neve	jele	meghatározása
I.	hosszúság	l	méter	m	A *méter* annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban 1/299 792 458-ad másodperc alatt tesz meg.
II.	tömeg	m	kilogramm	kg	A *kilogramm* az 1889. évben Párizsban megtartott Első Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg nemzetközi etalonjának elfogadott, a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban, Sèvres-ben őrzött platina–irídium henger tömege.
III.	idő	t	másodperc (szekundum)	s	A *másodperc* az alapállapotú cézium–133-atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama.
IV.	elektromos áramerősség	I	amper	A	Az *amper* olyan állandó elektromos áram erőssége, amely két párhuzamos, egyenes, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kicsiny kör-keresztmetszetű és vákuumban egymástól 1 méter távolságban levő vezetőben áramolva, e két vezető között méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ newton erőt hoz létre.
V.	termodinamikai hőmérséklet	T	kelvin	K	A *kelvin* a víz hármaspontja termodinamikai hőmérsékletének 1/273,16-szorosa.
VI.	anyagmennyiség	n	mól	mol	A *mól* annak a rendszernek az anyagmennyisége, amely annyi elemi egységet tartalmaz, mint ahány atom van 0,012 kilogramm tiszta szén–12-ben.
VII.	fényerősség	I_v	kandela	cd	A *kandela* az olyan fényforrás fényerőssége adott irányban, amely $540 \cdot 10^{12}$ hertz frekvenciájú monokromatikus fényt bocsát ki, és sugárerőssége ebben az irányban 1/683-ad watt per szteradián.

b) A prefixumok

Az SI-egységek a gyakorlatban sokszor túlságosan nagyoknak vagy kicsinyeknek bizonyulnak. Ezért az alapegységeket 10-nek meghatározott pozitív vagy negatív egész kitevőjű hatványaival, az ún. ***prefixumokkal*** (decimális szorzótényezőkkel) szorozzuk *(1.2. táblázat)*.

SI-egységekhez alkalmazható prefixumok *1.2. táblázat*

a atto- 10^{-18}	f femto- 10^{-15}	p piko- 10^{-12}	n nano- 10^{-9}	μ mikro- 10^{-6}	m milli- 10^{-3}	c centi- 10^{-2}	d deci- 10^{-1}
da deka- 10^{1}	h hekto- 10^{2}	k kilo- 10^{3}	M mega- 10^{6}	G giga- 10^{9}	T tera- 10^{12}	P peta- 10^{15}	E exa- 10^{18}

Megjegyzések:

– A 10^{3n} (n = ±1, ±2, ..., ±6) alakú prefixumok korlátozás nélkül használhatók. Az ezekkel képezett egységek az *ajánlott prefixált SI-egységek.*

– A prefixum nevét és jelét egybeírjuk a mértékegység nevével, ill. jelével (pl. kilométer, jele: km).

– Összetett prefixumot nem szabad alkalmazni (pl. mμm helyett nm írandó).

– A *hekto- prefixum* SI-egységgel kapcsolatban nem használható, de a liter (jele: l vagy L) és a meteorológiában (légkörtanban) a pascal (jele: Pa) egységgel kapcsolatban igen (1 hl = 10^2 l, 1 hPa = 10^2 Pa). – A *deka- prefixum* csak a grammal kapcsolatban használható, a dekagramm jele dag, de dkg is lehet (1 dkg = 10 g). – A *deci- prefixum* csak a méterrel kapcsolatban használható (1 dm = 10^{-1} m). – A *centi- prefixum* csak a méterrel, a grammal és a gray[2]-jel kapcsolatban használható (1 cm = 10^{-2} m, 1 cg = 10^{-2} g, 1 cGy = 10^{-2} Gy). – A hekto, a deka, a deci és a centi prefixumokkal képzett egységek a *megengedett prefixált SI-egységek.* – A kilogramm alapegység már a nevében tartalmazza a kilo prefixumot, ezért decimális többszöröseinek képzésekor a prefixumot a gramm nevéhez kell kapcsolni (pl. 15 Mg = 15 · 10^6 g = 15 · 10^3 kg = 15 t).

– Tilos prefixumokat kapcsolni a fokhoz, az ívperchez, az ívmásodperchez, a perchez, az órához, a naphoz, a héthez, a hónaphoz, az évhez, a Celsius-fokhoz, a kelvinhez és a hektárhoz.

– A számításoknál ajánlatos olyan prefixumot választani, hogy a számérték (mérőszám) 0,1 és 1000 között legyen (pl. 15 000 m helyett 15 km, 0,003 m helyett 3 mm).

– Az egységek nevét és jelét általában kisbetűvel írjuk (pl. méter, jele: m). A személynevekből származó egységek nevét kisbetűvel, de jelét nagy kezdőbetűvel kell írni (pl. volt, jele: V).

[2] A gray [gréj] az elnyelt sugárdózis SI-egysége (165. §).

4. A törvényes mértékegységek

Magyarországon a törvényes mértékegységek a következők:

a) Az SI-egységek

b) A prefixált SI-egységek

c) Az SI-n kívüli, korlátozás nélkül használható mértékegységek

– *Térfogat-mértékegység* a liter, jele: l vagy L, $1\ \mathrm{l} = 1\ \mathrm{dm}^3 = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$.
– *Síkszögmértékegységek* a fok, jele: °; az ívperc, jele: '; az ívmásodperc, jele: ".
– *Tömegmértékegység* a tonna, jele: t, $1\ \mathrm{t} = 10^3\ \mathrm{kg}$.
– *Időmértékegységek* a perc, jele: min, 1 min = 60 s; az óra (hora), jele: h, 1 h = 60 min = 3600 s; a nap (den), jele: d, 1 d = 24 h = 86 400 s; a hónap; az év (annus), jele: a, 1 a ≈ 365,24 d.
– *Sebesség-mértékegység* a kilométer per óra, jele: km/h, $1\ \mathrm{km/h} = \dfrac{1}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}$.
– *Munka- (energia-) mértékegység* a watt·óra, jele: W · h, 1 W · h = 3600 J.
– *Hőmérséklet-mértékegység* a Celsius-fok [celziusz-fok], jele: °C.

d) Az SI-n kívüli, kizárólag meghatározott szakterületen használható mértékegységek

– *Terület-mértékegység* a hektár, jele: ha, $1\ \mathrm{ha} = 10^4\ \mathrm{m}^2$. Csak földterület meghatározására használható mértékegység.
– *Nyomásmértékegység* a bar, jele: bar, $1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$. Csak folyadékok és gázok nyomásának meghatározására használható mértékegység.
– *Energia-mértékegység* az elektronvolt, jele: eV, $1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$ (69. § 6.). Csak az atomhéj-, az atommag- és a részecskefizikában alkalmazható.

5. A dimenzió

A dimenzió olyan matematikai kifejezés, amely megmutatja, hogy valamely fizikai mennyiség – a mértékegységtől függetlenül – milyen kapcsolatban van az alapmennyiségekkel.

Nemzetközi ajánlás szerint az SI-alapmennyiségek dimenzióinak jelei az alábbiak:

hosszúság:	L
tömeg:	M
idő:	T
elektromos áramerősség:	I
termodinamikai hőmérséklet:	Θ
fényerősség:	J
anyagmennyiség:	N

Ennek megfelelően pl. a sebesség dimenziója a hosszúság dimenziójának (L) és az idő dimenziójának (T) a hányadosa, vagyis L / T.

A Nemzetközi Mértékegységrendszer alkalmazása elvileg feleslegessé teszi a dimenzió használatát, mert az SI-egység a dimenzióval egyenértékű információt ad a mennyiségről. Ugyanis minden alapdimenziónak megfelel egy alapegység, a dimenzióazonosság pedig ugyanazt fejezi ki, mint a mértékegységek egyenlősége. Ez az oka annak, hogy az Olvasó könyvünknek csak a mechanika részében találkozik a dimenzió-fogalommal.

I. rész

KLASSZIKUS MECHANIKA

Írta: DR. TASNÁDI PÉTER, SKRAPITS LAJOS, DR. BÉRCES GYÖRGY

A ***mechanika*** a fizika tudományának az anyagi testek mozgásával foglalkozó fejezete. Feladata a mozgások törvényeinek és a nyugalom feltételeinek megállapítása. A mechanikán belül a GALILEI és NEWTON nevével fémjelzett *klasszikus mechanika* a viszonylag kis sebességű mozgásokkal, a *relativisztikus mechanika* pedig a nagy sebességű mozgásokkal foglalkozik (129. § – 132. §).

A következőkben a klasszikus mechanikát az alábbi felosztás szerint tárgyaljuk:

I. A) ***Az anyagi pont mechanikája***
- 1. *Az anyagi pont kinematikája*
- 2. *Az anyagi pont dinamikája*

I. B) ***A pontrendszerek mechanikája***
- 1. *A pontrendszer mozgására vonatkozó tételek*
- 2. *Speciális pontrendszerek mozgása*

I. C) ***A merev test mechanikája***
- 1. *Általános leírás*
- 2. *Merev test speciális mozgása*

I. D) ***A deformálható testek mechanikája***
- 1. *Rugalmas alakváltozások*
- 2. *Nyugvó folyadékok és gázok mechanikája*
- 3. *Folyadékok és gázok áramlása*
- 4. *A hullámmozgás*

I. A) AZ ANYAGI PONT MECHANIKÁJA

A testek mozgását vizsgálva a test méretei gyakran elhanyagolhatóak az elmozdulásokhoz képest. Ilyenkor a test egyetlen ponttal helyettesíthető. A következőkben az ilyen pontszerű testek mozgásával foglalkozunk.

A mechanikának az az ága, amely a mozgásokat keletkezésükre való tekintet nélkül írja le, a *kinematika*. A *dinamika* viszont azokat az okokat vizsgálja, amelyek létrehozzák a mozgásokat és a testek mozgásállapot-változását.

I. A) 1. AZ ANYAGI PONT KINEMATIKÁJA

2. § A mozgások leírása, vonatkoztatási rendszer

A *mozgás* az ember egyik legősibb tapasztalata. Mozgás közben a testek egymáshoz viszonyított helye, helyzete változik. Ahhoz, hogy egy test mozgását leírhassuk, célszerű kiválasztani egy másik testet – *vonatkoztatási rendszert* –, amelyhez viszonyítva megadjuk a szóban forgó test hely-, illetve helyzetváltozását. Vonatkoztatási rendszer lehet például a tanterem, amelyhez viszonyítva leírjuk a kísérletekben felhasznált testek mozgását. Hasonlóan vonatkoztatási rendszer lehet a Föld, amikor a Hold vagy a mesterséges holdak mozgását tanulmányozzuk, illetve a Nap, a bolygók mozgásának leírásakor.

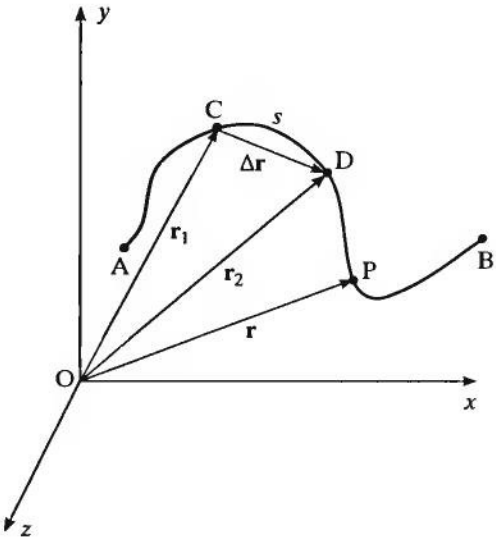
Az anyagi pont mozgását a vonatkoztatási rendszerhez rögzített *koordináta-rendszerben* írjuk le (**2.1. ábra**).

A koordináta-rendszer kezdőpontjából (origójából) az anyagi ponthoz húzott irányított szakaszt, **r**-t *helyvektornak* nevezzük. A helyvektor a mozgás során változik, azaz **r** az idő függvénye, amit röviden így jelölünk: $\mathbf{r}(t)$.

Azt a görbét, amelyet az anyagi pont mozgása során leír, a mozgás pályájának nevezzük ($\overset{\frown}{AB}$). A *pálya* egészének vagy egy részének hossza az *út* $s(=\overset{\frown}{CD})$. A pálya kezdő- és vég-pontját összekötő irányított szakasz az *elmozdulás* ($\overrightarrow{CD} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}$), vagyis a helyvektor megváltozása, miközben az anyagi pont C-ből D-be jutott. Az ábráról is leolvasható, hogy a megtett út hossza és az elmozdulás nagysága általában nem egyenlő, vagyis hogy $s \neq |\Delta\mathbf{r}|$.

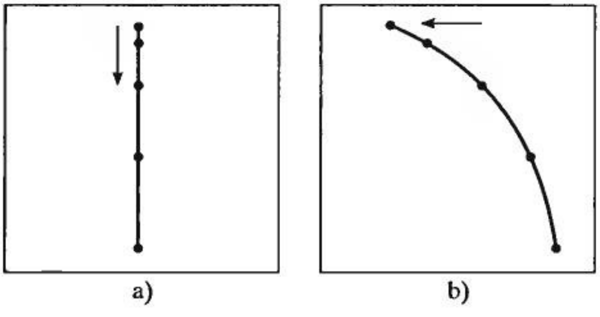
A pálya alakja általában függ a vonatkoztatási rendszertől. Például a leejtett test a tanteremhez viszonyítva *függőleges egyenest*, a mögötte mozgatott függőleges papírlaphoz, mint vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva pedig *görbét* ír le (**2.2. ábra**).

A test mozgásának leírása azt jelenti, hogy megadjuk a helyvektor nagyságát és irányát minden időpillanatban, vagy ami ezzel egyenértékű, a helyvektor koordinátáinak $x(t), y(t), z(t)$ értékét, minden pillanatban.



2.1. ábra

A mozgások kinematikai leírása során arra a kérdésre keresünk választ, hogyan mozognak a testek, hogyan függ a megtett út, elmozdulás, helyvektor az időtől. Eközben új fizikai fogalmakat is bevezetünk (sebesség, gyorsulás), hogy a mozgás részleteiről további információkat szerezzünk. Először a legegyszerűbb pályán, az *egyenes vonalon* történő mozgásokat vizsgáljuk.



2.2. ábra

3. § Egyenes vonalú mozgások

1. Egyenes vonalú egyenletes mozgás

A szállítószalagon fekvő tégla, a mozgólépcsőn álló utas, az egyenes, nyílt pályán haladó vonat, a derült égen egyenes kondenzcsíkot húzó repülőgép a Földhöz képest – szemmel láthatóan – *egyenes vonalú mozgást* végez. Ha valamilyen idő- és hosszúságmérő eszközzel megmérjük a fent említett testek által az egyenlő időközök alatt megtett utat, arra az eredményre jutunk, hogy mindegyik esetben a megtett út és a közben eltelt idő hányadosa az egyes mozgásokra jellemző állandó: $\frac{\Delta s_1}{\Delta t} = c_1, \frac{\Delta s_2}{\Delta t} = c_2, \frac{\Delta s_3}{\Delta t} = c_3, \ldots$ stb.

Akármilyen időtartamot is választunk, a mozgás során megtett út és a közben eltelt idő egymással egyenesen arányos: $\Delta s \sim \Delta t$, illetve $s \sim t$, vagy $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s}{t} =$ állandó.

Az ilyen típusú mozgásokat *egyenletes mozgásoknak* nevezzük. Az út és az idő hányadosaként kapott állandó annak a mértéke, hogy *milyen gyorsan* mozog a test. Ezért ezt az állandót új fogalomként vezetjük be, és a test ***sebességének*** nevezzük:

$$\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = v}, \qquad \text{illetve} \qquad \boxed{\frac{s}{t} = v}. \tag{3.1,2}$$

Ez utóbbiból

$$s = vt. \tag{3.3}$$

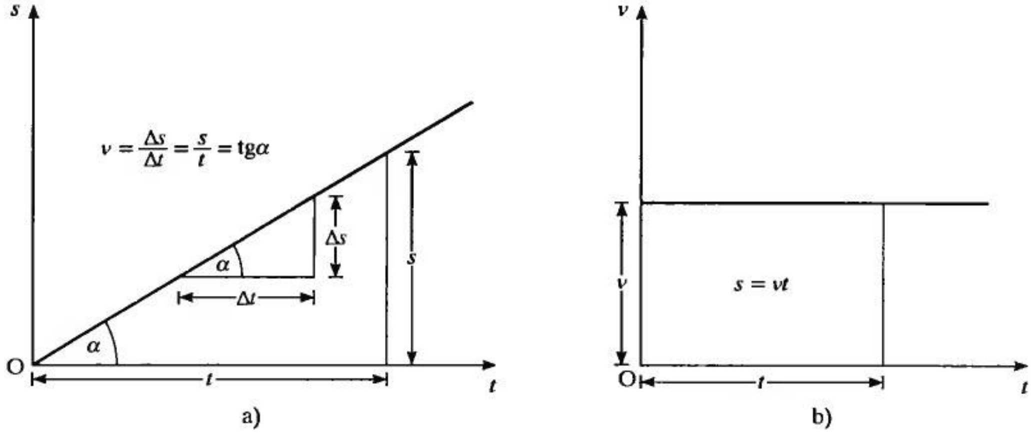
[s = út, a spatium (latin szó) kezdőbetűjéből és hasonlóan t = idő (tempus), v = sebesség (velocitas).]

A sebesség származtatott fizikai mennyiség, és megmutatja az egységnyi idő alatt megtett utat; – dimenziója a hosszúság dimenziójának (L) és az idő dimenziójának (T) a hányadosa, vagyis L/T; – SI-egysége a méter per másodperc, jele: m/s. Meghatározása: 1 m/s annak az anyagi pontnak a sebessége, amely 1 s alatt 1 m utat tesz meg. Ajánlott prefixált SI-egysége: km/s. Megengedett prefixált SI-egysége: cm/s. Törvényes, nem SI-egysége a km/h.

Ha az egyenes vonalú egyenletes mozgás út–idő törvényét ábrázoljuk az (s, t) koordináta-rendszerben, az origón átmenő, valamilyen (tg $\alpha \neq 0$) meredekségű egyenest kapunk, a (v, t) rendszerben pedig az időtengellyel párhuzamos egyenest (**3.1/a, b. ábra**).

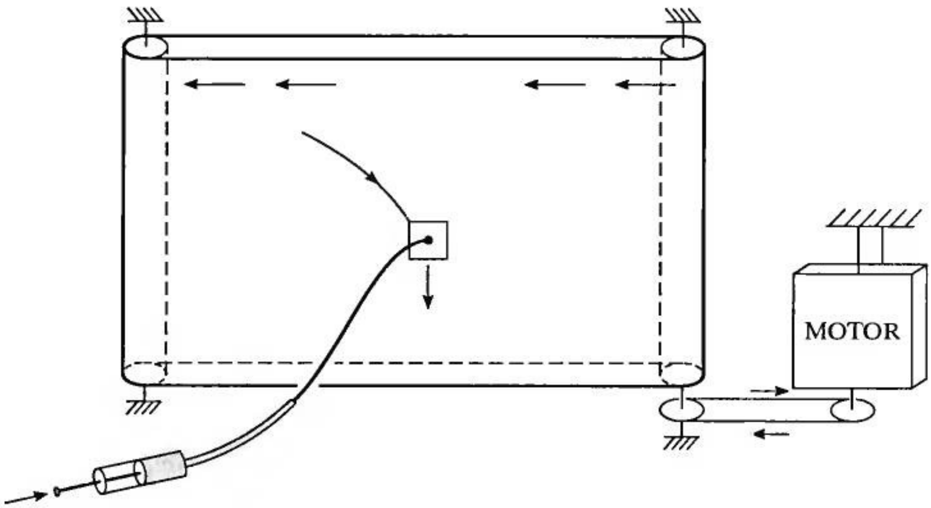
A mozgás geometriai ábrázolásából szemléletesen adódik a sebesség nagysága mint az egyenes meredeksége, valamint a megtett út számértéke mint a sebesség–idő grafikon alatti terület nagysága (a megfelelő mértékegységekben mérve).

Egyenes vonalú egyenletes mozgást végez például a ferdére állított, vízzel töltött üvegcsőben (Mikola-csőben) mozgó buborék, vagy az egyenletesen forgó motorral hajtott végtelenített „függőleges szállítószalag” (vertikális kinematográf). A függőleges szállítószalag a mozgások vizsgálatában gyakran használható, ezért érdemes az eszköz felépítésével részletesebben is megismerkedni. Az eszköz lelke a két csapágyazott, függőleges hengerre felfe-



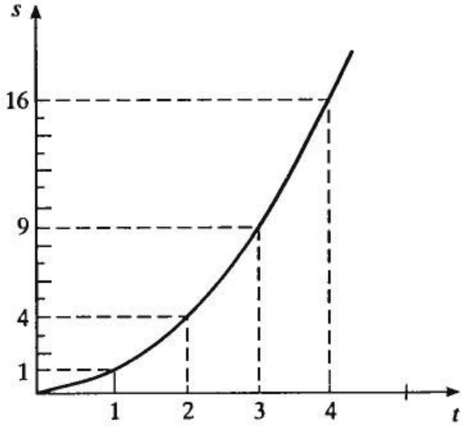
3.1 ábra

szített papírszalag, amely motormeghajtással egyenletesen mozgatható (**3.2. ábra**). Mivel a szalag tetszőleges pontja (lásd a nyilat) az idővel egyenesen arányos utat tesz meg, $s \sim t$, ezért a mozgó szalagot időmérőként – óraként – használhatjuk. A szalag előtt függőlegesen mozgó, lyukas testbe illeszkedő, szelepgumis injekciós fecskendőből színes folyadékot fecskendezünk a szállítószalagra. Ily módon a test saját maga rajzolja fel mozgásának kitérés–idő grafikonját. Ezt a kísérleti görbét kiértékelve meghatározhatjuk az út–idő összefüggést. A mozgást leíró függvényből pedig matematikai műveletek segítségével további, a mozgást jellemző mennyiségeket kaphatunk.



3.2. ábra

2. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás



3.3. ábra

Lejtőn gördülő golyó, szabadon eső test, induló jármű a mozgás kezdetétől számítva – szemmel láthatóan – egyre gyorsabban mozog. Ha az előző pontban ismertetett szállítószalag előtt, csigán átvetett fonal segítségével, „ellensúllyal" felhúzzuk a fecskendővel ellátott testet, akkor az „időmérő" szalagra a test a **3.3. ábrán** látható út–idő görbét rajzolja le. A grafikon kiértékeléséből kiderül, hogy a test által megtett út a mozgás kezdetétől számított idő négyzetével arányos, vagyis

$$s \sim t^2, \quad \text{illetve} \quad s = kt^2, \tag{3.4,5}$$

ahol k a mozgásra jellemző állandó.

További mérésekkel meggyőződhetünk arról, hogy a bevezető példákban említett esetekben is ilyen típusú – a *négyzetes úttörvény* szerint lefolyó – mozgásokról van szó.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy mekkora az így mozgó test sebessége, illetve hogy mit értsünk a nem egyenletesen mozgó test sebességén?

Az egyenletesen mozgó test esetén definiált sebesség most nyilvánvalóan más és más értéket szolgáltat attól függően, hogy a $\bar{v} = s/t$ *átlagsebességként* bevezetett sebességet mekkora időtartamra számítjuk; eszerint

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{kt^2}{t} = kt, \tag{3.6}$$

vagyis $\bar{v}$ az idővel egyenesen arányos. [Az átlagértéket a fizikai mennyiség (pl. sebesség) jele fölé húzott vízszintes vonallal jelöljük.] Ez a sebesség azonban nem ad felvilágosítást a mozgás részleteiről; arról, hogy adott helyen (időpillanatban) milyen gyorsan mozog a test. Ezért célszerű az átlagsebességet rövid útszakaszra, illetve rövid időtartamra kiszámítani.

Számítsuk ki tehát az átlagsebesség értékét arra a Δs útra, amelyet a test Δt idő alatt tett meg. A (3.5) figyelembevételével

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{k(t+\Delta t)^2 - kt^2}{\Delta t} = 2kt + k\Delta t, \tag{3.7}$$

vagyis az átlagsebesség függ attól, hogy mennyi idő telt el a mozgás kezdetétől a sebességmérés kezdetéig (t), és mennyi ideig mértünk (Δt). A (3.7)-ből látható, hogy $\bar{v}$ annál pontosabban jellemzi a t időhöz tartozó *pillanatnyi sebesség-állapotot*, minél kisebbre választjuk a Δt mérési időt.

A most alkalmazott eljárást a konkrét mozgástól függetlenül definícióként használjuk. A t időpillanatbeli v pillanatnyi sebességet a $\bar{v}$ átlagsebességek sorozatának határértékeként definiáljuk, amikor a Δt időtartam tart a nullához ($\Delta t \to 0$).

Matematikai formában a v pillanatnyi sebesség:

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}} \,. \tag{3.8–10}$$

(Olvasd: v egyenlő limesz delta es per delta té, midőn delta té tart nullához. Az idő szerinti deriváltat gyakran a függvény jele fölé helyezett ponttal jelöljük: $\dot{s}$.)

A négyzetes úttörvény szerint mozgó test pillanatnyi sebessége tehát

$$v = 2kt\,, \tag{3.11}$$

ami kétszerese a (3.6) alatt definiált átlagsebességnek.

A test pillanatnyi sebessége egyenletesen változik az időben. Felmerül a kérdés, milyen gyorsan változik a test sebessége, vagyis mekkora a ***gyorsulása***. A gyorsulást a-val (acceleratio = gyorsulás) jelöljük és definíció szerint a Δv sebességváltozásnak és a közben eltelt Δt időnek a hányadosa:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{2k(t+\Delta t) - 2kt}{\Delta t} = 2k = \text{állandó}\,. \tag{3.12}$$

Az átlagos gyorsulás határértékét, vagyis a pillanatnyi gyorsulást az

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}} \tag{3.13–15}$$

összefüggés adja meg.

A fenti típusú mozgások esetén a test átlaggyorsulása egyenlő a $\Delta t \to 0$-hoz tartozó a pillanatnyi gyorsulással, mert nem függ az időtől: $\bar{a} = a = 2k$, ahonnan $k = a/2$.

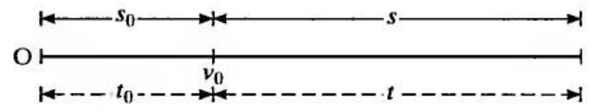
Ezek után a mozgást leíró egyenletek:

$$\boxed{s = \frac{a}{2} t^2}\,, \qquad \boxed{v = at}\,, \qquad \boxed{a = \text{állandó}}\,. \tag{3.16–18}$$

Az ilyen típusú mozgást *egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásnak* nevezzük. A gyorsulás megmutatja az egységnyi idő alatti sebességváltozást; – dimenziója a sebesség dimenziójának (L/T) és az idő dimenziójának (T) a hányadosa, vagyis $\mathrm{L/T^2}$; – SI-egysége a méter per másodperc a négyzeten, jele: $\mathrm{m/s^2}$. Meghatározása: $1\ \mathrm{m/s^2}$ annak az anyagi pontnak a gyorsulása, amelynek sebessége másodpercenként 1 m/s-mal változik (nő vagy csökken). Megengedett prefixált SI-egysége: $\mathrm{cm/s^2}$. Megjegyezzük, hogy a (3.16,17) egyenletek csak abban az esetben érvényesek, amikor a test kezdősebessége (v_0) nullával egyenlő.

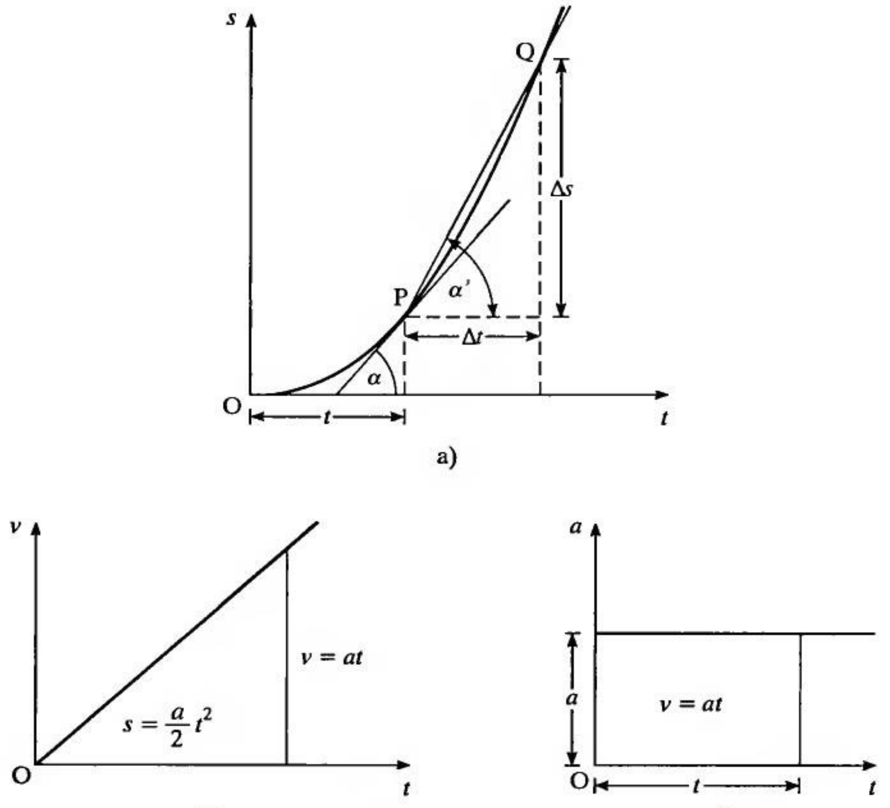
Hogyan módosulnak a (3.16,17) alatti kifejezések, amikor $v_0 \neq 0$, vagyis amikor a testnek az időmérés kezdetén már volt kezdősebessége?

Tegyük fel, hogy a test v_0 sebességnél kezdett el gyorsulni, és t idő alatt s utat tett meg. Hogyan függ s a t-től (**3.4. ábra**)?



3.4. ábra

Induljon a test egyenletesen gyorsulva és így t_0 idő alatt s_0 út megtétele után $v_0 = at_0$ sebességre tesz szert, majd ugyanúgy gyorsulva t idő alatt s utat tesz meg. Eszerint az s_0 utat és az $s_0 + s$ utat is kezdősebesség nélkül tette meg, ezért



3.5. ábra

$$s_0 = \frac{a}{2}t_0^2 \qquad \text{és} \qquad s + s_0 = \frac{a}{2}(t_0 + t)^2 \; . \tag{3.19,20}$$

A két egyenlet különbsége

$$s = \frac{a}{2}(t_0 + t)^2 - \frac{a}{2}t_0^2 = at_0 t + \frac{a}{2}t^2 \; . \tag{3.21}$$

Mivel a feltétel szerint $at_0 = v_0$, ezért

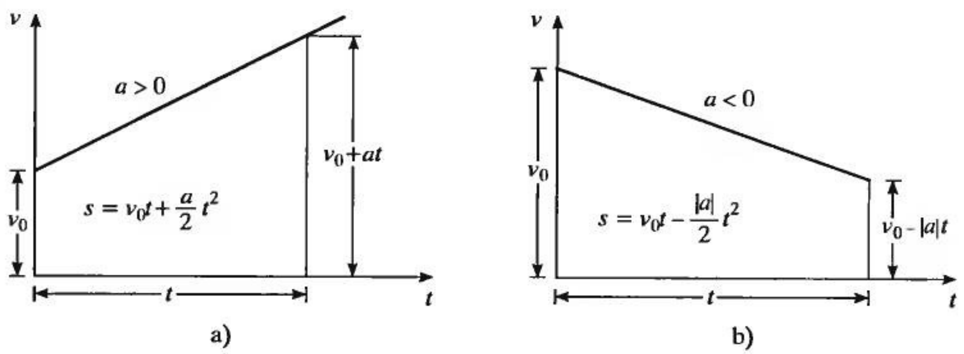
$$\boxed{s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2}, \qquad \boxed{v = v_0 + at}, \qquad \boxed{a = \text{állandó}} \; . \tag{3.22–24}$$

Amikor a test v_0 kezdősebességről nem gyorsul, hanem *lassul*, akkor a (3.22,23)-ban az útra és a sebességre vonatkozó formulákban a gyorsulást tartalmazó tag előjele negatív.

Azokat az egyenes vonalú mozgásokat, amelyeket a (3.22–24) összefüggések írnak le, *egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásoknak* nevezzük.

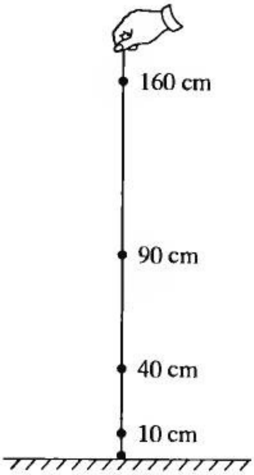
Ha a (3.16–18) alatti összefüggéseket az idő függvényében ábrázoljuk (**3.5. ábra**), akkor a **3.5/a. ábráról** leolvasható az átlagsebesség értéke, ami nem más, mint a görbe P és Q pontjához tartozó szelő iránytangense (tg α'). A pillanatnyi sebesség értéke pedig egyenlő az út–idő grafikon t időpontbeli érintőjének iránytangensével (tg α). A **3.5/b. ábrán** a sebesség–idő grafikon alatti terület számértéke a t idő alatt megtett úttal egyenlő, és hasonlóan a **3.5/c. ábrán** a gyorsulás–idő görbe alatti területből a t idő alatt elért pillanatnyi sebességet kapjuk.

A **3.6/a,b. ábra** alapján pedig kiszámíthatjuk az egyenletesen gyorsuló, illetve az egyenletesen lassuló test adott t idő alatt megtett útját.



3.6. ábra

3. Szabadesés, nehézségi gyorsulás



3.7. ábra

A testek esésének jelenségét Galileo GALILEI (olasz fizikus, matematikus és csillagász, 1564–1642) tanulmányozta. Megállapította, hogy a $v_0 = 0$ kezdősebességű, szabadon eső test is egyenletesen gyorsulva mozog. Erről kísérletileg például úgy győződhetünk meg, hogy az előző pontokban megismert függőleges szállítószalaggal felvesszük a szabadon eső test út–idő grafikonját, és meggyőződünk arról, hogy a függvény képe parabola. Ugyancsak ezt igazolja az ejtőzsinóros kísérlet (**3.7. ábra**). Mintegy 2 m hosszú zsinór egyik végére, majd innen számítva 10, 40, 90, 160 cm-re csavaranyákat kötünk. A zsinórt függőlegesen tartva elengedjük úgy, hogy a legalsó csavar a földön legyen. Jól hallható, hogy az egymás utáni becsapódások egyenlő időközönként követik egymást, azaz hogy az 1, 2, 3, 4 egységnyi idő alatt a testek 1, 4, 9, 16 egységnyi utat tettek meg.

Kiszivattyúzott zárt üvegcsőben a fagolyó, a tollpihe és más testek, az anyagi minőségtől függetlenül egyenlő idő alatt esnek le. Ez, és az ehhez hasonló kísérletek eredménye alapján megállapíthatjuk, hogy minden szabadon eső (mozgásában nem akadályozott) test gyorsulása egyenlő. Ezt a kitüntetett gyorsulást nehézségi gyorsulásnak nevezzük és g-vel jelöljük. A nehézségi gyorsulás értéke Magyarországon $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Az Északi-sarkon $g_{90^\circ} \approx 9{,}83\ \mathrm{m/s^2}$, az egyenlítőn $g_{0^\circ} \approx 9{,}78\ \mathrm{m/s^2}$, a 45°-os szélességi körön és tengerszinten az ún. normál nehézségi gyorsulás $g_{45^\circ} \approx 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$.

Ezek után a szabadon eső test útját, sebességét az alábbi képletekkel adhatjuk meg:

$$s = \frac{g}{2}t^2, \qquad v = gt, \qquad s = \frac{v^2}{2g}, \qquad v = \sqrt{2gs}, \qquad \text{ha} \qquad v_0 = 0. \qquad (3.26\text{–}29)$$

A függőlegesen lefelé, illetve felfelé hajított test által megtett út és sebesség pedig

$$s = v_0 t \pm \frac{g}{2}t^2 \qquad \text{és} \qquad v = v_0 \pm gt, \qquad (3.30,31)$$

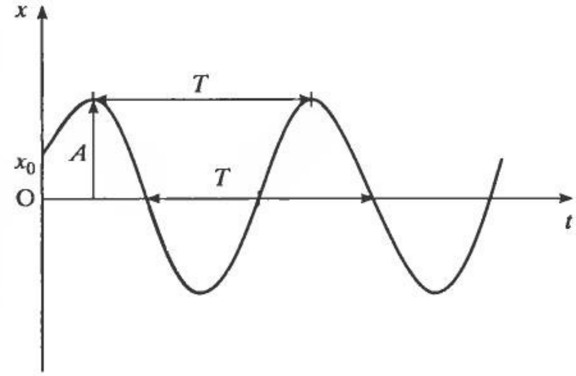
ahol a pozitív előjel lefelé, a negatív felfelé hajítás esetén érvényes.

A nehézségi gyorsulást legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, hogy megmérjük a szabadon eső test útját és esési idejét.

4. § Harmonikus rezgőmozgás. Párhuzamos rezgések összetétele

1. Harmonikus rezgőmozgás

A rugóra akasztott testet függőleges irányban térítsük ki nyugalmi helyzetéből és hagyjuk magára. A test rezeg, két szélső helyzet között periodikusan ismétlődő mozgást végez. Ha a függőleges szállítószalagra lerajzoltatjuk a test kitérés–idő görbéjét, a grafikon harmonikus függvény képe lesz (**4.1. ábra**). Az egy teljes rezgés megtételéhez szükséges T időt *rezgésidőnek* vagy *periódusidőnek*, a maximális A kitérést pedig *amplitúdónak* nevezzük.



4.1. ábra

Ha az időt attól a pillanattól kezdjük számítani, amikor a test nyugalmi helyzetből a választott pozitív irányban halad át, vagyis $t = 0$-nál $x = 0$, majd pozitív, akkor a pillanatnyi kitérést az

$$x = A\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{4.1}$$

összefüggés írja le. Az ilyen mozgást *harmonikus rezgőmozgásnak* nevezzük.

Ha a $t = 0$ időpillanatban a rezgőmozgást végző anyagi pont kitérése nem nulla, akkor a kitérés:

$$\boxed{x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)}\,, \tag{4.2}$$

ahol φ a kezdőfázis (fázisállandó), $2\pi/T$-t pedig *körfrekvenciának* nevezzük, jele: ω. Ez utóbbi SI-egysége a radián per másodperc, jele: rad/s, kifejezése: 1 rad/s = 1/s.

A harmonikus rezgés leírásánál a T rezgésidő helyett gyakran a *frekvencia* (rezgésszám) szerepel. Megállapodás szerint a frekvencia (jele: f vagy ν) a rezgések számának (N) és az eltelt időnek (t) a hányadosa. Mivel N = 1 rezgéshez $t = T$ rezgésidő tartozik, ezért a frekvencia:

$$\boxed{f = \frac{\mathrm{N}}{t} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}\,. \tag{4.3–5}$$

A (4.3–5) alatti frekvencia megmutatja az egységnyi idő alatti rezgések számát; – SI-egysége a hertz [herc], jele: Hz, kifejezése: 1 Hz = 1/s. A frekvencia egységét Heinrich HERTZ (1857–1894) német fizikusról nevezték el.

Mekkora a rezgő test sebessége? A pillanatnyi sebesség (3.8) alatti definíciója alapján

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\sin(\omega t + \varphi)] = A\omega\cos(\omega t + \varphi). \qquad (4.6)$$

A gyorsulás (3.14) alatti definíciója alapján

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[A\omega\cos(\omega t + \varphi)] = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x. \qquad (4.7,8)$$

A harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása egyenesen arányos a kitéréssel és azzal ellentétes irányú.

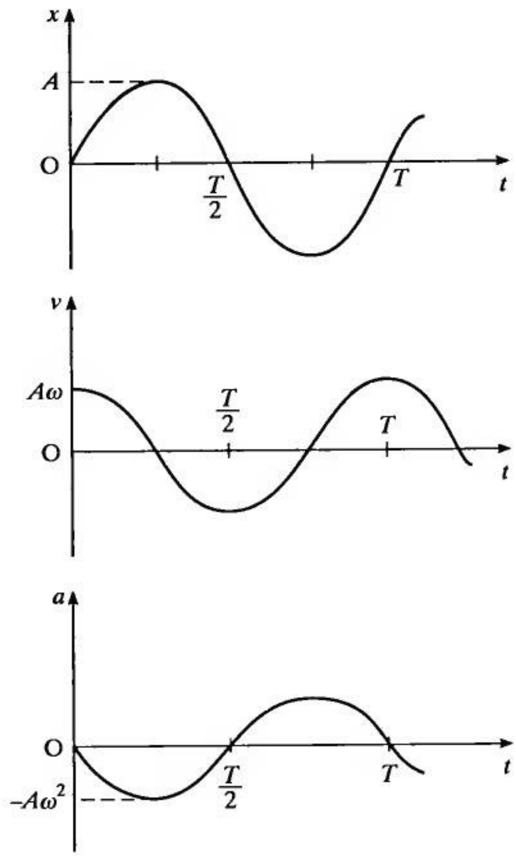
Eredményünk szerint mind a sebesség, mind a gyorsulás periodikus függvénye az időnek. A sebesség maximuma, vagyis a

$$v_{max} = A\omega \qquad (4.9)$$

a *sebességamplitúdó*, a gyorsulás maximuma, a *gyorsulásamplitúdó* pedig

$$a_{max} = A\omega^2. \qquad (4.10)$$

A kitérés, a sebesség és a gyorsulás időbeli változását a **4.2. ábra** mutatja.

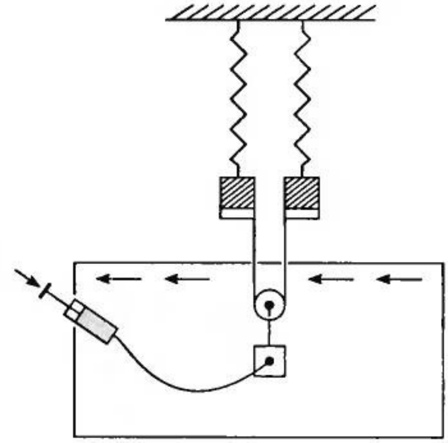


4.2. ábra

2. Egyirányú, azonos frekvenciájú harmonikus rezgések összetétele

Arra a kérdésre keressük a választ, hogy milyen eredő mozgást eredményez két azonos frekvenciájú párhuzamos rezgés összetétele (szuperpozíciója).

A kísérlet összeállítása a **4.3. ábrán** látható. Két egyforma rugón függő, ugyanolyan test, külön-külön egyenlő frekvenciával rezeg. Együttes mozgásuk eredményét a hozzájuk mozgócsigával csatlakozó kis test írja le a függőleges szállítószalagra.



4.3. ábra

Tekintsünk két azonos frekvenciájú, különböző amplitúdójú és eltérő kezdőfázisú rezgést, amelyeknek kitérése:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \qquad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \tag{4.11,12}$$

Az eredő mozgás kitérését x_1 és x_2 összege adja:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \tag{4.13}$$

Fejtsük ki a szögfüggvényeket és csoportosítsuk a tagokat $\sin \omega t$ és $\cos \omega t$ szerint:

$$x = (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)\sin \omega t + (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)\cos \omega t. \tag{4.14}$$

Vezessük be a következő helyettesítéseket:

$$A\cos\delta = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2, \qquad A\sin\delta = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2. \tag{4.15,16}$$

Ezekkel a rezgések összege

$$x = A\sin\omega t\cos\delta + A\cos\omega t\sin\delta, \tag{4.17}$$

illetve

$$x = A\sin(\omega t + \delta) \tag{4.18}$$

alakban adható meg.

A két párhuzamos rezgés eredője tehát olyan harmonikus rezgés, amelynek frekvenciája (és körfrekvenciája) megegyezik az összetevő rezgésekével. Amplitúdója a (4.15,16) egyenletek négyzetre emelése és összeadása után:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \qquad (4,19)$$

Az eredő rezgés kezdőfázisának tangense a (4.15,16) egyenletek hányadosa:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \tag{4.20}$$

Kísérleti összeállításunkkal könnyen bemutatható az eredő rezgés frekvenciájának egyezése az összetevő frekvenciákéval, ha mindhárom rezgést külön-külön vesszük fel a mozgó szállítószalagon.

Hasonlóan demonstrálható az eredő amplitúdó a következő speciális esetekben:

a) Amikor $\varphi_1 = \varphi_2$, azaz a rezgések azonos fázisúak, akkor a (4.19)-ből

$$A = A_1 + A_2 , \tag{4.21}$$

vagyis az eredő rezgés amplitúdója egyenlő az összetevő rezgések amplitúdóinak összegével.

b) Ha $|\varphi_2 - \varphi_1| = \pi$, vagyis a rezgések ellentett fázisúak, akkor ugyancsak a (4.19)-ből következően

$$A = |A_1 - A_2|, \tag{4.22}$$

azaz az eredő amplitúdó a két összetevő rezgés amplitúdójának különbségével egyenlő.

c) Abban a speciális esetben, amikor a b) feltétel mellett $A_1 = A_2$ is fennáll, $A = 0$. Ebben az esetben a két rezgés *kioltja* egymást.

3. Nem azonos frekvenciájú párhuzamos rezgések összetétele; lebegés

a) Ha az előző pontban leírt kísérleti összeállítást úgy módosítjuk, hogy az egyik nagy testre még egy ugyanolyan anyagú, de kisebb méretű testet teszünk, akkor a két frekvencia kissé eltér egymástól, tehát az alábbi feltétel teljesül:

$$\omega_1 \neq \omega_2, \qquad \text{de} \qquad |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2 . \tag{4.23}$$

Legyen továbbá $A_1 = A_2$. Ebben az esetben a két rezgést leíró függvény:

$$x_1 = A\sin\omega_1 t, \qquad x_2 = A\sin\omega_2 t. \tag{4.24,25}$$

Az eredő mozgás függvénye:

$$x = x_1 + x_2 = A\sin\omega_1 t + A\sin\omega_2 t = A(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t). \tag{4.26}$$

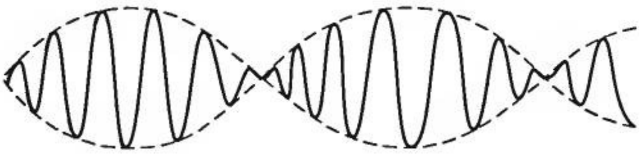
Alkalmazzuk a $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ szögösszegzési tételt! A (4.26) alatti kifejezésből a következő képletet kapjuk:

$$x = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \cdot \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t. \tag{4.27}$$

Az eredő mozgás tehát olyan rezgés, amelynek körfrekvenciája az összetevők körfrekvenciájának számtani közepe, az

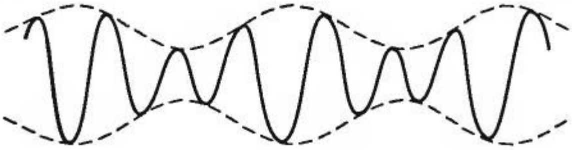
$$A^*(t) = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \tag{4.28}$$

amplitúdója pedig periodikusan változik. Ennek a rezgésnek a képe a vázolt kísérletben is látható (**4.4. ábra**). Az amplitúdónak ezt a periodikus változását *lebegésnek* nevezzük. A jelenség könnyen demonstrálható oszcilloszkóppal.



4.4. ábra

Amikor a két összetevő rezgés amplitúdója nem egyenlő, akkor a rezgés a **4.5. ábra** szerint alakul. A lebegésnek ezt a változatát *amplitúdómodulációnak* hívjuk.



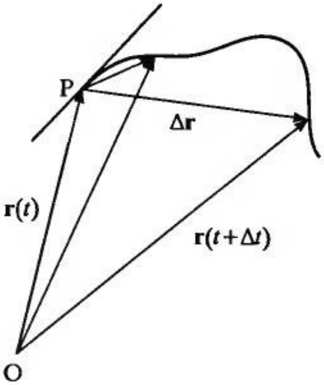
4.5. ábra

b) Amikor olyan rezgéseket adunk össze, amelyek frekvenciáinak hányadosa racionális szám, az eredő mozgás periodikus függvénnyel adható meg. Oszcilloszkópos kísérletben ez könnyen bemutatható.

c) Ha a frekvenciák hányadosa nem racionális szám, akkor az eredő mozgás nem írható le periodikus függvénnyel.

5. § A sebesség és a gyorsulás általános fogalma

1. A sebesség mint vektor



5.1. ábra

Az egyenes vonalú mozgások leírásakor a sebesség nagyságának ismerete elégséges volt a mozgás „gyorsaságának" jellemzésére. Az elmozdulás iránya a pálya egyenesébe esik, s ha megállapodunk az irány előjelében, a test mozgásállapotát egyértelműen leírhatjuk.

Amikor a test görbe vonalú pályán mozog, mozgásiránya pillanatonként változik. Emiatt az egyenes vonalú mozgásra bevezetett sebességfogalom általánosításra szorul; ugyanis a sebesség nagyságán kívül meg kell adnunk a sebesség irányát is.

A 2. §-ban bevezettük a helyzetvektor fogalmát. A test Δt idő alatti elmozdulása egyenlő ennek a vektornak a megváltozásával (**5.1. ábra**):

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t). \tag{5.1}$$

Vezessük be az *átlagsebesség-vektort* mint az elmozdulás és a közben eltelt idő hányadosát,

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{5.2}$$

Az átlagsebesség nagysága és iránya is függ a mérés időtartamától: nagysága egyenesen arányos a görbe két pontját összekötő elmozdulás (húr) hosszával, iránya pedig megegyezik az elmozdulásével.

Amint a mérés időtartamát csökkentjük, a húr hossza egyre kevésbé különbözik a hozzá tartozó görbe hosszától, és az átlagsebesség-vektor iránya egyre jobban megközelíti a görbe adott P pontjában húzott érintő irányát (**5.1. ábra**).

Ezek alapján a t időpillanathoz tartozó (P pontbeli) pillanatnyi sebességet úgy definiáljuk, mint az (5.2) alatti átlagsebességek sorozatának határértékét, amikor a Δt mérési időtartam nullához tart.

Képlettel:

$$\boxed{\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}}\,. \tag{5.3–5}$$

A sebesség a helyzetvektor idő szerinti deriváltja, amit matematikai alakban az (5.3–5) alatti kifejezések jelölnek. A fentebb mondottakból következik, hogy a sebesség nagysága

$$|\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = |\dot{\mathbf{r}}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \tag{5.6–9}$$

vagyis számértéke egyenlő az egységnyi idő alatt megtett úttal, iránya pedig a pálya érintőjének egyenesébe esik.

2. A gyorsulásvektor

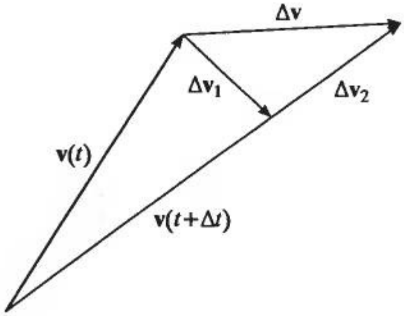
A sebességváltozás gyorsaságát a gyorsulás fogalmával adjuk meg. E célból vegyünk fel egy pontban két, időben közeli sebességet (**5.2. ábra**).

A sebesség Δt idő alatti megváltozása

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t), \tag{5.10}$$

az átlaggyorsulás pedig

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{5.11}$$



5.2. ábra

Az átlaggyorsulás nagysága és iránya is függ a mérés Δt időtartamától. Látható, hogy mozgás közben általában változik a sebesség nagysága és iránya is. Az ábrán feltüntettük a sebesség irányváltozásából, valamint nagyságának megváltozásából származó $\Delta\mathbf{v}_1$ és $\Delta\mathbf{v}_2$ sebességváltozásokat.

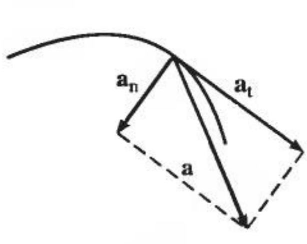
Ezek után a pillanatnyi gyorsulást úgy definiáljuk (értelmezzük), mint az átlaggyorsulások sorozatának határértékét, midőn a mérés időtartama nullához tart.

Matematikai alakban:

$$\boxed{\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}}\,. \tag{5.12–15}$$

A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, illetve a helyvektor idő szerinti második deriváltja.

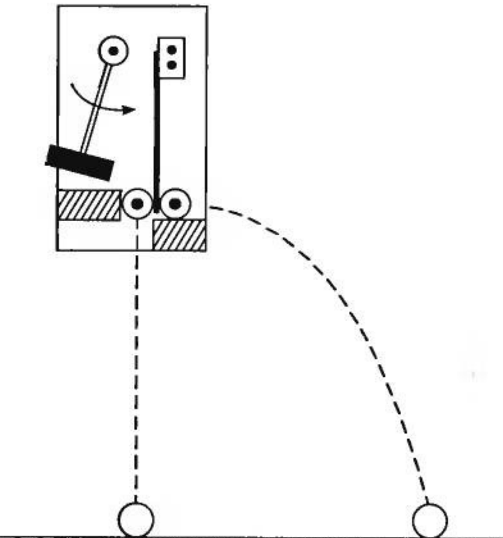
Vegyük észre, hogy a sebesség irányváltozása miatti gyorsulás merőleges a sebességre ($\Delta\mathbf{v}_1$ a $\Delta t \to 0$ határesetben merőleges lesz a t időhöz tartozó sebességre), a sebesség nagyságának megváltozásából származó gyorsulás pedig érintőirányú (**5.3. ábra**). Az ábráról leolvasható, hogy az eredő gyorsulás iránya a mozgás pályájának homorú oldala felé mutat. Az a_t *érintőirányú* gyorsulást *tangenciális gyorsulásnak*, az erre (illetve a sebességre) merőleges a_n gyorsulást pedig *normális gyorsulásnak* nevezzük.



5.3. ábra

6. § Görbe vonalú mozgások

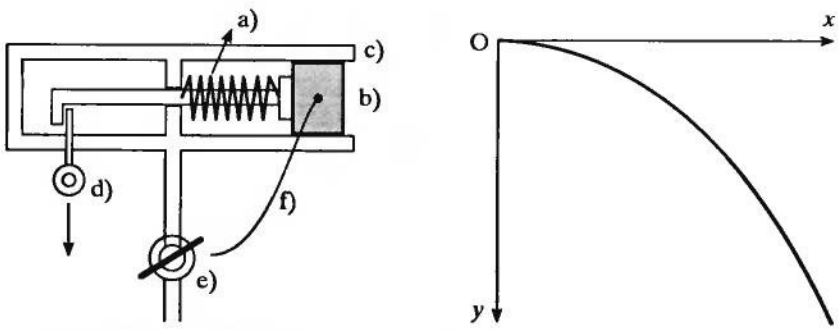
1. Vízszintes hajítás



6.1. ábra

A **6.1. ábrán** látható szerkezettel (Lőwy-féle ejtőgép) egyidejűleg két golyót indítunk. Az egyik golyó kezdősebesség nélkül függőlegesen, szabadon esik, a másik v_0 vízszintes irányú kezdősebességgel görbe vonalú pályán mozog. Azt tapasztaljuk, hogy a két golyó egyszerre ér földet, attól függetlenül, hogy milyen magasról indítottuk őket. Megállapíthatjuk, hogy az elhajított test ugyanúgy szabadon esik lefelé, mint a függőleges mentén mozgó, miközben vízszintes irányban v_0 állandó sebességgel távolodik a kilövés helyétől. Azt mondjuk, hogy a két mozgás független egymástól, egyik sem „zavarja" a másikat *(mozgások függetlenségének elve)*.

A **6.2. ábrán** látható kilövő szerkezettel vízszintesen elhajítunk egy testet, amely a hozzá csatlakozó gumifecskendő működtetése közben a mögötte levő táblára lerajzolja saját mozgáspályáját. Illesszünk a görbéhez derékszögű (x,y) koordináta-rendszert!



a) kilövőrugó
b) test
c) vezetősín
d) kioldó szerkezet
e) csuklós rögzítő
f) folyadékos gumicső

a) b)

6.2. ábra

Az elhajított test elmozdulásának x, illetve y irányú skalárkomponenseire a következő összefüggéseket kapjuk:

$$x = v_0 t, \qquad y = \frac{g}{2} t^2. \tag{6.1,2}$$

A megfelelő sebességkomponensekre

$$v_x = v_0, \qquad v_y = gt, \tag{6.3,4}$$

a gyorsuláskomponensekre pedig

$$a_x = 0, \qquad a_y = g \tag{6.5,6}$$

adódik.

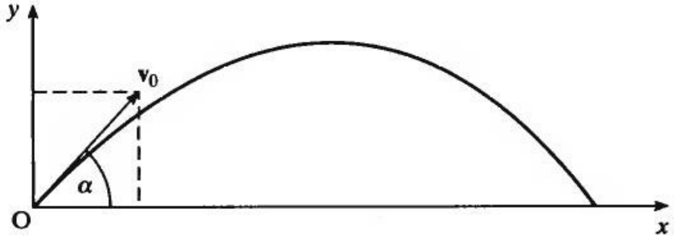
Ha a (6.1) egyenletből kifejezzük az időt és a (6.2)-be helyettesítjük, megkapjuk a test x és y helykoordinátái közötti összefüggést, az ún. *pályaegyenletet:*

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \ . \tag{6.7}$$

Látható, hogy a mozgó test pályája parabola. A mozgások függetlensége elvének felhasználásával a görbe vonalú mozgást két egyenes vonalú mozgásra vezettük vissza.

2. Ferde hajítás

A **6.2. ábrán** bemutatott szerkezettel lőjük ki a testet v_0 kezdősebességgel felfelé, a vízszinteshez mért α szögben, miközben a fecskendőből a szelepgumin át kiáramló színes folyadék az álló háttérre „lerajzolja" a mozgás pályáját (**6.3. ábra**).



6.3. ábra

A pályagörbéhez illesztett derékszögű koordináta-rendszerben az x, illetve y irányú elmozdulások skalárkomponenseit a következő egyenletek írják le:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \ . \tag{6.8,9}$$

A megfelelő irányú sebességkomponensek:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \tag{6.10,11}$$

a gyorsuláskomponensek pedig

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g. \tag{6.12,13}$$

Ebben a leírásban a ferde hajítást két egymásra merőleges, egyenes vonalú mozgásra bontottuk fel, nevezetesen a vízszintes irányú egyenletes és a függőleges irányú egyenletesen változó mozgásra.

Ha a (6.8) egyenletből kifejezzük az időt és behelyettesítjük a (6.9)-be, megkapjuk a hajítás *pályaegyenletét*:

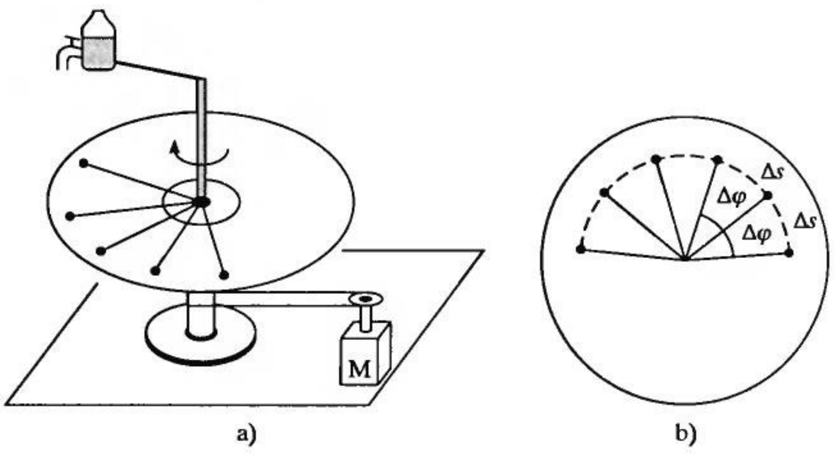
$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 . \tag{6.14}$$

A pályagörbe parabola. Ha a közegellenállás hatását is figyelembe vesszük, az úgynevezett *ballisztikus görbét* kapjuk, amelynek a jobb oldali, „leszálló” ága meredekebb, mint a paraboláé.

3. Körmozgás

a) Egyenletes körmozgás

A **6.4. ábrán** M motorral meghajtott, tengelyezett karhoz rögzített, csapos üveg látható, amely színes folyadékot tartalmaz. Ha a csepegést megfelelően állítjuk be, az álló korongon egyenlő ívenként – és egyben egyenlő középponti szögenként – követik egymást a színes folyadékcseppek, miközben az üveg egyenletesen forog.



6.4. ábra

A mozgás nyomképéből leolvasható, hogy egyenlő időtartamok alatt a körmozgást végző test egyenlő íveket és középponti szögeket fut be, bármekkorák is az időtartamok:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{állandó} = v\,, \tag{6.15}$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \text{állandó} = \omega\,. \tag{6.16}$$

A két összefüggéssel definiáljuk a v-vel jelölt *kerületi sebességet*, illetve az ω *szögsebességet*. Mivel a mérés időtartama tetszőleges lehet, választhatjuk a T teljes periódusidőt, amelyhez $2r\pi$ hosszúságú körív és 2π nagyságú középponti szög tartozik. Ezért

$$\boxed{\frac{2r\pi}{T} = v}\,, \tag{6.17}$$

valamint

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} = \omega}\,. \tag{6.18}$$

A szögsebesség SI-egysége a radián per másodperc, jele: rad/s, kifejezése: 1 rad/s = 1/s.

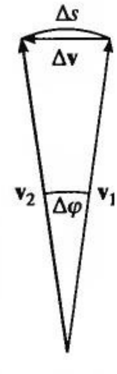
E két utóbbi egyenletből a kerületi sebesség és a szögsebesség kapcsolatára a

$$\boxed{v = r\omega} \tag{6.19}$$

összefüggést kapjuk.

Az egyenletes körmozgás jellemzésére bevezették a *fordulatszám* fogalmát is, jele n. Fordulatszámon értjük a fordulatok N számának és az eltelt t időnek a hányadosát: $n = \mathrm{N}/t$. Mivel $\mathrm{N} = 1$ fordulathoz $t = T$ periódusidő tartozik, ezért a fordulatszám:

$$\boxed{n = \frac{\mathrm{N}}{t} = \frac{1}{T}}\,. \tag{6.20}$$



6.5. ábra

SI-egysége: 1/s.

A fordulatszám felhasználásával a periódusidőt tartalmazó fenti összefüggések könnyen átírhatók.

A körmozgás teljes kinematikai leírásához meg kell határoznunk a test gyorsulását is. Bár a test sebességének nagysága állandó, iránya pillanatonként változik, tehát a test gyorsul. A **6.5. ábrán** egy pontból mértünk fel két, időben közeli sebességet. A sebesség megváltozásának nagysága (a húr hossza):

$$|\Delta\mathbf{v}| \approx v \cdot \Delta\varphi\,, \tag{6.21}$$

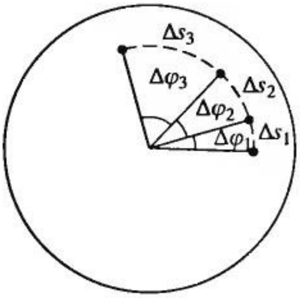
vagyis közelítőleg egyenlő a v sugárral rajzolt ív hosszával. Határesetben, amikor a mérés időtartama $\Delta t \to 0$, az átlaggyorsulás $\bar{a} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} \to a$-hoz, vagyis tart a pillanatnyi gyorsuláshoz:

$$\boxed{a = \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = v\omega = \frac{v^2}{r} = r\omega^2} \,. \tag{6.22–25}$$

A gyorsulás iránya merőleges a sebességre és a kör középpontja felé mutat, ezért *centripetális gyorsulásnak* nevezzük:

$$\boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega} \,. \tag{6.26–28}$$

b) Egyenletesen változó körmozgás



6.6. ábra

Ha a **6.4. ábrán** látható csapos üveget motor helyett csigán átvetett, fonálon függő és lefelé gyorsuló test forgatja, akkor az üvegből egyenlő időközönként lehulló cseppek a **6.6. ábrán** látható nyomképet adják. A pontsorozat kiértékelése alapján kiderül, hogy a test által befutott ívek és középponti szögek az eltelt idő négyzetével arányosak, vagyis

$$s \sim t^2 \quad \text{és} \quad \varphi \sim t^2, \tag{6.29, 30}$$

illetve más alakban

$$s = kt^2 \quad \text{és} \quad \varphi = Kt^2, \tag{6.31,32}$$

ahol k, illetve K állandó. A (6.31) egyenlettel az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás tárgyalásakor már találkoztunk. Teljesen hasonló gondolatmenettel a következő összefüggéseket kapjuk erre az esetre is:

$$s = \frac{a_t}{2} t^2, \qquad v = a_t t, \qquad a_t = \text{állandó}, \tag{6.33–35}$$

ahol s a t idő alatt befutott ív hossza, v a körmozgást végző test pillanatnyi kerületi sebessége, a_t pedig a test érintőleges (tangenciális, kerületi) gyorsulása (a sebesség nagyságának változása miatti gyorsulás). Hasonlóan a (6.32) képletből

$$\varphi = \frac{\beta}{2} t^2, \qquad \omega = \beta t, \qquad \beta = \text{állandó}, \tag{6.36–38}$$

ahol φ a szögelfordulás, ω a pillanatnyi szögsebesség, β pedig a

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{t} = \text{állandó} \qquad (6.39,40)$$

egyenlettel bevezetett *szöggyorsulás*. A szöggyorsulás SI-egysége a radián per másodperc a négyzeten, jele: rad/s^2, kifejezése: 1 rad/s^2 = 1/s^2.

Figyelembe véve a körív és a középponti szög közötti kapcsolatot, azaz hogy

$$s = r\varphi, \qquad (6.41)$$

a kerületi gyorsulás és a szöggyorsulás közötti összefüggés:

$$a_t = r\beta, \qquad (6.42)$$

ahol r a körpálya sugara.

Ha a kezdeti sebesség $v_0 \neq 0$ és vele együtt a kezdeti szögsebesség $\omega_0 \neq 0$, akkor a (6.33–38) egyenletek a következőképpen módosulnak:

$$\boxed{s = v_0 t + \frac{a_t}{2}t^2, \qquad v = v_0 + a_t t, \qquad a_t = \text{állandó}}\,, \qquad (6.43\text{–}45)$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta}{2}t^2, \qquad \omega = \omega_0 + \beta t, \qquad \beta = \text{állandó}}\,. \qquad (6.46\text{–}48)$$

Ha a test lassul ($v < v_0$, $\omega < \omega_0$), akkor a (6.43,44)-ben és a (6.46,47)-ben a tangenciális gyorsulást és a szöggyorsulást tartalmazó tagok negatív előjelűek.

7. § Merőleges rezgések összetétele

1. Kapcsolat a körmozgás és a rezgőmozgás között

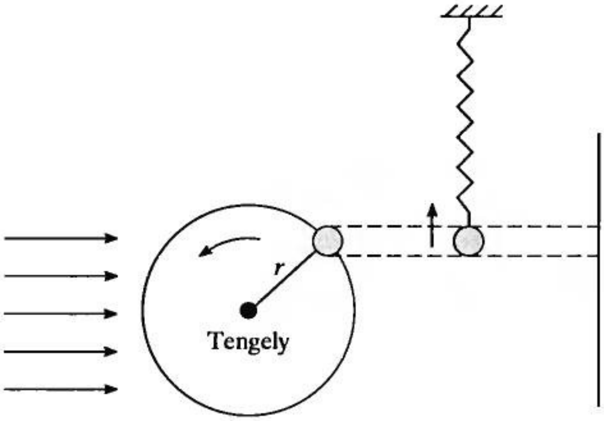
A **7.1. ábrán** látható összeállításban az egyik test egyenletes körmozgást, a másik harmonikus rezgőmozgást végez ugyanabban a függőleges síkban.

Ha a körmozgást végző test periódusideje megegyezik a rezgő test rezgésidejével és a kör sugara egyenlő a rezgés amplitúdójával, akkor a két mozgó test ernyőre kivetített képe minden időpillanatban egybeesik.

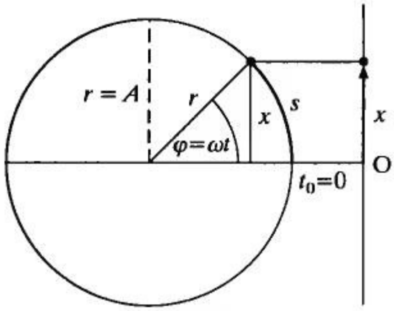
Ebből azt a tapasztalatot szűrhetjük le, hogy az egyenletes körmozgást végző testnek a kör átmérőjére eső vetületi mozgása harmonikus rezgőmozgás (**7.2. ábra**).

Az ábra jelöléseivel a körmozgást végző test vetületének kitérése:

$$x = r\sin\varphi\,. \qquad (7.1)$$



7.1. ábra



7.2. ábra

Figyelembe véve, hogy az egyenletes körmozgás miatt $\varphi = \omega t$, valamint hogy a vetület maximális értéke $A = r$, a (7.1) az alábbi alakot ölti:

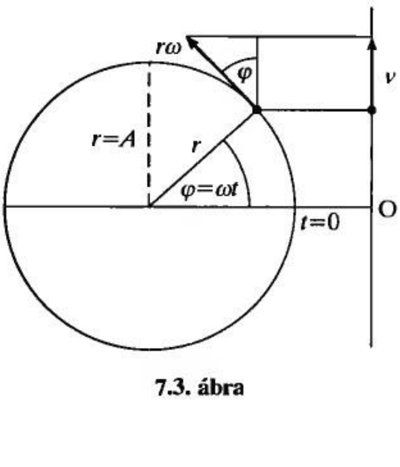
$$\boxed{x = A \sin \omega t}\,, \tag{7.2}$$

ahol ω a körmozgás szögsebessége, illetve a rezgőmozgás *körfrekvenciája*. (Harmonikus rezgőmozgás esetén ugyanis a „szögsebesség" elnevezésnek nincs értelme.)

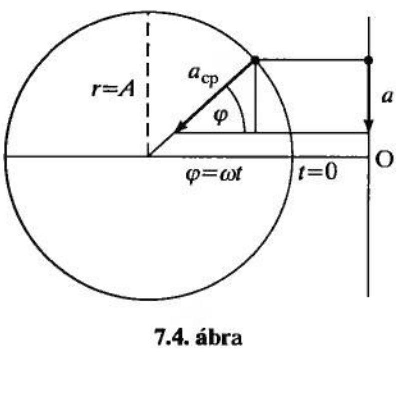
A körmozgás $v_{\text{kör}} = r\omega$ kerületi sebességéből könnyen származtatható a rezgőmozgás sebessége. A **7.3. ábra** jelöléseivel, valamint figyelembe véve, hogy $\varphi = \omega t$ és $r = A$,

$$\boxed{v = A\omega \cos \omega t}\,, \tag{7.3}$$

ahol $A\omega$ a maximális sebesség *(sebességamplitúdó)*.



7.3. ábra



7.4. ábra

Hasonlóan, a rezgőmozgás gyorsulása (**7.4. ábra**):

$$\boxed{a = -A\omega^2 \sin \omega t}, \tag{7.4}$$

ahol $A\omega^2$ a maximális gyorsulás *(gyorsulásamplitúdó)*, a (7.2) alapján pedig

$$\boxed{a = -\omega^2 x} \tag{7.5}$$

adódik. (A negatív előjel azt jelzi, hogy a gyorsulás ellentétes irányú a kitéréssel.)

A rezgőmozgás x kitérésének, v sebességének és a gyorsulásának t időbeli változását a **4.2. ábra** mutatja.

2. Merőleges rezgések összetétele

a) Természetesnek tűnik a kérdés, általában milyen mozgás jön létre akkor, ha két egymásra merőleges, egyenlő körfrekvenciájú rezgést „adunk össze"?

A két egymásra merőleges rezgést leíró függvény:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \delta), \tag{7.6}$$

$$y = A_2 \sin \omega t. \tag{7.7}$$

(A_1, A_2 a két rezgés amplitúdója, ω a körfrekvencia, δ a két rezgés fáziskülönbsége.) Fejtsük ki a (7.6)-ot a szögösszegezési tétel szerint:

$$x = A_1 \sin \omega t \cos \delta + A_1 \cos \omega t \sin \delta. \tag{7.8}$$

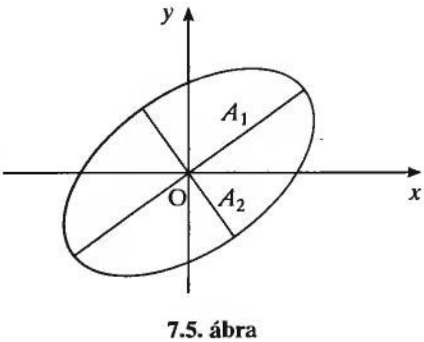
A (7.7)-ből fejezzük ki sin ωt-t és helyettesítsük (7.8)-ba, valamint cos ωt helyébe írjunk $\sqrt{1-\sin^2 \omega t}$-t. Rendezés, négyzetre emelés és összevonás után a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \delta = \sin^2 \delta. \tag{7.9}$$

Ez a másodrendű kifejezés általában ellipszis egyenlete, amelynek az alakját a **7.5. ábra** mutatja.

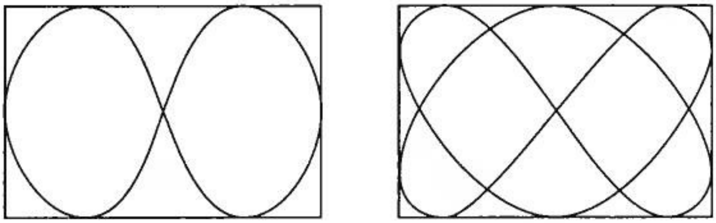
Ha $\delta = 0$ vagy π, akkor lineárisan poláros rezgés keletkezik. Ha $\delta = \pi/2$ vagy $3\pi/2$ mellett $A_1 = A_2$ is teljesül, akkor körben poláros rezgés jön létre.

b) Ha az összetevő rezgések körfrekvenciája nem egyenlő, akkor az eredő rezgés bonyolult alakzatokat eredményez. A **7.6/a,b. ábrán** az 1:2 és a 2:3 frekvenciaarány esetén létrejövő egy-egy lehetsé-



7.5. ábra

ges görbét tüntettünk föl. Ezeket Jules LISSAJOUS [liszazsu] (francia fizikus, 1822–1880) tiszteletére *Lissajous-görbéknek* nevezzük (**7.6. ábra**).



7.6. ábra

I. A) 2. AZ ANYAGI PONT DINAMIKÁJA

8. § Newton-törvények

1. A tehetetlenség törvénye

a) Newton I. törvénye

A vízszintes asztallapon ellökött és magára hagyott test hamarosan megáll. A légpárnás sínen mozgó kocsi azonban gyakorlatilag egyenletes sebességgel halad a sínen. Ha a kocsit és a sín végét is rugós ütközőkkel látjuk el, akkor a kocsi a sín végére érve rugalmasan ütközik, és visszapattanva gyakorlatilag változatlan sebességgel folytatja útját. Mozgása nem változik, jól beállított sín esetén percekig is eltarthat.

A testek mozgását (mozgásállapotát) kinematikailag a sebesség nagysága és iránya jellemzi. A kísérleti tapasztalatok arra utalnak, hogy a nyugvó testek mozgásba hozásához, ill. a mozgó testek mozgásállapotának megváltoztatásához más testekkel való kölcsönhatás szükséges. Kölcsönhatás nélkül a testek tehetetlenül folytatják mozgásukat. Laboratóriumi körülmények között a testek sohasem kerülnek tökéletesen kölcsönhatásmentes helyzetbe, így a kísérleti tapasztalatokból csak extrapolálhatunk a kölcsönhatásmentes állapotra. Ezt az extrapolációt GALILEI nyomán Isaac NEWTON [nyutn] (angol fizikus, 1642–1727) tette meg, kimondva a ***tehetetlenség törvényét***, a róla elnevezett ***I. törvényt:***

Minden test mindaddig megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását, amíg más testekkel való kölcsönhatás annak megváltoztatására nem kényszeríti.

b) Az inerciarendszer fogalma

A tehetetlenség törvénye a minden más testtől távoli objektumok mozgására vonatkozik. Jelentősége nem annyira a mozgásról tett megállapítás, hanem az, hogy segítségével definiálható az inerciarendszer fogalma. Newton I. törvénye a következőképpen is megfogalmazható:

Mindig található olyan koordináta-rendszer, amelyben a minden más testtől távol elhelyezkedő testek nyugalomban vannak, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.

Az ilyen koordináta-rendszert ***inerciarendszernek*** nevezzük. A definícióból azonnal következik, hogy *végtelen sok inerciarendszer létezik*, ha ugyanis már találtunk egy inerciarendszert, akkor minden hozzá képest egyenletesen mozgó koordináta-rendszer is az. A továbbiakban a mechanika törvényeit, hacsak külön meg nem szabjuk a koordináta-rendszert, mindig inerciarendszerben fogalmazzuk meg.

Inerciarendszert elvileg a világűrben minden más testtől nagy távolságban elhelyezkedő testek segítségével jelölhetünk ki. *Gyakorlati szempontból az állócsillagokhoz, tehát például a Naphoz rögzített koordináta-rendszer inerciarendszernek tekinthető*, s e könyv keretei között ez számunkra megfelelő koordináta-rendszer lesz. Az esetek többségében azonban a Földhöz rögzített ún. laboratóriumi koordináta-rendszert is közelítőleg elfogadhatjuk inerciarendszerként. (Ez a koordináta-rendszer a Föld pálya menti mozgása és elsősorban tengely körüli forgása miatt természetesen nem inerciarendszer, az eltérés azonban a hétköznapi jelenségek tárgyalása során csak kis hibát okoz. A kérdés vizsgálatára a későbbiekben még visszatérünk.)

2. Newton II. törvénye

a) A mechanikai kölcsönhatás mértéke; az erő

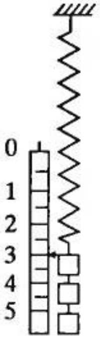
A tehetetlenség törvénye szerint a testek mozgásállapotát csak más testekkel való kölcsönhatás változtathatja meg. A következőkben ennek a kölcsönhatásnak a mennyiségi jellemzésével, az erő fogalmának bevezetésével foglalkozunk.

Ehhez először olyan mérőeszközre van szükségünk, amely a mérendő hatásra jól reprodukálódó változással reagál. Megfelelő mérőeszköz lehet pl. egy csavarrugó. Rögzítsünk a légpárnás sínen elhelyezett kiskocsik egyikére laza csavarrugót, majd ütköztessük a kocsikat. A rugó a kölcsönhatás során összenyomódik, majd visszanyeri eredeti alakját.

A kocsik kölcsönhatásának mértéke, erőssége a rugó összenyomódásával jellemezhető. A kölcsönhatás mennyiségi leírására vezetjük be az erő fogalmát a rugó alakváltozására alapozott mérési utasítással. Alapfeltevésként azzal élünk, hogy a rugó által kifejtett erő adott megnyúlás mellett az egyéb körülményektől függetlenül ugyanakkora. Így az erőmérő készítésekor kényelmesen, statikus körülmények között is létrehozhatjuk a rugó megnyúlását, s nem kell ragaszkodnunk a kölcsönhatás eredeti körülményeihez, amikor mozgásállapotváltozás jön létre.

b) Erőmérő (dinamométer) készítése

Függesszünk fel csavarrugót, és tegyünk mögéje milliméter beosztású skálát (**8.1. ábra**). Az erőskála kezdőpontját a rugó nyújtatlan hossza jelöli ki. Az egységnyi erő kiválasztása kissé nehezebb. Legegyszerűbb az lenne, ha az egységnyi erőt a rugó adott megnyúlásával



8.1. ábra

értelmeznénk. Célszerűbb azonban, ha az egységnyi nagyságú erőt könnyebben reprodukálható és sokszorozható erőfajtához kötjük.

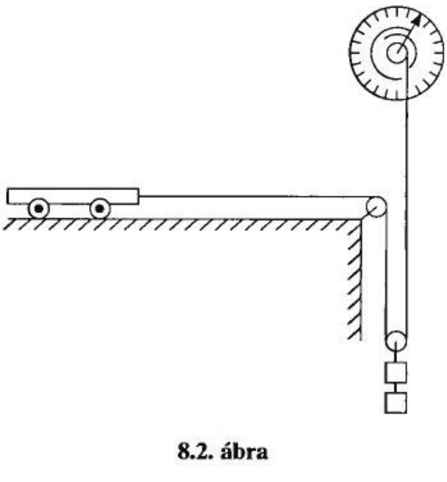
A tapasztalat szerint a nyugvó testek a Föld vonzóereje következtében adott földrajzi helyen jól meghatározott erővel nyomják a vízszintes alátámasztást, ill. húzzák a felfüggesztést. Ezt az erőt nevezzük a test súlyának. A Föld adott helyén nyugvó testek súlya nagy pontossággal állandó. Az erő mértékegységét pl. önkényesen választott testnek a mérőeszközül választott rugóra gyakorolt húzóerejével, súlyával definiálhatjuk.

Az erőmérő skálájának meghatározásához újabb, tapasztalatból leszűrt és elfogadott tények szükségesek. Az egységnyi súlyúnak választott testet az erőmérőre akasztva kijelölhetjük a skála egységpontját. Kétszeres, háromszoros stb. erőt úgy hozhatunk létre, hogy az erőmérőre két, három stb. egységnyi súlyú testet akasztunk. Ezzel feltételezzük, hogy az erőhatások egymástól függetlenül, additív (összeadódó) módon fejtik ki hatásukat. Az osztásrészek közötti tört skálarészek kijelölését csak újabb feltevések bevezetésével tehetjük meg. Kézenfekvő, hogy az erő egységét meghatározó homogén anyagú test darabolásával súlya is térfogatának arányában darabolódik. Ezt felhasználva az egységnyi erő tetszőleges tört része előállítható.

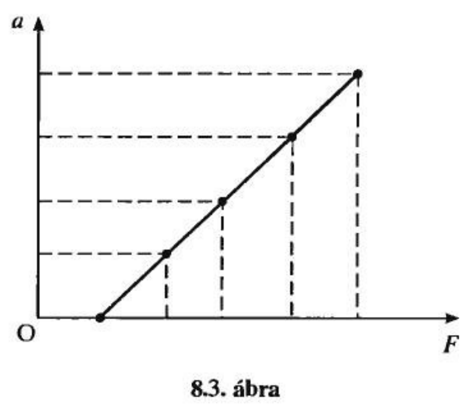
c) A dinamika alaptörvénye

Az erőmérő birtokában végezzünk mérést az erő és a gyorsulás kapcsolatának meghatározására. Könnyen mozgó kiskocsit erőmérő közbeiktatásával a **8.2. ábrán** látható módon gyorsítsunk különböző mértékben. Mérjük az erőt és a gyorsulást, majd ábrázoljuk grafikonon a mért értékpárokat.

A **8.3. ábra** gyorsulás–erő mérés eredményét mutatja. Látható, hogy a két mennyiség között lineáris kapcsolat van. Az adatokra illeszkedő egyenes azonban gyakran nem az origóból indul. Ennek az az oka, hogy a kiskocsira nem pusztán a fonal húzóereje hat, hanem a kerekeknél fellép a mozgás irányával ellentétes súrlódási erő is. Ennek az erőnek a nagyságát mutatja a mérési pontokra illeszkedő egyenes zérus gyorsuláshoz tartozó tengelymetszete.



8.2. ábra



8.3. ábra

A mérést különböző nagyságú kocsikkal elvégezve megállapítható, hogy az erő és a gyorsulás közötti

$$F \sim a \tag{8.1}$$

arányosság mindig fennáll, az arányossági együttható azonban különböző testek esetén más és más. A kísérletben a kocsit húzó fonal iránya egybeesik a gyorsulással. Természetesnek vesszük azt is, hogy a fonal térbeli helyzete egyben a fonalerő irányát is kijelöli. Minthogy a gyorsulás vektormennyiség, az eddigiek azt sugallják, hogy az erő is az. Ez valóban igaz, az erők nagysággal és iránnyal jellemezhető mennyiségek, amelyek összege a paralelogramma-szabállyal képezhető. Ez éppen azt jelenti, hogy az erő vektormennyiség. Az erő kötött vektor, azaz nagysága és iránya mellett általában támadáspontját is meg kell adnunk ahhoz, hogy hatását tanulmányozni tudjuk. (Pontszerű testek vizsgálatakor a támadáspont kérdése fel sem merülhet, hiszen az erőnek a vizsgált testre kell hatnia.)

d) A testek tömege, a tömeg és az erő egysége

Az erő gyorsító hatását különböző testek esetén vizsgálva megállapíthatjuk, hogy az

$$\frac{F}{a} = m \tag{8.2}$$

hányadossal megadott mennyiség, a tömeg csak a gyorsított testre jellemző. Minél nagyobb a test tömege, annál nagyobb erő szükséges ahhoz, hogy a testet adott mértékben gyorsítsuk. Newton I. törvénye kimondja azt, hogy a testek csak más testekkel való kölcsönhatás miatt változtatják meg mozgásállapotukat. A testeknek ezt a tulajdonságát a testek tehetetlenségének tulajdonítjuk. *Így a tömeget a gyorsított test tehetetlenségének mértékeként kezelhetjük.*

A tömeg egységét nemzetközi megállapodással, egy platina–irídium testtel mint tömegetalonnal rögzítették 1898-ban. A tömegetalont a Párizs melletti Sèvres-ben őrzik. ***A tömeg az SI-nek alapmennyisége, egysége a kilogramm, jele: kg.*** A kilogramm elnevezés alapegység esetén nem szerencsés, mert többszöröseinek és törtrészeinek nevét úgy kell képezni, mintha az alapegység a gramm lenne. Ajánlott prefixált SI-egységei: Mg, g, mg, μg. Megengedett SI-egységei: dkg, cg. (1 Mg = 10^6 g, 1 mg = 10^{-3} g, 1 μg = 10^{-6} g, 1 dkg = 10 g, 1 cg = 10^{-2} g). Nem SI-egysége a tonna, jele: t. 1 t = 10^3 kg.

A dinamika (8.2) alaptörvénye alapján az erő dimenziója a tömeg dimenziójának (M) és a gyorsulás dimenziójának (L/T^2) a szorzata, vagyis ML/T^2; – SI-egysége a newton, jele: N. Meghatározása: 1 N = 1 kg · m/s^2 az az erő, amely 1 kg tömegű testet 1 m/s^2 gyorsulással mozgat. Ajánlott prefixált SI-egységei: MN, kN (1 MN = 10^6 N, 1 kN = 10^3 N).

A tömeg és az erő ismeretében definiálhatjuk a sűrűséget (pontosabban: tömegsűrűséget) és a nyomást.

e) A sűrűség

Az m tömegű, V térfogatú homogén (egynemű) test sűrűségén értjük a

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \tag{8.3}$$

fizikai mennyiséget.

A sűrűség megmutatja az egységnyi térfogatú anyag tömegét; – dimenziója a tömeg dimenziójának (M) és a térfogat dimenziójának (L^3) a hányadosa, vagyis M/L^3; – SI-egysége a kilogramm per köbméter, jele: kg/m^3. Meghatározása: 1 kg/m^3 annak az anyagnak a sűrűsége, amelynek 1 m^3-e 1 kg tömegű. Ajánlott prefixált SI-egysége: Mg/m^3. Megengedett prefixált SI-egységei: kg/dm^3, g/cm^3. SI-n kívüli megengedett egysége: t/m^3.

f) A nyomás

Nyomáson értjük a felületre merőleges F nyomóerőnek és a nyomott A felületnek a hányadosát:

$$\boxed{p = \frac{F}{A}}. \tag{8.4}$$

A nyomás megmutatja az egységnyi felületre ható nyomóerőt; – dimenziója az erő dimenziójának (ML/T^2) és a felület dimenziójának (L^2) a hányadosa, vagyis $M/(LT^2)$; – SI-egysége a pascal, jele: Pa. Meghatározása: 1 Pa = 1 N/m^2 az a nyomás, amellyel egyenletesen eloszló 1 N erő 1 m^2 felületre merőlegesen hat. Ajánlott prefixált SI-egységei: GPa, MPa, kPa, mPa, μPa (1 GPa = 10^9 Pa, 1 MPa = 10^6 Pa, 1 kPa = 10^3 Pa, 1 mPa = 10^{-3} Pa, 1 μPa = = 10^{-6} Pa).

A normális légköri nyomás 101,325 kPa (34. §, 43. §).

Folyadékok és gázok nyomásának meghatározására használható nem SI-egység a bar, a millibar (mbar) és a hektopascal (hPa) [1 bar = 10^5 Pa, 1 mbar = 1 hPa = 10^{-3} bar].

g) Az erőlökés és az impulzus (lendület, mozgásmennyiség)

A speciális esetekben kísérleti úton meghatározott erő–gyorsulás összefüggés általánosan igaz, a pontszerű test gyorsulása és a rá ható **F** erő között fennáll az

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \tag{8.5}$$

összefüggés, ahol m a test tömege. A törvényt NEWTON ismerte fel először, ezért a ***dinamika alaptörvénye*** mellett használatos a ***Newton II. törvénye*** elnevezés is.

A törvényt NEWTON nem pontosan ebben a formában fogalmazta meg. Ő a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzus segítségével a dinamika alaptörvényét az

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}} \tag{8.6}$$

alakban írta fel. A törvénynek ez az alakja az m = állandó esetben egyenértékű a (8.5) összefüggéssel, hiszen

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} = m\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = m\mathbf{a}. \tag{8.7}$$

A klasszikus mechanikában a tömeg állandósága mindig teljesül, nagy sebességeknél azonban, amikor a relativitáselmélet törvényeit (129–132. §) kell alkalmazni, akkor a tömeg az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{8.8}$$

összefüggés szerint a sebesség függvényévé válik, ahol m a test mozgási tömege, m_0 a nyugalmi tömege, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s pedig a vákuumbeli fénysebesség. Ilyen esetben a törvény kétféle megfogalmazása már nem egyenértékű. Érdemes megjegyezni, hogy a Newton-féle megfogalmazás relativisztikus esetben is érvényben marad.

A (8.6) összefüggés állandó erő esetén átírható az

$$\mathbf{F}\Delta t = \Delta \mathbf{p} \tag{8.9}$$

alakra. Az $\mathbf{F}\Delta t$ szorzatot *erőlökésnek* nevezzük. Rövid ideig tartó kölcsönhatások esetén az erő többnyire állandónak tekinthető. Így a törvénynek ezt az alakját általában ilyen esetben használjuk. Változó erő esetén a vizsgált időtartamot olyan kicsi szakaszokra kell bontani, amelyeken az erő állandónak tekinthető, ekkor az impulzusváltozást az egyes szakaszokra vett erőlökések összege adja.

Amennyiben $\mathbf{F} = 0$, akkor a test impulzusváltozása zérus, azaz $\mathbf{p}$ = állandó, vagyis az impulzus megmarad. Ezt fejezi ki az ***impulzus megmaradásának törvénye***. Mivel az impulzus vektormennyiség, megtörténhet az is, hogy az impulzusnak csak valamelyik komponense marad meg. Példaként, ha $F_x = 0$, akkor az impulzus x irányú összetevője állandó.

h) Az erőhatások függetlenségének elve (szuperpozíció elve)

Ha valamely test egyszerre több másikkal van kölcsönhatásban, akkor felmerülhet a kérdés, hogy vajon, ha az egyes kölcsönhatásokat egymás után, a többiektől elszigetelve engednénk a testre hatni, akkor az egyes erők additív módon, egymástól függetlenül rakódnak-e egymásra. A tapasztalat azt mutatja, hogy ez valóban teljesül. ***Az erők szuperponálódásának ezt a tulajdonságát az erőhatások függetlensége elvének nevezzük***. Az elvet NEWTON, bár használta, nem fogalmazta meg önálló törvényként. Az erőhatások függetlenségének elve szerint tehát, ha egy testre egyszerre több erő hat, akkor

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}. \tag{8.10}$$

3. A hatás–ellenhatás törvénye (Newton III. törvénye)

Az erő fogalmát a testek kölcsönhatásának leírására vezettük be. A kísérleti tapasztalatok szerint, ha valamely test erőt fejt ki egy másikra, akkor a másik ugyanakkora, de ellentétes irányú erőt fejt ki őrá, azaz az A testre B részéről ható $\mathbf{F}_{AB}$ erő és a B testre A által kifejtett $\mathbf{F}_{BA}$ erő között fennáll az

$$\boxed{\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}} \tag{8.11}$$

összefüggés. Ez a hatás–ellenhatás törvénye, amelyet, mivel NEWTON axiómarendszerében is szerepel, ***Newton III. törvényének*** is nevezünk. A két erőt szokás erő–ellenerő párnak is nevezni. Természetesen az összefüggés szimmetrikus, teljesen mindegy, hogy a pár melyik tagját tekintjük erőnek és melyiket ellenerőnek. Fontos azonban megjegyezni, hogy az erő és az ellenerő támadáspontja mindig két különböző testen van.

9. § Az erőtörvények és a mozgásegyenlet

1. A mozgásegyenlet

A dinamika $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ alaptörvénye a testre ható eredő erő és a test gyorsulása között állapít meg kapcsolatot. A törvény kétféleképpen használható új ismeretek szerzésére. Ha az erőket ismerjük, akkor a test mozgására következtethetünk, ha pedig a test kinematikai jellemzői vannak birtokunkban, akkor az erőkről nyerhetünk felvilágosítást.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az erők igen sokszor a kölcsönhatás természetétől függetlenül, pusztán az erőt kifejtő test meghatározott paramétereinek, pl. helykoordinátáinak függvényében megadhatók. Az ilyen függvényeket *erőtörvényeknek* nevezzük. *Az az egyenlet, amit akkor kapunk, ha a dinamika alaptörvényébe beírjuk az erőtörvényeket, a mozgásegyenlet.*

Ha a gyorsulás helyébe a helyvektor második deriváltját írjuk, akkor az

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{9.1}$$

mozgásegyenlet általában a mozgás pályáját meghatározó másodrendű differenciálegyenlet, ezért ahhoz, hogy a mozgás pontos leírását megadjuk, az erők mellett ismernünk kell valamely pillanatban a mozgás kinematikai jellemzőit is. Általában a mozgás kezdőpillanatában szokás megadni a test helyét és sebességét. Ezeket az adatokat *kezdeti feltételeknek* nevezzük.

2. Erőtörvények

A következőkben példaként, anélkül, hogy részleteznénk, megadunk néhány jellegzetes erőtörvényt.

A Föld közelében a testekre – döntően a Föld vonzása miatt – ható *nehézségi erő* jó közelítéssel állandó. Az erőtörvény:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{neh}} = m\mathbf{g}, \tag{9.2}$$

ahol **g** a nehézségi gyorsulás.

Az empirikus erőskála bevezetésekor az erőmérő készítése során már megállapítottuk, hogy a csavarrugó által kifejtett F_r *rugalmas erő* arányos és ellentétes irányú a rugó megnyúlásával, vagyis a rugalmas erő az

$$F_r = -Dx \tag{9.3}$$

összefüggés szerint függ a megnyúlástól, ahol D a direkciós állandó (SI elnevezése: rugómerevség), SI-egysége: N/m. A fizikatankönyvek jelentős részében D-t rugóállandónak nevezik, ellentétben az SI-vel, amelyben $1/D$ a rugóállandó.

Általános tapasztalat, hogy a testek mozgásba hozását, ill. a mozgó testek elcsúszását az alátámasztó felület akadályozza. A testek mozgásba hozását akadályozó ún. *tapadási súrlódási erő* hatásvonala az érintkező felületekbe esik, iránya és nagysága pedig olyan, hogy a testre ható többi erők ellenében az egyensúlyt fenntartsa. Ez azonban csak egy határig lehetséges, a tapadási súrlódási erő maximális értékét a felületek anyagi minősége és a felületeket összeszorító erő szabja meg az

$$F_{t,\max} = \mu_0 K \tag{9.4}$$

törvény szerint. Itt μ_0 a tapadási súrlódási tényező, K pedig az alátámasztási felület által a testre ható egyetlen **T** erő felületre merőleges (normális) **K** komponensének, az ún. *kényszererőnek* a nagysága (**11.5. ábra**). A **T** erő felülettel párhuzamos (érintő menti, tangenciális) összetevője a tapadási súrlódási erővel egyezik meg. Amikor a húzóerő meghaladja a tapadási erő maximumát, akkor a test mozgásba jön.

Amikor a testek elmozdulnak egymáson, akkor az érintkező felületen *csúszási súrlódási erő* lép fel. A csúszási súrlódási erő az

$$F_{cs} = \mu K \tag{9.5}$$

összefüggéssel adható meg, ahol K az érintkező felületekre merőleges kényszererő, a μ csúszási súrlódási tényező pedig jó közelítéssel csak az érintkező felületek anyagi minőségétől függ. A csúszási súrlódási erő iránya az egymáson elcsúszó felületek relatív sebességének irányával ellentétes.

A tapadási súrlódási erő erőtörvénye hiányos. Az erő meghatározásához ugyanis ismernünk kell a test mozgásának, ill. a kölcsönhatásban fellépő többi erőknek bizonyos tulajdonságait.

3. Kényszererők és szabaderők

Az erőtörvények tárgyalásakor találkoztunk olyanokkal, amelyek meghatározásához a vizsgált test mozgásáról is kellett, hogy ismeretünk legyen (súrlódási erő). Ez utóbbi még inkább fennáll, ha a test mozgásának valamilyen előírt pályán kell történnie. Ilyen előírt pálya jön létre például ingamozgás, vagy a lejtőn lecsúszó test esetén. De megszabhatja a test egyensúlyát valamilyen geometriai feltétel is, pl. ha fonalra függesztjük, vagy az asztal lapjára helyezzük a testet, akkor a fonal hossza rögzített, ill. a test az alátámasztáson nem hatolhat keresztül.

Ezekben az esetekben a kényszert megvalósító test által kifejtett erőt nem tudjuk előre erőtörvénnyel megadni, az erő csak a mozgás, ill. egyensúly körülményeinek ismeretében adható meg. Az ilyen erőket ***kényszererőknek*** nevezzük, szemben az ún. ***szabaderőkkel***, amelyek esetén az erő a kölcsönhatástól függetlenül meghatározható, mert az erőtörvényt pontosan ismerjük.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az erőtörvényeket, akár szabad-, akár kényszererőkről van szó, mindig tapasztalati úton állapítjuk meg, azaz az erőtörvények nem vezethetők le a Newton-törvényekből.

A kényszererőnek többféle megnyilvánulása ismert. Így pl. a lejtő a rajta levő testre kényszererőt fejt ki. Hasonlóképpen a kötél végén levő anyagi pontra is kényszererő hat, s kényszeríti körpályára.

Megjegyzések:

– A vízszintes felületen nyugvó vagy súrlódásmentesen mozgó testre a felület által kifejtett erő egyúttal kényszererő is.

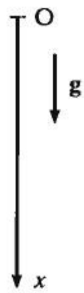
– Valamely nyugvó felületen súrlódásos mozgást végző testre a felület által kifejtett erőnek csak a felületre merőleges komponensét hívjuk kényszererőnek, a felülettel párhuzamos összetevőjét súrlódási erőnek nevezzük.

– A kényszererők gyakran a felület mentén elosztva lépnek fel. Ilyenkor a felület lokális (adott pontbeli) terhelését a nyomással jellemezzük.

10. § A dinamika alaptörvényének alkalmazása

A dinamika alaptörvényének legegyszerűbb alkalmazása az, ha a testre ható erők eredőjét ismerjük, s a törvény segítségével a gyorsulást határozzuk meg. Ilyen esetben a testre szabaderők hatnak, azaz olyanok, amelyek hatása pontos erőtörvénnyel adható meg. A gyorsulásfüggvény és a kezdeti feltételek (sebesség- és helykoordináták) ismeretében a test mozgásának kinematikai jellemzői meghatározhatók.

1. Állandó erő hatására létrejövő mozgás



10.1. ábra

Állandó erő hatására létrejövő mozgás pl. a szabadesés és a hajítások. Példaként ezeket tárgyaljuk.

A kísérleti tapasztalat szerint tetszőleges m tömegű testre a Föld közelében $F_{\text{neh}} = mg$ nehézségi erő hat. Így a mozgásegyenlet a **10.1. ábrán** látható, szokásos koordináta-rendszerben:

$$ma = mg. \tag{10.1}$$

A mozgásegyenletet integrálva adódnak a jól ismert

$$v(t) = gt + v_0, \quad x(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{10.2,3}$$

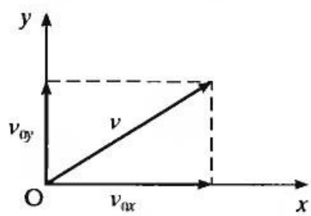
összefüggések. Természetesen a most tárgyalt mozgás magában foglalja a függőleges hajítást is.

Hajításról akkor beszélünk, ha a nehézségi erő hatására mozgó testet kezdősebességgel indítottuk el. Ekkor olyan síkbeli koordináta-rendszert érdemes használni, amelynek x tengelye vízszintes, y tengelye pedig függőlegesen felfelé mutat (**10.2. ábra**).

Ekkor a mozgásegyenlet összetevői:

$$ma_x = 0, \qquad ma_y = -mg. \tag{10.4,5}$$

A mozgásegyenletek integrálásából adódnak a kinematikából már ismert sebesség-összetevőkre vonatkozó (6.10,11) és a helykoordinátákat megadó (6.8,9) összefüggések.

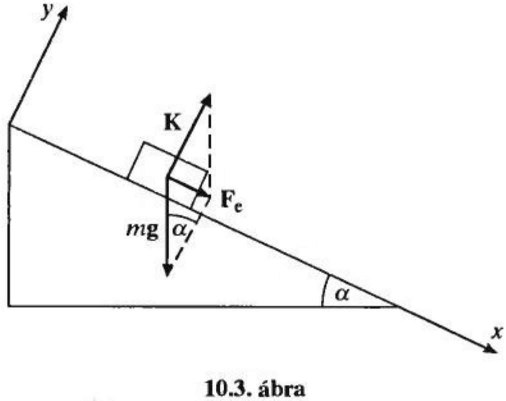


10.2. ábra

2. A lejtőn lecsúszó test mozgása

A dinamika alaptörvényének másik lehetséges felhasználása az, amikor a mozgás pályájáról vagy gyorsulásáról is rendelkezünk ismeretekkel. Ebben az esetben a dinamika alapegyenletére vonatkozó indirekt feladatról beszélünk és a kinematikai jellemzők mellett a mozgásegyenletből a kényszererőkre vonatkozó összefüggéseket is meghatározhatjuk. A pályára vonatkozó ismereteket a mozgásegyenletet kiegészítő, ún. kényszerfeltételek formájában szoktuk megfogalmazni.

A **10.3. ábra** a sima (súrlódásmentes) lejtőre helyezett testre ható erőket mutatja.



10.3. ábra

Vegyünk fel olyan koordináta-rendszert, amelynek x tengelye a lejtő mentén a test mozgásának irányába, y tengelye pedig a lejtő síkjára merőlegesen felfelé mutat. A sima lejtőn a testre a függőlegesen lefelé mutató mg erő és a lejtő síkjára merőleges K kényszererő hat. A mozgásegyenletek:

$$ma_x = mg\sin\alpha\,, \qquad ma_y = K - mg\cos\alpha\,. \tag{10.6,7}$$

A kényszerfeltétel pedig az, hogy a testnek a lejtő mentén kell mozognia, azaz

$$y(t)=0, \qquad v_y(t)=0, \qquad a_y(t)=0\,. \tag{10.8–10}$$

Így a mozgásegyenletekből

$$v_x(t) = gt\sin\alpha + v_{0x}, \qquad v_y(t) = 0, \tag{10.11,12}$$

$$x = \frac{g\sin\alpha}{2}t^2 + v_{0x}t + x_0, \qquad y = 0 \tag{10.13,14}$$

adódik.

Amennyiben a lejtő nem sima, de tudjuk, hogy a test biztosan lecsúszik rajta, akkor a μ csúszási súrlódási tényező felhasználásával a mozgásegyenletek az

$$ma_x = mg\sin\alpha - \mu K, \qquad ma_y = K - mg\cos\alpha, \tag{10.15,16}$$

a kényszerfeltételek pedig az

$$y(t)=0, \qquad v_y(t)=0, \qquad a_y(t)=0 \tag{10.17–19}$$

alakot öltik.

11. § A munkatétel

1. A munka

Az élettani értelemben vett munkavégzés az elfáradással kapcsolatos. Ezzel szemben a fizikában a ***munka*** a munkavégzést jellemző fizikai mennyiség.

Ha egy ládát egyenes vonalú pályán, vízszintes talajon vízszintes irányú erővel s távolságba húzunk el, akkor a pálya minden pontjában az erő ugyanakkora, és az erő térben összegezett hatásának mértékét a

$$W = Fs \tag{11.1}$$

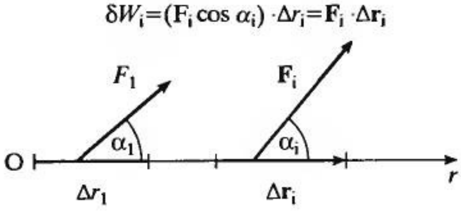
szorzattal definiáljuk. Ezt nevezzük az F erő munkájának.

Ha az egyenes vonalú pályán az erő nagysága állandó és iránya az elmozdulás irányával α szöget zár be, akkor a végzett munkát az erő elmozdulás irányú skalárkomponensével ($F\cos\alpha$) kell számítani, vagyis

$$\boxed{W = F s \cos\alpha}\,. \tag{11.2}$$

Amennyiben mind az erő iránya, mind pedig nagysága helyről helyre változik, akkor a munka kiszámítása céljából a pályát olyan kicsiny Δr_i szakaszokra osztjuk (**11.1. ábra**), amelyeken az erő nagysága és iránya már állandónak tekinthető. Ezeken a szakaszokon az elemi munka a

$$\Delta W_i = F_i \Delta r_i \cos\alpha_i \tag{11.3}$$



11.1. ábra

összefüggéssel számítható ki. A végzett munkát pedig az elemi munkák

$$W = \sum_i F_i \cos\alpha_i \cdot \Delta r_i \tag{11.4}$$

összege adja meg, ahol Δr_i a pálya kicsiny i-edik szakaszának a hossza, F_i pedig az erő nagysága ezen a szakaszon.

Az elemi munka az erő és az elemi elmozdulás skaláris szorzataként is kifejezhető, ha az elemi elmozdulást olyan vektorként kezeljük, amelynek nagysága a kicsiny elmozdulás hossza, iránya pedig az elmozdulás iránya. Ezt felhasználva

$$\Delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i, \tag{11.5}$$

a teljes munka pedig a kezdőponttól a végpontig:

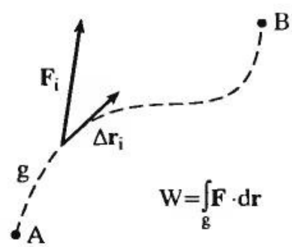
$$W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i. \tag{11.6}$$

(A vektorok skaláris és vektori szorzata megtalálható a 68. §-ban.)

Az utóbbi definíciót könnyen általánosíthatjuk tetszőleges g görbe vonalú pályára. Osszuk fel a pályát kicsiny ívdarabokra, és az egyes íveket helyettesítsük az ívdarab kezdőpontjából a végpontjába mutató elmozdulásvektorral (**11.2. ábra**).

Az összegzés általában nem egyértelmű, ha azonban a pálya felosztását minden határon túl finomítjuk, és létezik a

$$W = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_g \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \tag{11.7}$$



11.2. ábra

határérték, akkor a határértéket az **F** erő g görbe mentén vett vonalintegráljának is nevezzük, és jelölésére a

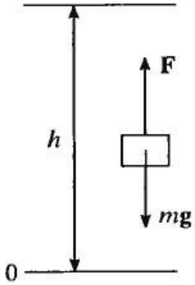
$$\boxed{W = \int_g \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \qquad (11.8)$$

szimbólumot használjuk.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a munka definícióját meghatározott erőre és pályára vonatkozóan adtuk meg, és egyelőre nem foglalkoztunk azzal, hogy adott pályán a mozgás milyen feltételek között valósítható meg. Megjegyezzük továbbá, hogy a munka adott feltételek (erő, pályaszakasz) esetén olyan skalár fizikai mennyiség, ami pozitív és negatív is lehet. A munka definíciója alapján adódik, hogy a munka dimenziója az erő dimenziójának (ML/T^2) és a hosszúság dimenziójának (L) szorzata, vagyis ML^2/T^2; – SI-egysége a joule [dzsúl], jele: J. Meghatározása: 1 J = 1 N · m munkát az 1 N erő akkor végez, ha az erő irányában 1 m úton mozdítja el a testet. Ajánlott prefixált SI-egységei: TJ, GJ, MJ, kJ, mJ (1 TJ = 10^{12} J, 1 GJ = 10^9 J, 1 MJ = 10^6 J, 1 kJ = 10^3 J, 1 mJ = 10^{-3} J.) A munka mértékegységét James Prescott JOULE [dzsúl] (1818–1889) angol természettudósról nevezték el.

2. Példák a munka kiszámítására

a) A nehézségi erő munkája és az emelési munka



11.3. ábra

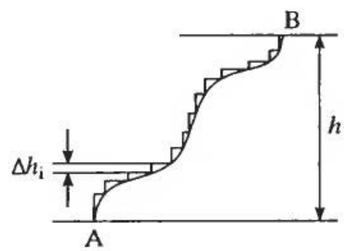
A munka fogalmát az állandó erő munkájának értelmezésével kezdtük. Az állandó erő leggyakoribb típusa a nehézségi erő. Emeljük h úton függőlegesen felfelé **F** erővel az m tömegű testet, miközben a testre még az $\mathbf{F}_{neh} = m\mathbf{g}$ nehézségi erő is hat.

A **11.3. ábra** alapján az **F** erő munkája $W_F = Fh$. A nehézségi erőé pedig (mivel az elmozdulás és az erő iránya ellentétes) $W_{neh} = -mgh$. Ha a testet nagyon lassan, állandó sebességgel emeljük, akkor $F = mg$ és természetesen a két erő munkájának abszolút értéke is egyenlő egymással. *Ilyenkor azt mondjuk, hogy az F erő a nehézségi erő ellenében végez ún. emelési munkát.* Amennyiben a test ugyanilyen körülmények között, de lefelé mozog, akkor a nehézségi erő munkája lesz pozitív és az F erőé negatív.

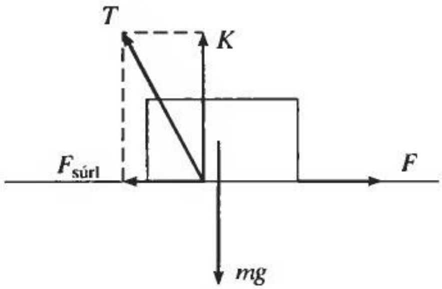
Amikor $F > mg$, akkor a test gyorsulva emelkedik. Ebben az esetben az F erő munkájának egy része a test emelésére, egy része pedig a test gyorsítására fordítódik. *Az emelési munka ebben az esetben is*

$$W_{em} = mgh. \qquad (11.9)$$

A testet nemcsak függőlegesen, hanem tetszőleges görbén is emelhetjük (**11.4. ábra**). Az ábra jelöléseivel megállapítható, hogy a testet az A pontból a h-val magasabban fekvő B pontba akár a kijelölt görbe mentén, akár úgy juttatjuk el, hogy először vízszintesen, majd függőlegesen mozgatjuk, a nehézségi erő ellenében mindig ugyanannyi munkát végzünk.



11.4. ábra



11.5. ábra

Ez egyszerűen adódik, ha a görbe pályát kicsiny vízszintes és függőleges szakaszokból álló fogazott görbével közelítjük. A vízszintes szakaszokon a végzett munka nulla, hiszen az erő merőleges az elmozdulásra, a függőleges szakaszok összhosszúsága pedig tetszőleges görbe esetén az A és B pont magasságkülönbségével egyezik meg.

A fentiek alapján megállapítható az is, hogy akár a nehézségi erő munkája, akár a nehézségi erő ellenében végzett munka tetszőleges zárt görbe mentén zérus.

b) A súrlódási munka

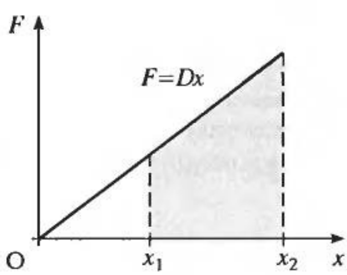
Ha az m tömegű test valamely (pl. vízszintes) felületen F erő hatására mozog, akkor a felület által a testre ható T erő felületre merőleges komponense a K kényszererő, a felülettel párhuzamos összetevője pedig az $F_{súrl} = \mu K$ súrlódási erő (9. § 2, **11.5. ábra**). Ha a test állandó sebességgel mozog, akkor az $F = F_{súrl}$ erő munkája s hosszúságú pályaszakaszon $W_F = Fs\cos 0° = \mu Ks$, a sebességgel ellentétes irányú súrlódási erő munkája pedig $W_{súrl} = F_{súrl}s\cos 180° = -\mu Ks$.

A fentiekből következik, hogy *zárt görbe mentén sem a súrlódási erő munkája, sem a súrlódási erő ellenében végzett munka nem zérus.*

c) A rugóerő és a rugóerő ellenében végzett munka

Nyújtsuk meg az $F_r = -Dx$ erőtörvényű rugót lassan, csupa egyensúlyi helyzeten keresztül. Ehhez minden pontban $F = Dx$ erőt kell kifejtenünk, hogy az erők eredője zérus legyen. A **11.6. ábra** az F erőt mutatja a rugó megnyúlásának függvényében. Az F erő munkáját (a rugóerő ellenében végzett munkát) az erő grafikon alatti területe adja, ami

$$W_F = \frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2 . \qquad (11.10)$$



11.6. ábra

Ugyanebben a folyamatban, tehát amikor a rugó megnyúlását x_1-ről x_2-re növeljük, a rugóerő munkája: $W_r = -W_F$. Látható, hogy zárt görbe mentén, azaz ha a rugót megnyújtjuk, majd ugyanoda visszaengedjük, mind a rugóerő, mind a rugóerő ellenében végzett munka zérus.

d) A kényszererő munkája

A kényszererők előírt felületre korlátozzák a testek mozgását, és mint megállapítottuk, merőlegesek a felületre, azaz nyugvó felület esetén a lehetséges elmozdulásra. *Ez azt jelenti, hogy a kényszererők munkája mindig zérus.*

3. A mozgási energia és a munkatétel

A munka definícióját felhasználva határozzuk meg a pontszerű testre ható erők eredőjének munkáját!

Ha a testre ható erők $F = ma$ eredője állandó és a test v_0 kezdősebességének egyenesébe esik, akkor a feladat igen egyszerű. A munka (11.1) definíciós egyenletébe helyettesítsük be az erőt, valamint a gyorsulást és az utat, felhasználva az $a = \frac{v - v_0}{t}$ és $s = \frac{v + v_0}{2} t$ összefüggéseket. Azt kapjuk, hogy

$$W = Fs = m\frac{v - v_0}{t} \cdot \frac{v + v_0}{2} t . \tag{11.11}$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket az adódik, hogy

$$Fs = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 . \tag{11.12}$$

Az

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} mv^2} \tag{11.13}$$

mennyiséget ***mozgási (kinetikai) energiának*** nevezzük.

A (11.12) összefüggés a ***munkatétel*** matematikai megfogalmazása és azt jelenti, hogy a pontszerű testre ható erők eredőjének munkája megegyezik a test mozgási energiájának megváltozásával. A tételt speciális esetre bizonyítottuk, azonban általánosan érvényes. Tetszőleges pályán mozgó test esetén az erők eredőjének W munkájára érvényes, hogy

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2} , \tag{11.14}$$

ahol $\mathbf{v}$ és $\mathbf{v}_0$ rendre a test sebessége a pálya végpontjában és a kezdőpontban. [Megjegyezzük, hogy a vektorok skaláris szorzata folytán (68. §) $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}| \cos 0° = v^2$, és hasonlóan $\mathbf{v}_0^2 = v_0^2$.]

4. A teljesítmény

A munkavégzés gyorsaságának jellemzésére a teljesítmény fogalmát használjuk. Az átlagos teljesítményt a

$$\boxed{\overline{P} = \frac{W}{t}} \tag{11.15}$$

összefüggés határozza meg. A képletből látszik, hogy a teljesítmény dimenziója a munka dimenziójának (ML^2/T^2) és az idő dimenziójának (T) a hányadosa, vagyis ML^2/T^3; – SI-egysége a watt, jele: W. Meghatározása: 1 W = 1 J/s a teljesítmény akkor, ha 1 s alatt a végzett munka 1 J. Ajánlott prefixált SI-egységei: GW, MW, kW, mW, μW (1 GW = 10^9 W, 1 MW = 10^6 W, 1 kW = 10^3 W, 1 mW = 10^{-3} W, 1 μW = 10^{-6} W).

A (11.15)-ből adódó $W = \overline{P}\, t$ alapján a munka további SI-egysége a W·s (= J), SI-n kívüli törvényes egységei pedig: W·h, kW·h, MW·h. (Pl. 1 kW·h = 10^3 W · 3,6 · 10^3 s = 3,6 · 10^6 J.)

Az átlagos teljesítmény mellett használatos még a pillanatnyi teljesítmény is, amit az elemi munka segítségével a

$$\boxed{P = \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} \tag{11.16}$$

összefüggéssel definiálunk.

5. Az energiatétel

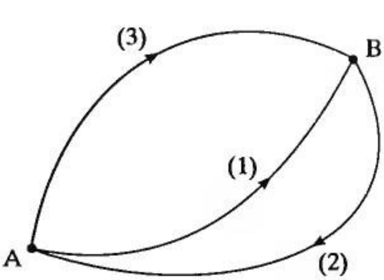
a) A konzervatív erő fogalma

Amint a 11.2/*a,c*. pontban láttuk, léteznek olyan erők (pl. nehézségi erő, rugóerő), amelyek által bármely zárt g görbe mentén végzett munka zérus, vagyis (11.6) alapján

$$W = \sum_{\mathrm{g}}^{\text{zárt}} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = 0. \tag{11.17}$$

Az ilyen erőket *konzervatív erőknek* nevezzük.

b) Ha a konzervatív erő hatására az *m* tömegű anyagi pont tetszőleges (1) pályán A-ból B-be jut, akkor a konzervatív erő rajta $W_1 > 0$ (pozitív) munkát végez (**11.7. ábra**). Ha ezt követően a tömegpontot állandó sebességgel (gyorsulásmentesen) a konzervatív erő ellenében egy tetszőleges (2) pályán visszavisszük kiindulási pontjába, akkor az általunk végzett $W' > 0$ munkával megegyező nagyságú, de ellentétes előjelű, vagyis



11.7. ábra

$W_2 = -W' < 0$ (negatív) munkát végez a konzervatív erő. Mivel a konzervatív erőnek az m tömegponton, zárt görbe mentén végzett összmunkája, vagyis a $W_1 + W_2 = 0$, ezért

$$\boxed{W_1 = -W_2}\,. \tag{11.18}$$

A-tól B-ig, illetve B-től A-ig *a konzervatív erő munkája tehát csak előjelben különbözik.*

c) Ha az anyagi pont az (1) pálya helyett bármely (3) pályán jut A-ból B-be (**11.7. ábra**), majd onnan az előbbi (2) pályán vissza A-ba, akkor most $W_3 + W_2 = 0$, amiből

$$W_3 = -W_2\,. \tag{11.19}$$

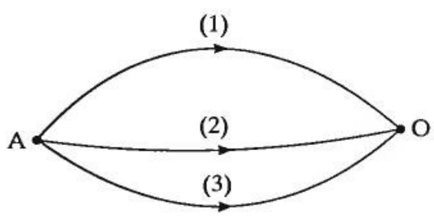
A (11.18) és a (11.19) összefüggések egybevetéséből

$$\boxed{W_1 = W_3}\,, \tag{11.20}$$

vagyis az A, B pontok közötti (1) és (3) pályákon végzett munkák egyenlők, az úttól függetlenek. A konzervatív erő munkáját tehát a kezdő- és a végpont egyértelműen meghatározza, a *végzett munka az úttól független.*

d) A potenciális energia

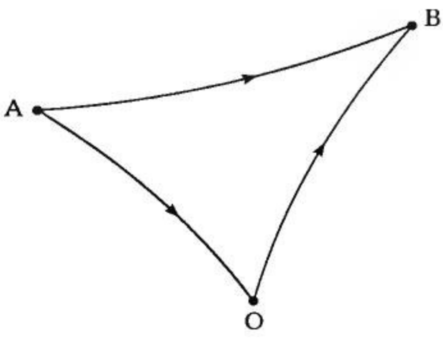
Megállapodás szerint konzervatív erő esetén az A pontban levő anyagi pont E_{pA} *potenciális (helyzeti) energiáján* értjük azt a munkát, amelyet a konzervatív erő képes rajta végezni, ha a tömegpont tetszőleges – akár (1), akár (2), akár (3), ... stb. – úton jut el A-ból az elvileg bárhol felvehető O vonatkoztatási pontba (**11.8. ábra**):



11.8. ábra

$$\boxed{E_{pA} = W_{AO}}\,. \tag{11.21}$$

Az O vonatkoztatási pontot a gyakorlatban többnyire a Földön, elméleti számítások során a végtelenben szokás felvenni, és itt a potenciális energia értelemszerűen zérus.



11.9. ábra

e) A konzervatív erő jellegéből következik, hogy az anyagi ponton A-tól B-ig végzett W_{AB} munka ugyanakkora, mint amekkora munkát végez az O érintésével A-tól O-ig és O-tól B-ig (**11.9. ábra**):

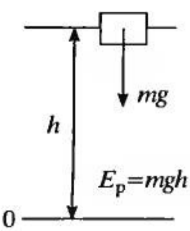
$$\boxed{W_{AB} = W_{AO} + W_{OB} = W_{AO} - W_{BO} = E_{pA} - E_{pB} = \Delta E_p}\,. \tag{11.22,23}$$

Konzervatív erő munkája tehát egyenlő a tömegpont kezdő- és végpontbeli potenciális energiájának a különbségével.

f) A nehézségi erővel kapcsolatos potenciális energia (magassági energia)

A potenciális energia (11.21) definíciója szerint a tetszőleges helyen felvett vonatkoztatási pont fölött h magasságban (**11.10. ábra**) az m tömegű anyagi pont nehézségi erővel kapcsolatos potenciális energiája:

$$\boxed{E_p(h) = W_{\text{neh}} = mgh}. \tag{11.24}$$



11.10. ábra

g) A rugóenergia

Korábban láttuk [11.2. *c)*], hogy a rugóerő, ill. a rugóerő ellenében végzett munka csak a rugó kezdeti és végső megnyúlásától függ. Ez a munka a (11.21) alapján megegyezik adott x megnyúlású rugó rugalmas potenciális energiájával, vagyis

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2} D x^2}. \tag{11.25}$$

h) A mechanikai energia megmaradása

A konzervatív erő munkája – a (11.14) munkatétel szerint – kifejezhető a tömegpont mozgási energiájának a megváltozásával is:

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 . \tag{11.26}$$

A (11.22) és a (11.26) egybevetéséből

$$E_{pA} - E_{pB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 , \tag{11.27}$$

illetve

$$E_{pA} + \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{pB} + \frac{1}{2} m v_B^2 . \tag{11.28}$$

Minthogy a kezdő- és a végpontra semmilyen kikötést sem tettünk, a (11.28) azt jelenti, hogy a tömegpont potenciális és mozgási (kinetikai) energiájának összege, vagyis az

$$\boxed{E_p + \frac{1}{2} m v^2 = \text{állandó}} \tag{11.29}$$

a mozgás során. Ez a ***mechanikai energia megmaradásának a tétele.***

12. § Periodikus mozgások dinamikai leírása

1. A körmozgás dinamikája

a) Egyenletes körmozgás

Az egyenletes körmozgást végző test gyorsulása – az ún. centripetális gyorsulás – a kör középpontja felé mutat. A centripetális gyorsulás nagysága többféle alakban is kifejezhető:

$$a_{cp} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\omega \,. \tag{12.1–3}$$

Ahhoz, hogy az m tömegű test ekkora gyorsulással egyenletesen körpályán mozogjon, a testre

$$\boxed{F_{cp} = ma_{cp} = mr\omega^2} \tag{12.4,5}$$

nagyságú, a kör középpontja felé irányuló erőnek kell hatnia. Ha egyidejűleg több erő is hat a testre, akkor a (12.4,5)-ben szereplő $\mathbf{F}_{cp}$ (centripetális erő) ezeknek az erőknek az eredője. A centripetális erő tehát megegyezik az egyenletes körmozgást végző testre ható erők eredőjével. Vektori alakban:

$$\mathbf{F}_{cp} = \sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_{cp}. \tag{12.6,7}$$

A centripetális erőt szolgáltathatja *szabaderő*, mint amilyen például a gravitációs erő, amelynek hatására a körpályára állított mesterséges holdak mozognak, és a *kényszererő* (fonal, rúd, kör alakú sín stb.) vagy mindkettő. Ez utóbbi valósul meg például a körívben hajló hídon egyenletesen haladó autó esetén.

Megjegyzés: A testre ható kölcsönhatási erők közé gyakran besorolják a centripetális erőt is. Ez hiba, hiszen a centripetális erő éppen a testre ható eredő erő sugárirányú összetevőjével azonos.

b) Gyorsuló körmozgás

A kinematika fejezetben megállapítottuk, hogy a körmozgást végző test gyorsulása érintő menti (tangenciális) és normális irányú komponensre bontható. Az érintő menti gyorsulás hatására a kerületi sebesség nagysága változik meg, a normális irányú centripetális gyorsulás pedig a sebesség irányának megváltozásáért felelős. A fentiek azt jelentik, hogy körmozgás esetén a mozgásegyenletet általában két összetevőre bontva célszerű felírni:

$$F_t = ma_t, \qquad F_n = m\frac{v^2}{r}. \tag{12.8,9}$$

2. Harmonikus rezgőmozgás

A rugók megnyúlása viszonylag kis alakváltozások mellett egyenesen arányos és ellentétes irányú a nyújtó erővel. Láttuk, hogy az ilyen típusú erőt az

$$F = -Dx \tag{12.10}$$

erőtörvénnyel adhatjuk meg, ahol x a megnyúlás, D a rugóra jellemző együttható, a negatív előjel pedig azt mutatja, hogy a rugalmas erő iránya ellentétes a kitérés irányával. A (12.10) összefüggést ***lineáris erőtörvénynek*** nevezzük. Keressük most arra a kérdésre a választ, hogy milyen mozgást végez az a test, amelyre a lineáris erőtörvénynek megfelelő erő hat. A dinamika alapegyenlete szerint az

$$ma = -Dx \tag{12.11}$$

egyenlet megoldását kell megkeresnünk.

A mozgásegyenlet matematikailag az

$$m\ddot{x} = -Dx \tag{12.12}$$

másodrendű differenciálegyenletre vezet, ahonnan m-mel való osztás és rendezés után

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \tag{12.13}$$

adódik. A (12.13) egyenlet megoldása olyan függvény, amelynek az idő szerinti második deriváltja arányos magával a függvénnyel. Ilyen függvényekkel korábbi tanulmányainkban már találkoztunk; ilyen például a szinusz- és koszinuszfüggvény, s a kísérleti tapasztalatok is bizonyítják, hogy a rugóra akasztott test mozgása ezekkel a függvényekkel írható le.

A megoldást korábbi tapasztalataink alapján kereshetjük pl. az

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{12.14}$$

alakban. Vizsgáljuk meg ezek után, hogy a (12.14) alatti függvény milyen feltételek mellett megoldása a (12.11) egyenletnek. E célból helyettesítsük be az egyenletbe a kitérés–idő függvényt és a belőle adódó gyorsulást, majd kiemelés után az

$$A\sin(\omega t + \varphi)\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right) = 0 \tag{12.15}$$

eredményre jutunk. A (12.15) egyenletnek minden időpillanatban teljesülnie kell. Ez csak úgy lehetséges, hogy

$$\frac{D}{m} - \omega^2 = 0, \tag{12.16}$$

ahonnan a körfrekvencia és a rezgésidő rendre

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}. \tag{12.17,18}$$

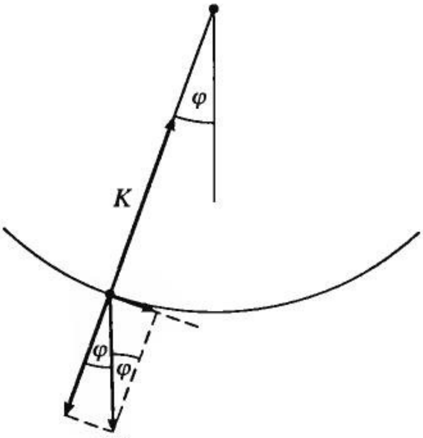
A (12.14) alatti megoldásban A és φ, azaz a rezgő test amplitúdója és kezdőfázisa a kezdeti feltételek ismeretében adható meg.

A rezgőmozgást többnyire rugóra akasztott test mozgásának vizsgálatával tanulmányozzuk. Ilyenkor a testre a rugóerő mellett hat a nehézségi erő is. Megmutatható azonban, hogy a test egyensúlyi helyzetétől mért kitéréssel a mozgásegyenlet ebben az esetben is a (12.11) alakban írható fel.

3. A fonalinga

A ***fonalinga*** vagy más elnevezéssel a *matematikai inga* elhanyagolható tömegű, l hosszúságú fonálból és a rajta függő kisméretű, m tömegű testből áll. Gyakorlati megvalósítása vékony cérnán függő kis fémgolyó. Ha egyensúlyi helyzetéből kitérítjük és magára hagyjuk, az inga periodikus mozgást végez, két szélső helyzet között közelítőleg csillapítatlanul leng. Hogyan írható le ez a mozgás?

A **12.1. ábra** alapján írjuk fel az inga mozgását jellemző dinamikai egyenleteket. Egy közbülső helyzetben az inga valamekkora sebességgel körpályán mozog, amelyhez a szükséges erőt a nehézségi és a fonalerő biztosítja. A sugárirányú gyorsulásra felírható dinamikai egyenlet, az ábra jelöléseivel:



12.1. ábra

$$K - mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{l}, \tag{12.19}$$

az érintő menti gyorsulásra pedig

$$-mg\sin\varphi = ma_t. \tag{12.20}$$

Az első egyenletből az olvasható ki, hogy a kötélerő általában nagyobb, mint a nehézségi erő fonal menti komponense! Akkor és csak akkor egyenlő vele, amikor az inga sebessége nullával egyenlő, vagyis a szélső helyzetekben. Ebből az is következik, hogy a nehézségi erő és a kényszererő eredője – a két szélső helyzetet kivéve – nem érintőirányú, hanem a körpálya homorú oldala felé mutat.

Elemezzük most a pálya menti gyorsulást a (12.20) alapján. Az m-mel való egyszerűsítés után írjuk be a tangenciális gyorsulást a szöggyorsulással kifejezve:

$$-g\sin\varphi = l\beta = l\ddot{\varphi}\,. \tag{12.21}$$

A negatív előjel arra utal, hogy a szögkitérés és a szöggyorsulás iránya egymással ellentétes. A (12.21) egyenletben a szögkitérés második deriváltja és φ trigonometrikus függvénye szerepel. Ez a differenciálegyenlet nem oldható meg „elemi" módon. Ezért arra a speciális esetre szorítkozunk, amikor a szögkitérés kicsi, abban az értelemben, hogy sin φ helyett az ívmértékben (radiánban) mért szögkitérést használhatjuk, vagyis amikor $\sin\varphi \approx \varphi$. [Ha pl. $\varphi = 5°$, akkor sin φ és φ (ívmértékben) három tizedesjegy pontossággal megegyezik.] Ezt felhasználva a (12.21) egyenlet l-lel való osztás után a

$$\ddot{\varphi} = \beta = -\frac{g}{l}\varphi \tag{12.22}$$

alakot ölti. Az egyenlet formailag megegyezik a harmonikus rezgőmozgás esetén kapottal, megoldása a lineáris erőtörvény alkalmazásakor nyert eredmény szerint

$$\varphi = \Phi\sin(\Omega t + \delta), \tag{12.23}$$

ahol Φ a szögelfordulás amplitúdója, δ az időmérés kezdetétől függő kezdőfázis, $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pedig a körfrekvencia.

Az inga lengésideje:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}\,. \tag{12.24}$$

A fonalinga tehát kis kitérések esetén harmonikus rezgőmozgást végez. A lengésidő a fonalhossz és a nehézségi gyorsulás függvénye.

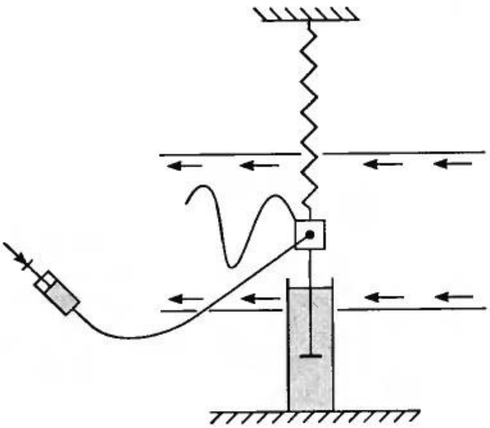
A valóságban, ha a kitérítés szöge eléri az 50°-ot, akkor 1 m körüli ingahossz mellett a (12.24) összefüggésből számított lengésidő a mértnél kb. 5%-kal kisebb. Pontos időméréssel meghatározható, hogy a lengésidő hogyan függ a lengés amplitúdójától. A mérések egyértelműen mutatják, hogy nagyobb amplitúdóhoz nagyobb periódusidő tartozik.

13. § Csillapodó rezgések

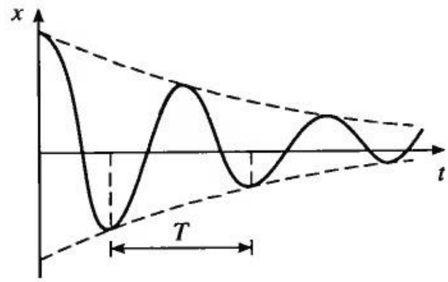
1. Sebességgel arányos csillapítás

A sebességgel arányos csillapítást másképpen *folyadékos csillapításnak* is nevezzük. A rezgés csillapítására kísérleti összeállításunkban is folyadékot használunk.

A rugóra akasztott testhez rúd közvetítésével lapos tárcsa csatlakozik, amely a folyadékban mozogva csillapítja a rezgést (**13.1. ábra**). A függőleges szállítószalagon felvett kitérés–idő görbe csökkenő amplitúdójú rezgőmozgást mutat (**13.2. ábra**).



13.1. ábra



13.2. ábra

A testre a nehézségi erő és a rugóerő mellett a sebességgel arányos és azzal ellentétes irányú csillapító erő hat. A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = -Dx - kv + mg. \tag{13.1}$$

Az egyenletben m a test tömege, D a rugóra, k pedig a csillapításra jellemző arányossági együttható. A kísérleti eredmények szerint a mozgás csökkenő amplitúdójú, harmonikus rezgésre emlékeztet.

Megmutatható, hogy az egyenlet megoldása kis csillapítás mellett, a kísérleti tapasztalatokkal összhangban

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{D} \tag{13.2}$$

alakú, ahol $\delta = \dfrac{k}{2m}$ az úgynevezett *időbeli csillapítási együttható*, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ a csillapított rezgés körfrekvenciája. ($\dfrac{D}{m} = \omega_0^2$ a csillapítatlan harmonikus rezgés körfrekvenciájának a négyzete.) A megoldásfüggvény úgy fogható fel, mintha egy harmonikus rezgőmozgás amplitúdója időben folyamatosan csökkenne. A csökkenést a két szomszédos, azonos irányú kitérés amplitúdóinak hányadosával, az ún. *csillapodási hányadossal* írhatjuk le:

$$K = \frac{A_i}{A_{i+2}} = e^{\delta T}. \tag{13.3}$$

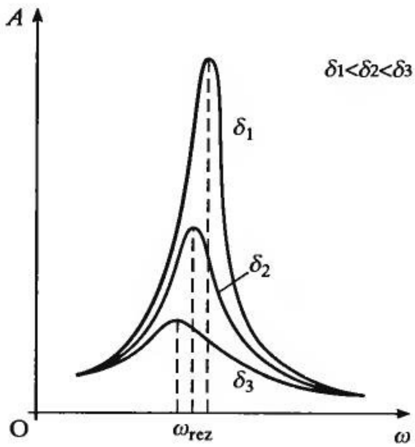
Látszik, hogy a folyadékosan csillapított rezgés körfrekvenciája kisebb, mint a megfelelő csillapítatlan harmonikus rezgésé.

Eredményünk szerint a csillapodó rezgés amplitúdója exponenciálisan csökken az idővel és annál rohamosabban, minél nagyobb a δ időbeli csillapítási együttható. A $\tau = 1/\delta$ az az idő, amely alatt a rezgés amplitúdója e = 2,718-ad részére csökken. Ezt az időt lecsengési vagy relaxációs időnek nevezzük.

Eddigi eredményeinket azzal a feltevéssel kaptuk, hogy a rezgés körfrekvenciája nem egyenlő nullával, vagyis hogy ténylegesen rezgőmozgás zajlik. Megállapítható azonban, hogy a rezgés körfrekvenciája $\delta = \omega_0$ esetén zérus, $\delta > \omega_0$ esetén pedig imaginárius érték. Ezeket a mozgásokat aperiodikusnak nevezzük. A $\delta = \omega_0$ az ún. aperiodikus határeset.

2. Kényszerrezgés

A folyadékos csillapítás azt eredményezi, hogy a rezgőmozgás az idővel exponenciálisan „lecseng". Ha azt akarjuk, hogy a rezgés a csillapítás ellenére tartósan fennmaradjon, akkor a testet periodikus erővel kell mozgásra kényszeríteni. Ha a gerjesztő erő frekvenciáját kis értékről kezdve fokozatosan növeljük, azt tapasztaljuk, hogy a rezgő test amplitúdója is folyamatosan növekszik és meghatározott, úgynevezett *rezonanciafrekvenciánál* maximális értéket ér el, majd a gerjesztő erő frekvenciájának további növelésével ismét egyre kisebb és kisebb lesz. Ezt a függést mutatja a **13.3. ábra**. Az ábra különböző δ időbeli csillapítási együtthatókhoz tartozó A–ω görbéket mutat.



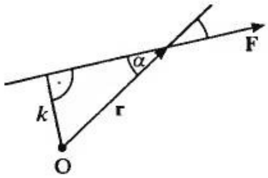
13.3. ábra

A *rezonanciajelenség* minden rezgő rendszernél fontos szerepet játszik. Néha kívánatos, hogy legyen rezonancia (pl. rezonátordobozok, az Eötvös-effektus kimutatása stb.), máskor viszont elkerülendő (pl. járművek tartozékainak zörgése, csörömpölése stb.). Berendezések, épületek, hidak tervezésekor ezekre a szempontokra figyelemmel kell lenni (Tacoma-híd katasztrófája).

14. § A perdülettétel

1. A forgatónyomaték (erőnyomaték)

Hétköznapi tapasztalataink mutatják, hogy a tengellyel rögzített testek erő hatására forgásba jöhetnek. Mindnyájan érzékelhetjük azonban, pl. egy ajtó becsukásakor, hogy könnyebb az ajtót becsukni, ha a tengelytől távolabb fejtjük ki az erőt, s az sem mindegy, hogy milyen irányú erővel próbálkozunk.



14.1. ábra

A tapasztalatok összegezéseként az erő forgató hatásának jellemzésére bevezetjük a forgatónyomaték általános fogalmát. Az **F** erőnek az O pontra vonatkozó forgatónyomatékát az

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \tag{14.1}$$

vektorral definiáljuk, ahol **r** az O pontból az erő támadáspontjába mutató vektor (**14. 1. ábra**). Látható, hogy a korábbi (középiskolai) tanulmányoknak megfelelően

$$|\mathbf{M}| = kF, \tag{14.2}$$

ahol $k = r \sin \alpha$ az erőkar. A következőkben látni fogjuk, hogy a forgatónyomatékot valóban érdemes vektormennyiségként definiálni, mert ezzel a különböző síkokban végbemenő forgató hatások is egységesen leírhatók.

Vegyük észre azt is, hogy bár a forgatónyomaték-fogalom bevezetésekor valóban a testeket forgató hatásokból indultunk ki, a forgatónyomatékot a tér tetszőleges pontjára vonatkozóan képezhetjük.

2. Az impulzusmomentum (perdület) és az impulzusmomentum-tétel (perdülettétel)

A kísérleti tapasztalatok és elméleti megfontolások szerint a testek forgása az

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}} \tag{14.3}$$

mennyiséggel, az ún. impulzusmomentummal (impulzusnyomatékkal, perdülettel) jellemezhető. Megmutatható, hogy a perdület és a testre ható forgatónyomaték között az erő és az impulzus között fennállóhoz hasonló kapcsolat van:

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}}\,. \tag{14.4}$$

Ezt az összefüggést nevezzük ***impulzusmomentum- (impulzusnyomaték-, perdület-) tételnek.*** A perdülettétel állandó eredő forgatónyomaték esetén átírható az

$$\mathbf{M} \cdot \Delta t = \Delta \mathbf{L} \tag{14.5}$$

alakra. A (14.5) összefüggésben az $\mathbf{M}\Delta t$ szorzatot az erőlökésre vonatkozó (8.9) összefüggés analógiájára forgató lökésnek nevezzük. Rövid ideig tartó kölcsönhatások esetén a forgatónyomaték többnyire állandónak tekinthető. Így a törvénynek ezt az alakját általában ilyen esetben használjuk. Változó forgatónyomaték esetén a vizsgált időtartamot olyan kicsi időtartamokra kell bontani, amikor is a nyomaték állandónak tekinthető. Ekkor az impulzusnyomaték-változást az egyes szakaszokra vett forgató lökések összege adja.

A perdülettétel a dinamika alaptörvényének egyenes következménye. Írjuk fel a dinamika alaptörvényét pontszerű testre és szorozzuk meg balról vektoriálisan a test helyvektorával:

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{14.6}$$

A kapott egyenlet jobb oldala a differenciálszámításra vonatkozó szabályok szerint átalakítható a következőképpen:

$$\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}). \tag{14.7}$$

Az átalakítás azért tehető meg, mert a (14.7) jobb oldalát kifejtve azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{14.8}$$

Mivel azonban a $d\mathbf{r}/dt=\mathbf{v}$ sebességvektor párhuzamos a $\mathbf{p}$ impulzusvektorral, ezért a (14.8) jobb oldalának első tagja a vektoriális szorzat tulajdonságainak értelmében zérus. Ez azt jelenti, hogy a (14.6) az impulzusnyomaték (14.3) definíciójának felhasználásával az

$$\mathbf{M}=\frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{14.9}$$

alakra írható át.

3. Az impulzusmomentum megmaradása és a centrális erők

Az impulzusmomentum-tétel (14.5) alakjából azonnal következik, hogy $\mathbf{M}=0$ esetén $\Delta\mathbf{L}=0$ és $\mathbf{L}=$ állandó, vagyis az impulzusmomentum megmarad. Az ***impulzusmomentum-megmaradás tétele*** tehát azt fejezi ki, hogy amennyiben a pontszerű testre ható forgatónyomatékok összege valamely pontra vonatkozóan zérus, akkor a test impulzusmomentuma erre a pontra nézve állandó. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy mind a forgatónyomaték, mind az impulzusmomentum tetszőleges pontra vonatkozóan felírható, az azonban, hogy az impulzusmomentum megmarad vagy sem, függ a vonatkoztatási pont megválasztásától. Igen fontos továbbá, hogy amint a dinamika alaptörvénye, úgy az impulzusmomentum-tétel, ill. az impulzusmomentum-megmaradás tétele is csak inerciarendszerben érvényes.

Vizsgáljuk meg most közelebbről, hogy mikor marad meg egy test impulzusmomentuma. Ehhez azt kell szemügyre vennünk, hogy mikor zérus a testre ható forgatónyomatékok eredője. Minthogy pontszerű test esetén

$$\sum_i \mathbf{r}\times\mathbf{F}_i=\mathbf{r}\times\sum_i \mathbf{F}_i, \tag{14.10}$$

megállapíthatjuk, hogy a forgatónyomatékok eredője zérus, ha az erők eredője nullával egyenlő. A forgatónyomatékok eredője azonban zérus lehet akkor is, ha az erők eredője nem az, s ezek azok az esetek, amikor az impulzusmomentum-megmaradás tétele többet mondhat az impulzusmegmaradási tételnél. Az **r** = 0 triviális eseten túlmenően a forgatónyomaték akkor is zérus, ha az **r** helyvektor párhuzamos az erők eredőjével. Ez természetesen azt jelenti, hogy az eredő erő hatásvonala a test helyvektorának egyenesébe esik. Ilyen esetben centrális erőről beszélünk, hiszen az erő a test mozgásának minden pillanatában a koordináta-rendszer origója felé mutat.

Megállapíthatjuk tehát, hogy amennyiben a testre ható erők eredője centrális, azaz mindig meghatározott pont felé mutat, akkor bár a test impulzusa nem állandó, az impulzusmomentum az erőcentrumra vonatkozóan állandó marad.

15. § A gravitációs erőtér

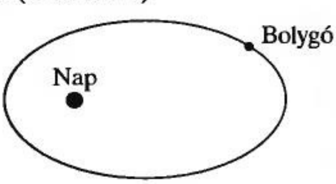
NEWTON talán legnagyobb tudományos teljesítménye az általános tömegvonzási törvény kimondása volt. A tömegvonzási törvény, amely bármely két testre érvényes, irányítja a leeső alma és a Föld körül keringő Hold mozgását is. Bár a törvény felfedezése NEWTON zsenialitását dicséri, minden bizonnyal sokat segítettek felismerésében a Kepler-törvények. A következőkben megmutatjuk, hogy a Kepler-törvényekből és a newtoni dinamika törvényeiből hogyan következtethetünk a bolygómozgást leíró tömegvonzási törvény sajátosságaira.

Az égbolt megfigyelése, különösen a bolygók mozgásának leírása nagy hatással volt már az ókori kultúrák tudományára is. A különböző korszakokban a bolygók Földhöz viszonyított mozgásának leírására, az egyre pontosabb megfigyelések alapján mind bonyolultabb modelleket alkottak. A bolygómozgás leírása azonban csak akkor vált jól áttekinthetővé és egyszerűvé, amikor Nikolausz KOPERNIKUSZ (lengyel csillagász, 1473–1543) *nyomán felismerték, hogy a bolygók a bolygórendszer középpontjában álló Nap körül keringenek.* (Emellett saját tengelyük körül forgómozgást is végeznek.) Ez a felismerés forradalmian új volt, és az addigi geocentrikus (Föld középpontú) világkép helyett az ún. heliocentrikus (Nap középpontú) világkép kialakulásához vezetett.

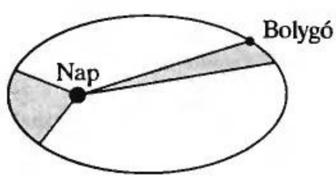
1. A Kepler-törvények

A kopernikuszi szemlélet alapján Johannes KEPLER (német csillagász, 1571–1630) öntötte mennyiségi formába a bolygómozgás törvényeit. KEPLER tanítómesterének, Tycho de BRAHE-nak (dán csillagász, 1546–1601) a mérési eredményeire, valamint saját megfigyeléseire támaszkodva a bolygók mozgására a következő három törvényt fogalmazta meg.

1) *A bolygók olyan ellipszispályán keringenek a Nap körül, amelynek egyik fókuszpontjában a Nap található* (**15.1. ábra**).



15.1. ábra



15.2. ábra

2) A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (**15.2. ábra**). *Ez azt jelenti, hogy a $\Delta A/\Delta t$ területi sebesség állandó.*

3) A Nap körül keringő különböző *bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a Naptól mért középtávolságaik köbei:*

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}}. \tag{15.1}$$

(A Naptól mért középtávolság megegyezik az ellipszispálya fél nagytengelyének hosszával.) Ez azt jelenti, hogy bolygókra a keringési idő négyzetének és a Naptól mért középtávolság köbének a hányadosa állandó.

KEPLER azt is igazolta, hogy ezek a törvények más bolygókra és holdakra, pl. a Jupiterre és holdjaira is alkalmazhatók.

2. A gravitációs törvény

a) A gravitációs törvény

Kepler első törvénye mutatja, hogy a bolygómozgás síkban zajlik. A második törvényből pedig egyszerűen következtethetünk arra, hogy az erő centrális; hatásvonala a Napot a bolygóval összekötő egyenesbe esik. A két törvény alapján megállapíthatjuk, hogy a bolygó impulzusmomentuma állandó. *Az impulzusmomentum pedig akkor lehet állandó, ha a testre ható erő centrális.* Kézenfekvő tehát, hogy amennyiben a bolygó mozgását a középponti égitest alakítja ki, akkor a centrumban levő test és a bolygó közötti erőnek centrálisnak kell lennie.

A tömegvonzási (gravitációs) erő nagyságára Kepler harmadik törvényéből következtethetünk. A gondolatmenet egyszerűsítésére foglalkozzunk azzal az esettel, amikor az ellipszis alakú bolygópálya körrel közelíthető. (Ez a naprendszer bolygóira vonatkozóan igen jól teljesül.) Ekkor a területi sebesség állandósága miatt a bolygó állandó sebességgel kering a Nap körül. A körpályán mozgó testre

$$F=mr\frac{4\pi^2}{T^2} \tag{15.2}$$

centripetális erő hat. Szorozzuk meg ezt az összefüggést r^2-tel:

$$Fr^2=4\pi^2 m\frac{r^3}{T^2}. \tag{15.3}$$

Minthogy Kepler harmadik törvénye szerint $r^3/T^2=C$, ahol C a vonzócentrumra jellemző állandó, adódik, hogy $F\sim\frac{1}{r^2}$.

Nyilvánvaló továbbá, hogy az erő kifejezésében a bolygó és a vonzócentrum tömegének szimmetrikusan kell szerepelnie, azaz

$$F \sim \frac{Mm}{r^2}, \qquad (15.4)$$

ahol M a vonzócentrum, m pedig a bolygó tömege.

b) A gravitációs törvény univerzalitása

NEWTON következő gondolata az volt, hogy az égitestek közötti erő és a Földön levő testekre ható gravitációs erő ugyanolyan természetű, vagyis hogy *a Földön leejtett kő gyorsulását ugyanolyan típusú erő okozza, mint amilyen a Holdat Föld körüli pályán tartja.* Ha ez így van, akkor a földi gravitációs gyorsulás (g_F) és a Hold centripetális gyorsulása (a_H) között a következő aránynak kell fennállnia:

$$\frac{g_F}{a_H} = \frac{\frac{1}{R_F^2}}{\frac{1}{r_H^2}} = \frac{r_H^2}{R_F^2}, \qquad (15.5)$$

ahol r_H a Föld–Hold távolsága, R_F pedig a Föld sugara. A képletben szereplő négy adat közül g_F földi mérésekből, r_H és a_H pedig csillagászati megfigyelésekből és mérésekből ismert volt. A Föld sugarára vonatkozó adatok azonban NEWTON idejében nem voltak elég pontosak, ezért a (15.5) összefüggés nem teljesült kielégítő pontossággal. Ezért NEWTON hosszú ideig nem is tette közzé a gravitációs törvényt. Amikor azonban újabb és pontosabb adatokhoz jutott a Föld sugarára vonatkozóan, akkor feltevése fényesen igazolódott. A jelenleg elfogadott mérési eredményeket a (15.5) összefüggésbe helyettesítve, a hányadosokra $\frac{g_F}{a_H} = \frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{2{,}7\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}} = 3{,}633\cdot 10^3$ és $\left(\frac{r_H}{R_F}\right)^2 = \left(\frac{3{,}84\cdot 10^5\ \mathrm{m}}{6{,}37\cdot 10^3\ \mathrm{m}}\right)^2 = 3{,}633\cdot 10^3$ adódik, ami igen pontos egyezést jelent. A gravitációs törvény így vált egyetemessé (univerzálissá). *Eszerint bármely két, pontszerűnek tekinthető test között a tömegekkel egyenesen arányos és a távolság négyzetével fordítva arányos vonzóerő hat:*

$$F_{gr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (15.6)$$

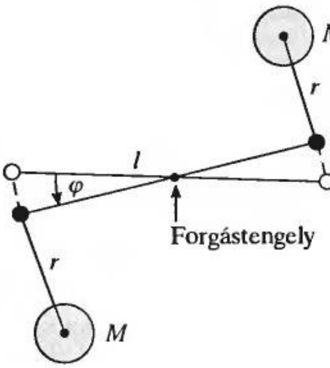
illetve vektori alakban

$$\boxed{\mathbf{F}_{gr} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}}, \qquad (15.7)$$

ahol $\mathbf{r}/r$ a helyvektor irányába mutató egységvektor.

A gravitációs törvényben szereplő G gravitációs állandó meghatározása földi körülmények között azért nehéz, mert a kis tömegű (kg nagyságrendű) testek közötti vonzóerő nagyon kicsi. Charles COULOMB (francia fizikus, 1736–1806), majd Henry CAVENDISH (angol fizikus, 1731–1810) torziós ingát használt ilyen kis erők mérésére. A torziós inga (mérleg) lelke egy nagyon vékony fémszál. Az alján levő vízszintes keresztrúd végein kis tömegű testek vannak (**15.3. ábra**). Ha a rúd két végének közelében gömb alakú, néhány kg tömegű testeket helyezünk el, a kis és a nagy golyók közötti gravitációs vonzóerők hatására a fémszál elcsavarodik, és akkor lesz egyensúlyban, amikor a gravitációs erők forgatónyomatéka és a rugalmas szál visszatérítő nyomatéka megegyezik. Ebből a gravitációs állandó meghatározható.

Az inga kis elfordulását úgy tehetjük érzékelhetővé, hogy a szál alsó végén rögzített tükörre vékony fénynyalábot vetítünk, és a visszavert fény elmozdulását figyeljük meg. A gravitációs állandó értékét CAVENDISH mérte meg először és ismeretében meghatározta a Föld tömegét és sűrűségét (16. § 2). A G állandó pontos értéke $6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.



15.3. ábra

3. Nehézségi erő, a testek súlya, súlytalanság

a) A *nehézségi erőt* az $\mathbf{F}_{\text{neh}} = m\mathbf{g}$ erőtörvénnyel értelmezhetjük. $\mathbf{F}_{\text{neh}}$ tehát az az erő, amelynek hatására a test $\mathbf{g}$ nehézségi gyorsulással szabadon esik. *Ezt az erőt elnevezésében is megkülönböztetjük a gravitációs (tömegvonzási) erőtől, amelynek az erőtörvényét* NEWTON *adta meg* (15.7) *alatti alakjában*. A nehézségi erő és a gravitációs erő irány és nagyság szerint csak kismértékben (néhány tized százalékban) különböznek egymástól, ezért sokszor egyenlő erőkként helyettesítjük az egyiket a másikkal. A fogalmi tisztaság érdekében mégis két különböző erőről beszélünk.

b) A *test súlya* elnevezéssel újabb fogalmat vezetünk be. A *súly* hétköznapi és nagyon régi, a *súlytalanság* pedig néhány évtizede ugyancsak ismert fogalom, célszerű mindkettőt úgy értelmezni, hogy a magyar elnevezések között ne legyen ellentmondás.

Ezért a test súlyán azt az erőt értjük, amellyel a test a vízszintes alátámasztást nyomja, illetve amellyel a függőleges felfüggesztést húzza. (A súlyt egyébként a gyakorlatban is így mérjük, serpenyős mérleggel, rugós erőmérővel.)

Ennek megfelelően *súlytalanságról* akkor beszélünk, amikor az előbb definiált súly nullával egyenlő: a testnek *nincs súlya,* tehát *súlytalan*. Ez a jelenség, *a súlytalanság állapota* akkor áll fenn, amikor a test mozgása során „szabadon esik", vagyis g gyorsulással mozog. (Szabadon eső liftben a mérlegen álló ember súlya nullával egyenlő; a mérleg mutatója nullán áll. A Föld körül keringő űrhajóban tartósan, a „hajítási" parabolán mozgó repülőgépben néhány másodpercig áll fenn a súlytalanság állapota.)

Megjegyezzük, hogy vannak tankönyvek, amelyekben a súlyt a nehézségi erővel azonosítják. A test súlya valóban, így is definiálható. Ekkor azonban a súlytalanság nem a nehézségi erő hiányát jelenti – mint azt az elnevezés alapján gondolnánk –, mert a test éppen a nehézségi erő hatására esik szabadon.

Az általunk definiált súly és a nehézségi erő nagysága egyenlő, amikor a test függőleges irányban nem gyorsul, de a két erő akkor is megkülönböztetendő, mert különböző testekre hatnak: az egyik ugyanis az alátámasztásra (felfüggesztésre), a másik pedig a szóban forgó testre hat.

4. A tehetetlen és a súlyos tömeg fogalma

Newton második törvényében *a tömeg* mint *a tehetetlenség mértéke* jelenik meg. A gravitációs törvényben a testeknek egy másik tulajdonsága nyilvánul meg, nevezetesen: *mennyire vonzzák egymást*. Ez utóbbi tulajdonság, bár eddig a különbséget nem hangsúlyoztuk, egészen távolinak tűnhet a korábbitól, azaz attól, hogy *mennyire* „tehetetlenek". Az eltérés kiemelésére a *gravitációs* törvényben szereplő tömeget *súlyos tömegnek* (m_s), a dinamika alaptörvényében szereplőt *tehetetlen tömegnek* (m_t) nevezzük.

NEWTON világosan látta a két fogalom közti különbséget, de a közöttük meglevő kapcsolatot is, amit a dinamika alapegyenlete közvetített. Ha ugyanis az

$$m_t \mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{15.8}$$

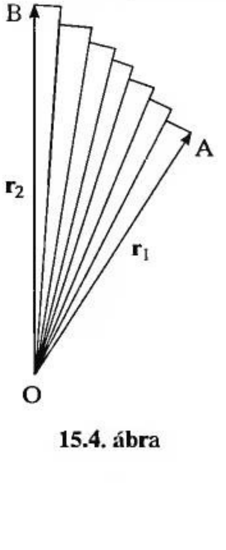
dinamikai alapegyenletbe beírjuk a gravitációs erőtörvénnyel (15.7) alatt megadott erőt, akkor az

$$m_{1t} \mathbf{a} = -G \frac{m_{1s} m_{2s}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{15.9}$$

mozgásegyenletet kapjuk, amelyben az (1)-es test mindkét tulajdonsága szerepel. Fennáll-e, hogy $m_{1s} = m_{1t}$? (Lehet-e a fenti egyenletben egyszerűsíteni m_1-gyel?)

A kérdést NEWTON is vizsgálta, pontosan azonban csak EÖTVÖS Loránd (1848–1919) ingakísérletei adtak választ erre. EÖTVÖS nagy pontossággal megmutatta, hogy a tehetetlen és a súlyos tömeg arányos egymással, azaz megfelelő mértékegység-választással számértékük egyenlővé tehető.

A tehetetlen és a súlyos tömeg egyezésének vagy eltérésének kérdése a fizika számára óriási jelentőségű. Az általános relativitáselmélet alapját jelentő ekvivalenciaelv a tehetetlen és a súlyos tömeg azonosságát jelenti.



15.4. ábra

5. A gravitációs és a nehézségi erőtér

a) A gravitációs erő munkája

Számítsuk ki a gravitációs erő munkáját, miközben a test mozgása során az $\mathbf{r}_1$ helyvektorú A pontból az $\mathbf{r}_2$ helyvektorú B pontba jut (**15.4. ábra**).

A munka általános definíciója szerint az erőnek a pálya tetszőleges két (A és B) pontja között végzett munkája:

$$W_{12} = \sum_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \,. \tag{15.10}$$

A munka kiszámításakor vegyük figyelembe azt a tényt, hogy a gravitációs erő csak akkor végez munkát, amikor a mozgó test a gravitációs centrumtól távolodik vagy közeledik hozzá. A helyvektor irányára merőleges elmozduláskor a gravitációs erő munkája nullával egyenlő. Ezért tetszőleges görbe mentén a mozgás olyan kis „lépcsőkből" álló pálya menti mozgással helyettesíthető, ahol a lépcsők merőlegesek az oda húzott helyvektorra. Így elegendő a vonzócentrumtól húzott sugár mentén kiszámítani a munkát.

A munkát az ábra jelöléseivel a

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r \tag{15.11}$$

integrál adja meg, ahol m a mozgó test, M a vonzócentrum tömege, a negatív előjel pedig azt jelzi, hogy az erő iránya ellentétes a helyvektor irányával.

A (15.11) egyenletből a munka:

$$W_{12} = -GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{15.12}$$

b) A mechanikai energia megmaradása gravitációs erőtérben

Megállapíthatjuk, hogy a gravitációs erő munkája független a görbe alakjától, amelyen a test mozog, csak a két végpont helyzetétől függ. Ez azt jelenti, hogy a gravitációs erő konzervatív. Ezért, ha a (15.12) összefüggésben az $r_2 \to \infty$ határátmenetet képezzük, akkor a kapott munka csak az A pont r_1 helyétől függ. Ennek megfelelően a *testnek* az A pontban, helyzeténél fogva, a végtelenben felvett nulla szinthez viszonyítva

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{mM}{r_1} \tag{15.13}$$

gravitációs potenciális energiája van. Ez az energia megegyezik azzal a munkával, amit a gravitációs erő végez, miközben az m tömegű test az A pontból a végtelen távolban felvett vonatkoztatási pontba jut.

Alkalmazzuk a mozgó testre a munkatételt, amely szerint a test mozgási energiájának a megváltozása egyenlő a testre ható erők munkáinak algebrai összegével, miközben a test A-ból a B pontba került. Vagyis

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \tag{15.14}$$

és innen

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{r_2}. \tag{15.15}$$

A (15.15)-beli eredmény szerint a test mozgási és potenciális energiájának összege, a test mechanikai energiája állandó, tehát a gravitációs erő hatása alatt mozgó testre érvényes a *mechanikai energia megmaradásának tétele*, azaz

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{állandó}\,, \tag{15.16}$$

ahol v a test pillanatnyi sebessége, r pedig a testnek a vonzócentrumtól mért távolsága. A mechanikai energia megmaradása természetesen azonnal következik abból, hogy a *gravitációs erő konzervatív erő,* vagyis hogy munkája független az úttól.

6. Gravitációs térerősség, potenciál

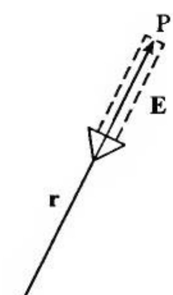
A tapasztalat szerint a testek közvetlen érintkezés nélkül is gravitációs erőt fejtenek ki egymásra. Ezt a jelenséget azzal magyarázzuk, hogy a test maga körül fizikai tulajdonságokkal rendelkező, ún. *gravitációs erőteret* (gravitációs mezőt) kelt, amely a benne levő testekre gravitációs erőt fejt ki.

A gravitációs erőteret a *gravitációs térerősséggel* (jele: **E**) jellemezzük, amely a testre ható $\mathbf{F}_{gr}$ gravitációs erő és a test m tömegének a hányadosa:

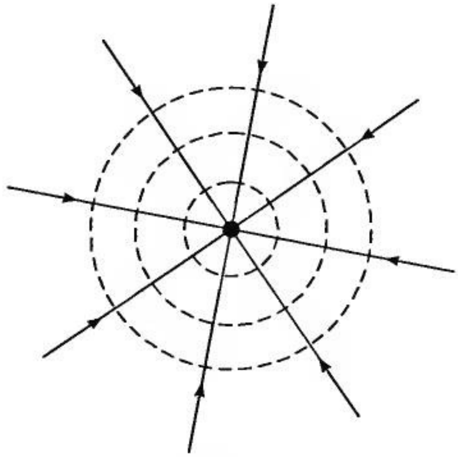
$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{gr}}{m}}\,. \tag{15.17}$$

M tömegű gömbszimmetrikus vonzócentrum esetén (**15.5. ábra**) a (15.7) szerint $\mathbf{F}_{gr} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$, ezért az M tömegű vonzócentrumtól $|\mathbf{r}| = r$ távolságra a gravitációs térerősség:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{gr}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{15.18}$$



15.5. ábra



15.6. ábra

A gravitációs térerősség iránya megegyezik a gravitációs erő irányával, számértéke pedig egyenlő az egységnyi tömegű testre ható gravitációs erő számértékével. Dimenziója az erő dimenziójának (ML/T²) és a tömeg dimenziójának (M) a hányadosa, vagyis L/T²; – SI-egysége: N/kg (= m/s²). Mivel a *gravitációs erő centrális*, ezért a *térerősség* is az, vagyis iránya a vonzócentrum felé mutat. A *gravitációs erőtér tehát centrális*.

A térerősséget jellemezhetjük az *erővonalakkal*. Az erővonal olyan görbe, amelynek érintője bármely pontban az erő irányát adja meg (**15.6. ábra**). A gravitációs térerősség nagyságát úgy adhatjuk meg, hogy a térerősség irányára merőleges egységnyi felületen át annyi erővonalat húzunk, amennyi ott a térerősség számértéke. Ha a gravitációs térerősség iránya és nagysága a hellyel változik, akkor az erőtér *inhomogén*.

Gravitációs potenciálon a helyzeti energia és a test tömegének hányadosát értjük:

$$\boxed{V = \frac{E_p}{m}}, \qquad (15.19)$$

és számértéke egyenlő az egységnyi tömegű test potenciális energiájának számértékével. Dimenziója az energia dimenziójának (ML²/T²) és a tömeg dimenziójának (M) a hányadosa, vagyis L²/T². SI-egysége a J/kg (= m²/s²).

A (15.19) definíció és a (15.13) összefüggés alapján a gömbszimmetrikus testek gravitációs erőterének potenciálja a testtől r távolságra:

$$V = -G\frac{M}{r}, \qquad (15.20)$$

vagyis fordítottan arányos az erőcentrumtól mért távolsággal; adott távolságban, az iránytól függetlenül ugyanaz az értéke. Ha az azonos potenciálú pontokat ábrázoljuk, akkor úgynevezett *ekvipotenciális felületeket* kapunk. Az ekvipotenciális felületek merőlegesek az erővonalakra. Centrális erőtérben az ekvipotenciális felületek *koncentrikus gömbök*.

Amikor a test ekvipotenciális felületen mozog, akkor az erő nem végez munkát. (A körpályán keringő mesterséges holdon a gravitációs erő munkája zérus.)

16. § Mozgás gravitációs erőtérben

A gravitációs törvény megfogalmazásához a Kepler-törvények szolgáltattak alapot. A gravitációs törvény azonban minőségileg új lehetőséget teremtett, mert felhasználásával minden olyan mozgás leírható, amely a tömegvonzás hatására jön létre. Természetesen a gravitációs törvényből levezethetők a Kepler-törvények is. Erre azonban itt nem térünk ki, mert a gondolatmenet matematikailag viszonylag bonyolult.

Annyit azonban megjegyzünk, hogy a Kepler-törvények csupán egyetlen vonzócentrum, pl. a Nap környezetében tartósan megmaradó testek mozgását írják le, nem szólnak azonban a vissza nem térő üstökösökről. *A gravitációs törvény alapján kimutatható, hogy a tetszőleges vonzócentrum (pl. a Nap) hatására mozgó testek pályája mindig kúpszelet (ellipszis, parabola* vagy *hiperbola).* A Nap környezetében tartósan megmaradó testek ellipszis-, a vissza nem térő üstökösök parabola- vagy hiperbolapályán mozognak. A pálya típusa energetikai kritériumok alapján egyszerűen meghatározható. Ha a bolygó összenergiájára teljesül, hogy $E \geq 0$, akkor a bolygó végtelen távolságba is eljuthat a vonzócentrumtól. Amennyiben az összenergia pozitív, akkor a pálya hiperbola, ha zérus, akkor parabola. Amikor a bolygó összenergiája negatív, akkor a bolygó a vonzócentrum körül ellipszispályán mozog. A körpálya elfajult ellipszisnek tekinthető.

A gravitációs törvény alapján a vonzócentrum adatai is meghatározhatók.

1. A mesterséges holdak mozgása

A mesterséges holdak mozgása is a Newton-féle tömegvonzási törvény segítségével írható le. Ebben az esetben a Föld a vonzócentrum és körülötte keringenek a műholdak. A műholdak mozgására is érvényesek a Kepler-törvények, csak a Nap szerepét a Föld veszi át.

a) A körsebesség

A műholdakkal kapcsolatban a legegyszerűbb kérdés az, hogy a Föld középpontjától r távolságban milyen sebességgel kell mozognia a műholdnak ahhoz, hogy pontosan körpályán keringjen. A h magasságban keringő, m tömegű műhold mozgásegyenlete ekkor

$$G\frac{M_F m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \tag{16.1}$$

ahonnan

$$v = \sqrt{G\frac{M_F}{r}}, \tag{16.2}$$

ill. felhasználva, hogy $r = R_F + h$,

$$v = \sqrt{G\frac{M_F}{R_F + h}} = \sqrt{\frac{gR_F^2}{R_F + h}} = \sqrt{gR_F}\sqrt{\frac{R_F}{R_F + h}}. \tag{16.3}$$

Az átalakításnál felhasználtuk, hogy $GM_F = gR_F^2$. A Föld felszíne felett nagyon kis magasságban ($h << R_F$) keringő műhold sebességére innen

$$v_1 = \sqrt{gR_F} \tag{16.4}$$

adódik. A $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ és $R_F = 6370\ \mathrm{km}$ értékeket behelyettesítve, $v_1 = 7{,}9\ \mathrm{km/s}$ értéket kapunk. Ezt a sebességet nevezzük körsebességnek vagy első kozmikus sebességnek.

b) A szökési sebesség

Szökési sebességnek nevezzük azt a sebességet, amellyel a Föld felszínéről indított rakéta elhagyná a Föld vonzókörét. Formálisan ezt úgy vehetjük figyelembe, hogy a rakéta végtelen nagy távolságba kerül a Földtől, s ott sebessége zérusra csökken. Az energiatétel szerint ekkor

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{II}}^2 - \frac{GM_{\mathrm{F}}m}{R_{\mathrm{F}}} = 0. \tag{16.5}$$

Innen a v_{II} indítási (szökési) sebesség:

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2gR_{\mathrm{F}}}, \tag{16.6}$$

azaz $\sqrt{2}$-ször akkora, mint a körsebesség, $v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2}v_{\mathrm{I}} = 11{,}2$ km/s. A szökési sebességet szokás második kozmikus sebességnek is nevezni. Gyakran harmadik kozmikus sebességként említik azt a sebességet, amellyel a rakéta a naprendszert is elhagyhatja. A harmadik kozmikus sebesség a második kozmikus sebességhez hasonlóan számítható ki, csak az energiamegmaradás tételét a Nap terére vonatkozóan kell felírni. Eredményül $v_{\mathrm{III}} = \sqrt{\frac{2GM_{\mathrm{N}}}{r_{\mathrm{FN}}}} \approx$ $\approx 41{,}2$ km/s adódik, ahol r_{FN} a Föld Naptól mért távolsága, M_{N} a Nap tömege.

2. A Nap (a vonzócentrum) tömege

A naprendszerben a bolygók, például a Föld is jó közelítéssel körpályán mozognak, azaz a Kepler-törvények szerinti ellipszispálya ε numerikus excentricitása (a c fókusztávolság és a fél nagytengely a hosszának aránya): $\varepsilon = c/a \cong 0$. Így az m tömegű bolygó mozgásegyenlete a

$$G\frac{M_{\mathrm{N}}m}{a^2} = m\frac{v^2}{a} \tag{16.7}$$

alakban írható fel. Ebből a pályasugár, valamint a keringési idő ismeretében a Nap M_{N} tömege meghatározható, ha figyelembe vesszük, hogy $v = 2a\pi/T$:

$$M_{\mathrm{N}} = \frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{a^3}{T^2}. \tag{16.8}$$

A (16.8) összefüggésbe a földpálya adatait beírva, a Nap tömegére $M_{\mathrm{N}} = 1{,}986\cdot 10^{30}$ kg adódik.

Hasonló gondolatmenettel a Föld tömegére $M_{\mathrm{F}} = 5{,}97\cdot 10^{24}$ kg, átlagos sűrűségére pedig $\rho_{\mathrm{F}} = \frac{M_{\mathrm{F}}}{V_{\mathrm{F}}} \approx 5{,}5\cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ adódik.

3. Az űrkutatás és a mesterséges holdak felhasználása

A mesterséges holdak Föld körüli pályára bocsátása összetett, nagy pontosságot igénylő feladat. A rakétatechnika fejlődése tette lehetővé, hogy az ember az 1950-es évektől a világűrbe távközlési, meteorológiai, katonai műholdakat, tudományos célokat szolgáló szondákat, távcsöveket, űrállomásokat juttasson el. Az űrkutatás a hozzá szükséges magas szintű technológia miatt az ipari fejlődés egyik húzóerejévé vált. Az űrkutatáshoz kifejlesztett eszközök, anyagok nagy része rövid idő alatt mindennapjainkban is hasznosul.

Az első mesterséges holdat, a Szputnyik I-et 1957-ben a Szovjetunióban bocsátották fel. A Szputnyik I. tömege 83,6 kg, a pálya perigeum- és apogeummagassága 229 km, illetve 946 km, keringési ideje 96,2 perc volt. A műhold három hónapig keringett a Föld körül. [A perigeum (apogeum) a műhold Föld körüli pályájának a Földhöz legközelebb (legtávolabb) eső pontja.]

A Szovjetunió és az Amerikai Egyesült Államok közötti katonai versengés az űrkutatásban igen gyors fejlődést indított el. Jurij GAGARIN (1934–1968) szovjet űrpilóta volt az első ember a világűrben (1961). A Holdra nyolc évvel később, 1969-ben Neil ARMSTRONG (1930–) és Edwin ALDRIN (1930–) amerikai űrhajósok szálltak le elsőként az Apollo 11 holdkompján. Az azóta eltelt időben számos expedíció indult a Holdra.

A Szaljut űrállomáson magyar űrhajós, FARKAS Bertalan (1949–) is dolgozott (1980). Az USA-ban kifejlesztették a többszöri űrutazásra használatos űrrepülőgépet, az űrsiklót. A bolygók, kisbolygók és a Halley-üstökös irányába számos űrexpedíció indult, amelyek fontos adatokat szolgáltattak a világűrre vonatkozóan.

A Föld körül tartósan keringő műholdak között a katonai célokat szolgáló holdak mellett ott találjuk a meteorológiai és a távközlési műholdakat is. A meteorológiai műholdak pontos adatokat szolgáltatnak mind a légkör, mind a földfelszín állapotáról. Ezzel segítik az időjárás változásának nyomon követését és előrejelzését. A különböző sugárzási tartományokban rögzített felvételekből mezőgazdasági terméshozamok becsülhetők.

A műholdak helyzetére vonatkozó adatok, a világűrből sugárzott felvételek, időjárási térképek, valamint az űrexpedíciók szondáival végzett mérések eredményei jórészt elérhetők a világhálón.

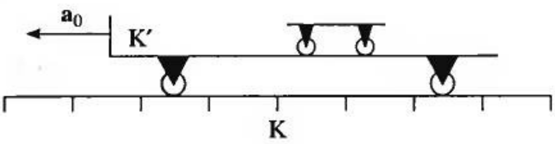
17. § Mozgások leírása gyorsuló koordináta-rendszerekben

A Newton-törvények inerciarendszerben érvényesek. Gyakran előfordul azonban, hogy a vizsgált problémához természetesen illeszkedő koordináta-rendszer nem inerciarendszer. A forgó Földön zajló események finom részletekbe menő leírásakor pl. a Földhöz rögzített koordináta-rendszer már közelítőleg sem tekinthető inerciarendszernek.

A következőkben néhány speciális gyorsuló koordináta-rendszer esetén megmutatjuk, hogy tehetetlenségi erők bevezetésével a dinamika alaptörvénye formálisan, nem inerciarendszerben is alkalmazható, azaz a mozgásegyenlet gyorsuló koordináta-rendszerben is a megszokott módon írható fel.

1. Mozgás leírása egyenletesen gyorsuló koordináta-rendszerben

Tekintsük a **17.1. ábrán** látható összeállítást, és vizsgáljuk a kiskocsi mozgását az egyenletesen gyorsuló nagyobbik kocsihoz rögzített K′ koordináta-rendszerben! Jelöljük a nagyobbik kocsi gyorsulását $\mathbf{a}_0$-lal! A kiskocsit először hagyjuk magára, majd erőmérő közbeiktatásával rögzítsük a nagy kocsihoz!



17.1. ábra

Az első kísérlet szerint a K′ rendszerben a magára hagyott test $-\mathbf{a}_0$ gyorsulással mozog. A második kísérlet pedig azt mutatja, hogy ahhoz, hogy egy test a K’ rendszerben nyugalomban maradjon, erő szükséges. Ha a kiskocsi kerekei könnyen forognak (a súrlódás kicsiny), akkor az erő – amint a dinamika alaptörvénye alapján várható is – jó közelítéssel $m\mathbf{a}_0$, ahol m a kiskocsi tömege. Ezekből a tapasztalatokból azt a következtetést kell levonnunk, hogy a K′ rendszerben a Newton-törvények nem érvényesek, hiszen megfigyeléseink szerint

– a magára hagyott test gyorsul;

– a nyugalom fenntartásához erő szükséges.

A K′ koordináta-rendszerben érvényes törvények kísérleti megállapításához további méréseket kellene végezni. Erre azonban nincs szükségünk, mert a Newton-törvények felhasználásával ez egyszerűen meghatározható. A dinamika alaptörvényét leíró egyenletet az

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 = m\mathbf{a}' \tag{17.1}$$

alakba rendezve, az $m\mathbf{a}_0$ korrekció figyelembevételével a K′-beli megfigyelések azonnal értelmezhetők:

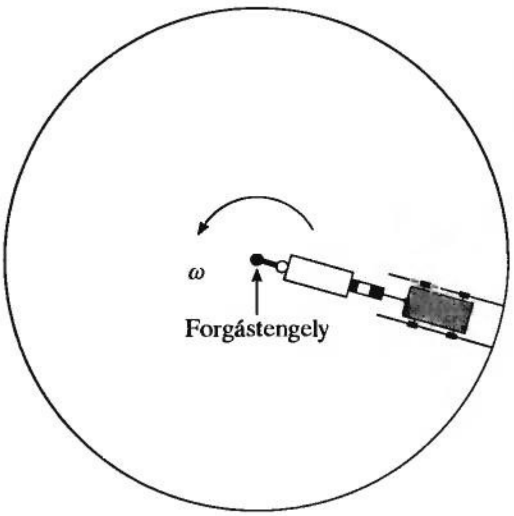
- ha a testre ható erők eredője zérus, akkor a fenti egyenletből következik, hogy $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}_0$;
- ahhoz, hogy $\mathbf{a}' = 0$ legyen, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_0$ erőt kell kifejteni.

A gyorsuló koordináta-rendszerbeli törvények megfogalmazásának szokásos módja, hogy a testre ható valódi erőket kiegészítjük a fiktív (tehát a valóságban nem létező)

$$\boxed{\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_0} \tag{17.2}$$

ún. tehetetlenségi erővel (inerciaerővel). Ha a valódi (kölcsönhatásból származó) erőhöz az $\mathbf{F}_t$ tehetetlenségi erőt is hozzávesszük, akkor a dinamika alaptörvényét inerciarendszerben és egyenletesen gyorsuló rendszerben is azonos módon fogalmazhatjuk meg.

2. A mozgás leírása egyenletesen forgó rendszerben



17.2. ábra

Gondoljuk végig a következő kísérletet! Helyezzünk forgatható korongra, a **17.2. ábrán** látható módon könnyen gördülő kiskocsit, majd forgassuk meg a korongot ω állandó szögsebességgel! Ezután a rugós erőmérővel rögzítsük a kiskocsit a koronghoz, majd forgassuk ismét egyenletes ω szögsebességgel a korongot! Figyeljük, mit mutat az erőmérő!

Az első kísérletben azt tapasztaljuk, hogy a forgó korongon magára hagyott kiskocsi sugárirányban elmozdul.

A második kísérletben, ha a súrlódás elhanyagolható és az erőmérő sugárirányban helyezkedik el, akkor – amint ez a dinamika alaptörvénye alapján várható is –

$$F = mR\omega^2 \tag{17.3}$$

erőt mérünk, ahol m a kiskocsi tömege, R pedig a kocsi tömegközéppontjának a tengelytől mért távolsága.

A kísérleti tapasztalatok ismét arra utalnak, hogy a Newton-törvények az egyenletesen forgó koordináta-rendszerben nem érvényesek a szokásos alakban. Megfelelő tehetetlenségi erők bevezetésével azonban a dinamika alaptörvényének inerciarendszerben megszokott alakja most is fenntartható. A második kísérletből adódik, hogy sugárirányban kifelé mutató **R** rádiuszvektor esetén

$$\boxed{\mathbf{F}_{cf} = m\mathbf{R}\omega^2} \tag{17.4}$$

tehetetlenségi erőt kell bevezetni, hiszen ekkor teljesül, hogy a nyugvó testre ható erők eredője zérus. A sugárirányban kifelé mutató $\mathbf{F}_{cf}$ erőt *centrifugális erőnek* nevezzük.

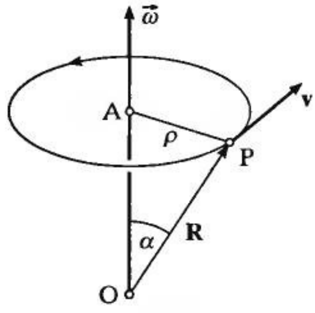
A centrifugális és centripetális erővel kapcsolatban igen sok félreértés él a köztudatban. A két erőt gyakran összetévesztik, mert nagyságuk azonos. Jegyezzük meg azonban, hogy a centrifugális erő fiktív erő, s csak forgó koordináta-rendszerben beszélhetünk róla. Az egyik leggyakoribb tévedés, hogy a centrifugális és centripetális erőt erő–ellenerő párnak tekintik. Ez durva hiba, hiszen a centrifugális erőnek – mint megállapítottuk – nem létezik ellenereje.

Pusztán a centrifugális erő bevezetésével csak a forgó rendszerhez képest nyugalomban levő, ill. éppen induló testekre vonatkozó tapasztalatok értelmezhetők. A forgó rendszerbeli mozgások teljes leírása csak további tehetetlenségi erők bevezetésével tehető meg.

3. A Coriolis-erő

Ha a merev test egy OA tengely körül ω szögsebességgel forog (**17.3. ábra**) és P a testnek az $\overrightarrow{OP} = \mathbf{R}$ rádiuszvektorral jellemzett pontja, akkor a P pont sebességének nagysága:

$$v = \omega\rho = \omega R \sin\alpha\,. \tag{17.5}$$



17.3. ábra

Mivel ennek az összefüggésnek a jobb oldala egy vektorszorzat abszolút értékének felel meg, ezért a szögsebességet olyan vektornak ($\vec{\omega}$) tekintjük, amelyet az O-ból kiindulva mérünk fel olyan irányítással, hogy $\vec{\omega}$ iránya a forgással jobbmenetű csavart képezzen. Ezzel az $\vec{\omega}$ szögsebességvektorral a forgó merev test P pontjának sebessége:

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{R}. \tag{17.6}$$

Megmutatható, hogy az $\vec{\omega}$ szögsebességgel forgó rendszerhez képest $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó test mozgásának leírásához az

$$\boxed{\mathbf{F}_{\mathrm{Cor}} = 2m\mathbf{v} \times \vec{\omega}} \tag{17.7}$$

tehetetlenségi erőt kell bevezetni. Ezt az erőt *Coriolis-erőnek* nevezzük. (Gustav-Gaspard CORIOLIS [korioli] francia mérnök-matematikus, 1792–1843.)

Megjegyezzük, hogy amennyiben a koordináta-rendszer szögsebessége változik, akkor további tehetetlenségi erőt kell bevezetni, ezzel azonban itt nem foglalkozunk.

4. A Földhöz rögzített koordináta-rendszerben fellépő tehetetlenségi erők

Földünk $\varepsilon = 0{,}0167$ numerikus excentricitású – közel kör alakú – pályán kering a Nap körül. A keringés síkja az ekliptika. A Föld a Nap körüli mozgása mellett észak–déli tengelye körül nyugatról keletre forog is. A tengely, illetve a rá merőleges egyenlítői sík az ekliptika síkjával 23,5°-os szöget zár be. A Föld forgásának szögsebessége az állócsillagokhoz képest kicsiny, a tengely körüli forgáshoz képest elhanyagolható.

A mechanikában gyakran használunk Földhöz rögzített koordináta-rendszert. A Földhöz rögzített koordináta-rendszer nem inerciarendszer. Ebben a rendszerben a *centrifugális* és a *Coriolis-erőt figyelembe kell venni a mozgásegyenletek felírásakor.*

Bár ezek az erők többnyire kicsinyek, egyes jelenségek értelmezésekor nem hanyagolhatók el. A centrifugális erő a nehézségi gyorsulás és a testek súlyának a helytől való függését okozza. A Coriolis-erő hatása a Földhöz képest mozgó testek esetén jelentkezik.

A Föld felszínén mérhető nehézségi gyorsulás nagysága és iránya helyfüggő. Ennek számos oka van. Az okok között szerepel a Föld lapult alakja, a felszín kiemelkedései, az inhomogén kőzeteloszlás és még számtalan tényező. Az alábbiakban a Föld forgásából adódó hatást vizsgáljuk. Azért, hogy a fentiekben említett befolyásoló tényezőket kikapcsoljuk, feltételezzük, hogy a Föld M tömegű, homogén tömegeloszlású, R_F sugarú gömb. Ekkor a Földön nyugvó testekre ható erőt csak a centrifugális erő befolyásolja. A **17.4. ábra** szerint a Föld felszínén nyugvó testre a gravitációs vonzóerő és az **N** nyomóerő hat. A gyorsuló koordináta-rendszerben e két erő mellett a centrifugális erő is fellép, és a test a három erő hatására kerül nyugalomba.

A számítások azt mutatják, hogy a nehézségi gyorsulás a centrifugális erő miatt a

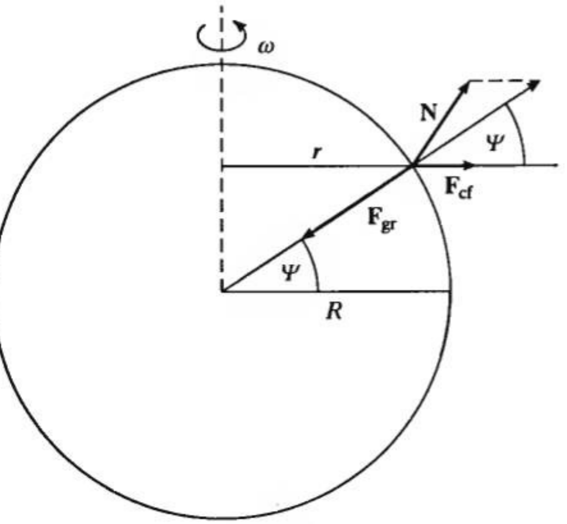
$$g(\psi) \approx g_{90^\circ} - R_F\,\omega^2 \cos^2\psi = (983{,}2 - 3{,}4\cos^2\psi)\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \qquad (17.8)$$

függvény szerint változik a ψ földrajzi szélességgel. Pontos mérések szerint a nehézségi gyorsulás a valóságban a

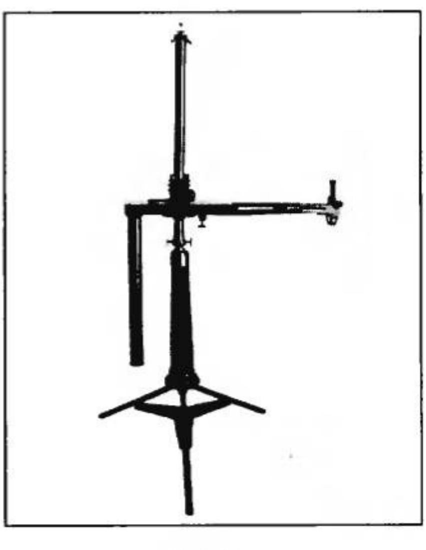
$$g(\psi) \approx g_{90^\circ} - 5{,}2\cos^2\psi\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = (983{,}2 - 5{,}2\cos^2\psi)\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \qquad (17.9)$$

függvény szerint változik. A (17.9)-ből adódik, hogy az egyenlítőn a nehézségi gyorsulás $g_{0^\circ} = 978{,}0\,\text{cm/s}^2$, a földrajzi sarkokon pedig $g_{90^\circ} = 983{,}2\,\text{cm/s}^2$. A nehézségi gyorsulás Magyarországon (kb. 46–49°-os szélességi körök között) jó közelítéssel 981 cm/s^2, és nagyjából megegyezik a (17.9) összefüggés alapján számítottal. A (17.8)-ban található 3,4 cm/s^2 helyett a (17.9)-ben levő 5,2 cm/s^2 a Föld lapult alakjának a következménye.

A nehézségi gyorsulás lokális értéke nagy pontossággal meghatározható speciális ingák segítségével. EÖTVÖS Loránd geofizikai vizsgálatok céljára rendkívül érzékeny torziós ingát



17.4. ábra



17.5. ábra

tervezett és készített (**17.5. ábra**). Az eszköz Eötvös-inga néven vált világhírűvé, amely az 1900-as párizsi világkiállításon díjat nyert.

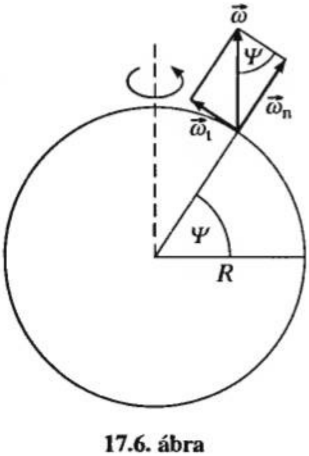
A készülék segítségével EÖTVÖS és munkatársai Magyarország számos helyén nagy pontossággal meghatározták a nehézségi gyorsulás helyfüggését.

5. A Coriolis-erő hatása a testek mozgására

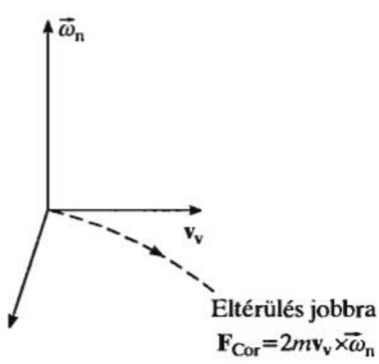
A Coriolis-erő hatásának megértését megkönnyíti, ha a Föld szögsebességvektorát az adott ponton álló földi megfigyelő számára természetes, függőleges és vízszintes összetevőre bontjuk. Ez a Föld adott ψ földrajzi szélességi körén azt jelenti, hogy az $\vec{\omega}$ szögsebességvektort a **17.6. ábra** szerint az $\vec{\omega}_n$ normális (sugárirányú) és az $\vec{\omega}_t$ érintőleges (tangenciális) összetevőre bontjuk. Az $\vec{\omega}_n$-vektor merőleges az adott ponton átmenő hosszúsági körre és átmegy a Föld középpontján, az $\vec{\omega}_t$-vektor a hosszúsági kör érintőjébe esik. A felbontás nem függ attól, hogy az adott hely melyik hosszúsági körre esik. A két összetevő nagysága az $\omega_n = \omega \sin\psi$ és $\omega_t = \omega\cos\psi$ összefüggésekkel adható meg. A következőkben néhány speciális esetben foglalkozunk a Coriolis-erő hatásával.

A $\mathbf{v}_v$ sebességgel vízszintesen mozgó testekre ható Coriolis-erő:

$$\mathbf{F}_{Cor} = 2m\mathbf{v}_v \times \vec{\omega}_n. \tag{17.10}$$



17.6. ábra



17.7. ábra

A **17.7. ábra** és a (17.10) formula alapján megállapítható, hogy a Coriolis-erőnek ez az összetevője a vízszintesen mozgó testeket az északi féltekén eredeti irányukhoz képest jobbra, a déli féltekén balra téríti el. A Coriolis-erőnek ez a komponense minden vízszintes mozgás esetén fellép, hatása azonban többnyire igen kicsiny. Ezzel az erővel magyarázható pl. a Jean FOUCAULT [fukó] (francia fizikus, 1819–1868) által végzett történelmi jelentőségű kísérlet. FOUCAULT 1851-ben a párizsi Panthéonban 67 m hosszú, 28 kg tömegű ingával mutatta be a Coriolis-erő hatását. A tapasztalat szerint az inga lengési síkja az inga mozgása során lassan elfordul. A Foucault-kísérlet a nagyközönség számára is nyilvánvaló bizonyítékot szolgáltatott a Föld forgására.

A Coriolis-erő jelentős szerepet játszik a meteorológiai jelenségek kialakulásában is. Az északi féltekén a ciklonok az óramutató járásával ellenkező, az anticiklonok azzal megegyező irányban forognak. A déli féltekén mindkét örvény forgási iránya éppen ellenkező. A forgásirányt a Coriolis-erő szabja meg.

A függőlegesen mozgó testeket a Föld szögsebességének tangenciális összetevőjéből adódó erő téríti el. A lefelé mozgó testek eltérülése mind az északi, mind a déli féltekén keleti irányú.

A vízszintesen mozgó testekre a tangenciális szögsebesség-komponens miatti Coriolis-erő csak a kelet–nyugati irányban mozgó testek esetén ébred. Az erő függőleges irányú. Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a Coriolis-erő a mozgó testek súlyát változtatja meg. Mindkét féltekén igaz, hogy a kelet felé haladó testek súlya csökken, a nyugat felé haladóké pedig nő. A kicsiny súlyváltozás egyszerű kimutatására EÖTVÖS Loránd készített kísérleti eszközt (Eötvös-mérleg), ezért a jelenséget *Eötvös-effektusnak* nevezzük.

I. B) A PONTRENDSZEREK MECHANIKÁJA

A Newton-törvényeket és a Newton-törvények alkalmazását segítő fogalmakat (impulzus, impulzusnyomaték, munka stb.) pontszerű testekre vonatkozóan állapítottuk meg. A testek azonban általában nem pontszerűek, azaz nem olyanok, hogy kiterjedésük elhanyagolható.

Ebben a fejezetben a pontszerű testekre kimondott törvényeket olyan testekre, ill. anyagi rendszerekre alkalmazzuk, amelyek diszkrét (elkülönült) pontokból állnak. A rendszer tagjai közötti kapcsolatokra vonatkozóan egyetlen lényeges, de a Newton-törvények ismeretében természetesnek tűnő megkötést teszünk. *A pontrendszer két eleme között ható erő mindig centrális*, vagyis az erő hatásvonala a két pontot összekötő egyenesbe esik.

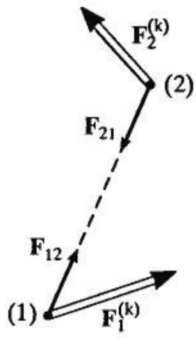
A pontrendszer tagjai között működő erőket *belső*, a rendszeren kívüli testektől származó erőket pedig *külső erőknek* nevezzük.

I. B) 1. A PONTRENDSZER MOZGÁSÁRA VONATKOZÓ ÁLTALÁNOS TÉTELEK

18. § Az impulzustétel és a tömegközéppont-tétel

1. A pontrendszer összimpulzusának változása

Foglalkozzunk először a **18.1. ábrán** látható, két pontszerű testből álló rendszer mozgásával. Az ábra jelöléseit használva írjuk fel a két test mozgásegyenletét úgy, hogy a rendszer két pontjának kölcsönhatását megadó $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ erőt (belső erők) mindkét test esetén válasszuk le a többi erő (a külső erők) $\mathbf{F}^{(k)}$ összegéről:



18.1. ábra

$$\mathbf{F}_1^{(k)} + \mathbf{F}_{12} = \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t}, \tag{18.1}$$

$$\mathbf{F}_2^{(k)} + \mathbf{F}_{21} = \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t}. \tag{18.2}$$

Összeadva a két egyenletet, az egyik oldalon a rendszerre ható erők vektori összege, a másikon pedig a rendszer összimpulzusának változása adódik. Az erőösszegből azonban a hatás–ellenhatás törvényének következtében a belső erők kiesnek. A dinamika alaptörvénye a pontrendszer minden tagjára felírható. Így azt kapjuk, hogy ***a rendszerre ható külső erők vektori összege megegyezik a rendszer összimpulzus-változásának és a közben eltelt időnek a hányadosával:***

$$\boxed{\mathbf{F}_c^{(k)} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}}. \tag{18.3}$$

A két pontból álló rendszerre bemutatott gondolatmenet könnyen általánosítható tetszőleges pontrendszerre. Ha a rendszer minden pontjára alkalmazzuk a dinamika alaptörvényét, akkor abban minden pont esetén a többi pont által kifejtett erők (belső erők) és egyéb erők (külső erők) szerepelnek. Az egyes pontokra felírt egyenleteket összeadva az egyik oldalon most is a pontrendszerre ható külső erők $\mathbf{F}_c^{(k)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(k)}$ vektori összege, a másikon pedig a rendszer $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$ összimpulzusának változása adódik. Így a (18.3) összefüggés tetszőleges számú pontból álló rendszer esetén is érvényes. ***Ez az impulzustétel pontrendszerre vonatkozó megfogalmazása.*** A törvényből azonnal következik, hogy ***amennyiben a pontrendszerre ható külső erők eredője zérus, akkor a rendszer összimpulzusa állandó.***

2. A tömegközéppont

Felmerül a kérdés, hogy a pontrendszer mozgása nem jellemezhető-e valamilyen módon egyetlen pont mozgásával. Ez azt jelentené, hogy a rendszer összimpulzusát egyetlen ponthoz kellene rendelni. Nyilvánvaló, hogy e pontban a rendszer $\sum_i m_i = M$ össztömegének kell egyesülnie.

Ezt figyelembe véve, az összimpulzus a

$$\mathbf{p} = M \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} \tag{18.4}$$

alakban is felírható. Azonnal látható, hogy a

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} \tag{18.5}$$

sebesség az

$$\boxed{\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}} \tag{18.6}$$

helykoordinátájú pont időderiváltja. Ennek segítségével az impulzustételt a

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} = M\mathbf{a}_0 \tag{18.7}$$

alakban is felírhatjuk, ahol

$$\mathbf{a}_0 = \ddot{\mathbf{r}}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i}. \tag{18.8}$$

A $\mathbf{p}_0 = M\mathbf{v}_0$ jelölés bevezetésével a (18.7) összefüggést a

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} = \frac{\Delta \mathbf{p}_0}{\Delta t} \tag{18.9}$$

alakban is felírhatjuk. Ezzel dinamikailag sikerült a tömegpontokból álló rendszert egyetlen pont mozgásával jellemezni. *Természetesen a* $\mathbf{p}_0$ *mennyiség egyenlő a rendszer összimpulzusával* ($\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$).

Az

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{18.10}$$

pontot, amelynek koordinátái

$$\boxed{x_0 = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \qquad y_0 = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \qquad z_0 = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}}, \tag{18.11–13}$$

a ***rendszer tömegközéppontjának*** nevezzük. A tömegközéppont a mechanika egyik legfontosabb fogalma. Ezért, amikor a tömegközéppontra való utalást hangsúlyozni kívánjuk, akkor az $\mathbf{r}_0$ jelölés helyett gyakran az $\mathbf{r}_{TKP}$ szimbólumot használjuk. A tömegközéppont matematikai konstrukció, definíciójából azonnal látszik, hogy még az sem szükséges, hogy fizikailag a pontrendszerhez tartozzék. (Két egyenlő tömegű tömegpontból álló rendszer tömegközéppontja pl. éppen a két pontot összekötő szakasz felezőpontja, ahol valójában semmiféle tömeg sincsen.) ***A tömegközéppont-tétel szerint bármely pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha benne volna egyesítve a rendszer össztömege, s rá a külső erők vektori összege hatna:***

$$\boxed{\mathbf{F}_e^{(k)} = M\mathbf{a}_{TKP} = M\ddot{\mathbf{r}}_{TKP}}. \tag{18.14,15}$$

A tétel egyenértékű az impulzustétel pontrendszerre megfogalmazott alakjával.

Természetesen sem az impulzus-, sem a tömegközéppont-tétel nem ad teljes leírást a pontrendszer tagjainak mozgásáról. Az egyszerű összefoglaló egyenletek csak az összimpulzus változásáról adnak számot, a rendszer belső változásairól, az egyes pontok mozgásáról azonban nem.

Ha a külső erők eredője zérus, akkor

$$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = 0, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{a}_{TKP} = 0 \tag{18.16,17}$$

alakot ölti. Ezekből pedig következik, hogy

$$\boxed{\mathbf{p} = \text{állandó}}, \qquad \text{ill.} \qquad \boxed{\mathbf{v}_{TKP} = \text{állandó}}, \tag{18.18,19}$$

vagyis a rendszer összimpulzusa, ill. a tömegközéppont sebessége állandó. Az utóbbi állítás úgy is fogalmazható, hogy amennyiben a külső erők eredője zérus, akkor a tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalomban marad.

Azt a rendszert, amelyre ható külső erők eredője zérus, zárt rendszernek nevezzük. Ennek felhasználásával ***a tömegközéppont megmaradásának tétele*** *a következőképpen fogalmazható:* ***zárt rendszer tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalomban van. Ezzel egyenértékű állítás, hogy a zárt rendszer összimpulzusa állandó.***

Fontos megjegyezni, hogy a megmaradási tétel matematikailag vektoregyenlettel írható le. Ez azt jelenti, hogy az egyes komponensekre külön-külön is teljesül a megmaradás feltétele.

19. § A perdülettétel

1. A perdülettétel

Az impulzustételhez hasonlóan a perdülettétel is felírható a pontrendszer minden tagjára. Ha az egyes pontokra felírt egyenleteket összeadjuk, akkor az impulzustételhez hasonlóan megkapjuk az impulzusmomentum-tétel pontrendszerre vonatkozó alakját. A forgatónyomatékok összegéből a belső erők forgatónyomatékának összege kiesik, így a ***perdület- vagy impulzusmomentum-tétel*** a következő formában fogalmazható meg:

A pontrendszerre ható külső erők forgatónyomatékának vektori összege megegyezik a pontrendszer összimpulzusmomentum-változásának és az eltelt időnek a hányadosával:

$$\boxed{\sum_i \mathbf{M}_i^{(k)} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}}. \tag{19.1}$$

A tételt példaként bizonyítsuk ismét két pontból álló rendszerre! Alkalmazzuk a rendszer minden pontjára az impulzustételt és szorozzunk meg vektoriálisan minden egyenletet balról annak a tömegpontnak a helyvektorával, amelyre az egyenlet vonatkozik. Így az

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{(k)} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} = \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1, \tag{19.2}$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{(k)} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2 \tag{19.3}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Adjuk össze ezeket az egyenleteket és vegyük figyelembe, hogy

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i), \qquad (i = 1,2). \tag{19.4}$$

Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{(k)} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{(k)} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2). \tag{19.5}$$

A (19.5) egyenlet bal oldalán álló első két tag a rendszerre ható külső erők forgatónyomatéka, a második kettő pedig a belső erőké. A belső erők forgatónyomatékában erő és ellenerő forgatónyomatéka szerepel, ezért az

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} \tag{19.6}$$

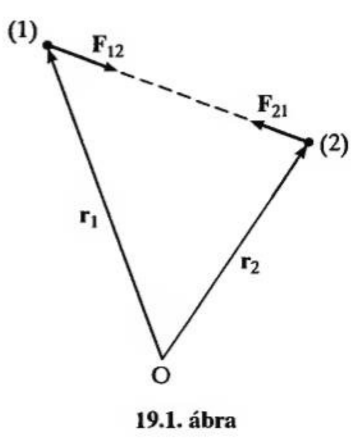
alakra hozható. Ez az összeg zérus, hiszen $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \parallel \mathbf{F}_{12}$, és emiatt vektoriális szorzatuk zérus (**19.1. ábra**).

A impulzusmomentum-tételből közvetlenül adódik, hogy ha a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékának összege zérus, akkor a rendszer impulzusmomentuma állandó:

$$\boxed{\mathbf{L} = \text{állandó}}. \tag{19.7}$$

A (19.1) egyenlet vektoriális összefüggés, tehát három skaláregyenlettel helyettesíthető, azaz

$$M_x^{(k)} = \frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}, \qquad M_y^{(k)} = \frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}, \qquad M_z^{(k)} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}. \tag{19.8–10}$$



19.1. ábra

A komponensekre vonatkozó összefüggések egymástól függetlenül érvényesek. Ez azt jelenti, hogy az impulzusmomentumnak egy-egy komponensére a többitől függetlenül is érvényes a megmaradási tétel, ha a megfelelő forgatónyomaték-komponens eltűnik.

2. Az impulzusmomentum kifejezése a tömegközéppont segítségével

A tömegközéppont fogalmának segítségével a pontrendszer mozgását globálisan (átfogóan) sikerült egyetlen pont mozgásával jellemezni. Bár a Newton-törvények inerciarendszerben érvényesek, gyakran mégis célszerű a tömegközépponthoz rögzített koordináta-rendszer alkalmazása is. Ezért érdemes meghatározni a tömegközépponti koordináta-rendszerben és az inerciarendszerben felírt impulzusmomentum közötti kapcsolatot.

Az eredmény igen egyszerű, hiszen a teljes impulzusnyomaték két tagra esik szét:

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_s} . \tag{19.11}$$

Az

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{r}_0 \times M\mathbf{v}_0 \tag{19.12}$$

pálya-impulzusmomentum a rendszer globális mozgásából (a tömegközéppontban egyesített egyetlen pontként mozgó test impulzusmomentuma) származó perdület, az

$$\mathbf{L}_s = \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i \vec{\varepsilon}_i \tag{19.13}$$

saját-impulzusmomentum pedig a tömegközépponthoz képest bekövetkező mozgásból származó járulék, ahol $\vec{\rho}_i$, $\vec{\varepsilon}_i$ a tömegközépponti rendszerben megadott helyvektor, illetve sebesség.

Vegyük észre, hogy az impulzusmomentum-tétel mind a pálya-, mind a saját-impulzusmomentumra vonatkozóan érvényes. Fennáll tehát, hogy

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_p}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}_0 \times \sum \mathbf{F}^{(k)}} , \tag{19.14}$$

vagyis a tömegközéppont pálya-impulzusmomentumának időderiváltja megegyezik a rendszerre ható külső erők eredőjének forgatónyomatékával.

Továbbá

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_s}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\rho}_i \times \mathbf{F}_i^{(k)}} , \tag{19.15}$$

vagyis a saját-impulzusmomentum időderiváltja megegyezik a külső erők tömegközéppontra vett forgatónyomatékával.

Talán még inkább kiemeli a tétel tartalmát az a tény, hogy az impulzusmomentum-tétel a tömegközépponti koordináta-rendszerben a tehetetlenségi erők figyelembevétele nélkül még akkor is érvényes, ha gyorsuló rendszerről van szó.

20. § A munkatétel

Az impulzus- és az impulzusmomentum-tételhez hasonlóan érdemes megvizsgálni a pontrendszerre vonatkozó ***munkatételt*** is. A gondolatmenet eredménye az, hogy a ***rendszerre ható erők munkáinak algebrai összege megegyezik a rendszer mozgási energiájának megváltozásával:***

$$\boxed{W^{(k)} + W^{(b)} = \Delta E_k}. \tag{20.1}$$

A mozgási energia megváltozásának meghatározásakor tehát a belső erők munkáját is figyelembe kell venni

A munkatétel egyszerű következménye az anyagi pontra vonatkozó munkatételnek. Nagyon fontos, hogy a rendszerre ható erők munkájának kiszámításakor általában minden erő esetén más és más elmozdulással kell számolni, ezért a munkák összege nem vezethető vissza az eredő erő munkájára. Ez az oka annak is, hogy a belső erők munkája általában nem zérus.

Az impulzusmomentumhoz hasonlóan célszerű a mozgási energia tetszőleges inerciarendszerben és a tömegközépponti rendszerben felírt alakja közötti kapcsolatot meghatározni. Megmutatható, hogy az impulzusmomentumhoz hasonlóan a mozgási energia is két részre esik szét:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\varepsilon}_i^{\,2}}. \tag{20.2}$$

A jobb oldal első tagja a tömegközéppontban egyesített, anyagi pontként mozgó rendszer energiája, a második tag pedig a tömegközépponthoz képest vett relatív mozgásokból adódó mozgási energia.

A (20.2) összefüggés bizonyítása a következő. Helyettesítsük be a rendszer

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\varepsilon}_i^{\,2} \tag{20.3}$$

mozgási energiájába az inerciarendszerbeli $\mathbf{v}_i$ és a tömegközépponti rendszerben megadott $\vec{\varepsilon}_i$ sebességek kapcsolatát kifejező

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \vec{\varepsilon}_i \tag{20.4}$$

összefüggést, és végezzük el a négyzetre emelést:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i (m_i \mathbf{v}_0^2 + 2 m_i \mathbf{v}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_i + m_i \vec{\varepsilon}_i^{\,2}). \tag{20.5}$$

Az összegezést tagonként végezve és a konstans szorzókat kiemelve azt kapjuk, hogy

$$E_k = \frac{1}{2}v_0^2\sum_i m_i + v_0\sum_i m_i\vec{\varepsilon}_i + \sum_i \frac{1}{2}m_i\vec{\varepsilon}_i^{\,2}. \tag{20.6}$$

Figyelembe véve, hogy tömegközépponti rendszerben $\sum_i m_i\vec{\varepsilon}_i = 0$ és hogy a rendszer össztömege $M = \sum_i m_i$, a pontrendszer mozgási energiája:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\vec{\varepsilon}_i^{\,2}. \tag{20.7}$$

I. B) 2. SPECIÁLIS PONTRENDSZEREK MOZGÁSA

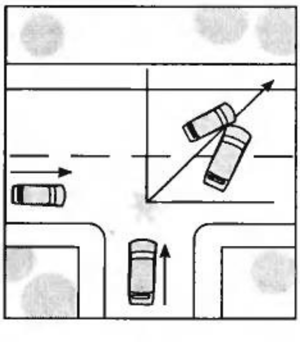
21. § Ütközések

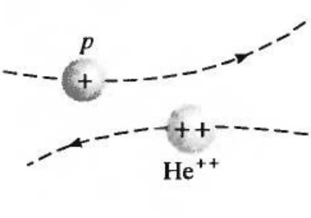
1. Az ütközések osztályozása

Ütközésről általában akkor beszélünk, ha két test között rövid ideig tartó olyan erős kölcsönhatás lép fel, hogy az egyéb erőhatások elhanyagolhatóak (**21.1. ábra**). Ebben a fejezetben nemcsak pontszerű testek ütközésével foglalkozunk, ezért be kell vezetnünk néhány fogalmat az ütközések típusainak meghatározására. Általában feltételezzük, hogy ütközéskor a testek egyetlen pontban érintkeznek, s e pontban a két testhez közös érintősík húzható. A közös érintősíkra az érintkezési pontban állított merőlegest *ütközési normálisnak* nevezzük (**21.2. ábra**), jele: **n**.

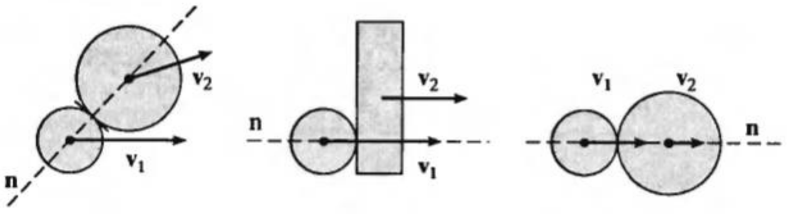
Centrálisnak nevezzük az ütközést, ha az ütközési normális átmegy mindkét test tömegközéppontján.

Egyenes ütközésről akkor beszélünk, ha az ütköző testek mindegyikének sebessége az ütközési normálisba esik.





21.1. ábra



21.2. ábra

Centrális, egyenes ütközés során az ütköző testek ütközés előtti és utáni sebességvektorai a két test tömegközéppontját összekötő egyenes irányába mutatnak. (Ilyen ütközések zajlanak le például a légpárnás sínen mozgó, rugós ütközővel ellátott kiskocsik között.)

2. Az ütközés leírása megmaradási tételekkel

Jelöljük az ütközésben részt vevő két test tömegét rendre m_1-gyel és m_2-vel, ütközés előtti sebességét $\mathbf{v}_1$-gyel és $\mathbf{v}_2$-vel, az ütközés utánit pedig $\mathbf{u}_1$-gyel és $\mathbf{u}_2$-vel. Az ütközés nagyon rövid τ ideig tart, az ütközés során fellépő belső erők igen nagyok, mellettük a külső erők elhanyagolhatóak. Az ütközési folyamatra tehát minden esetben felírhatjuk az impulzusmegmaradás törvényét, amely szerint a két test ütközés előtti összimpulzusa megegyezik az ütközés utáni összimpulzussal:

$$\boxed{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2}\,. \tag{21.1}$$

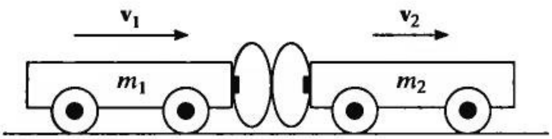
Az ütközéseket a mechanikai energia megmaradása szempontjából is osztályozhatjuk. *Tökéletesen rugalmasnak* nevezzük az ütközést, ha az ütközés előtti és utáni mozgási energiák megegyeznek. Pontszerűnek tekinthető testekre ez az

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{u}_2^2} \tag{21.2}$$

összefüggés fennállását jelenti. A valóságban, az ütközés során a belső erők által végzett munka a rendszer kezdeti mozgási energiáját csökkenti. Az ilyen ütközéseket *rugalmatlan ütközésnek* nevezzük. Ha az ütközés során a két test összekapcsolódik, összeragad, és ütközés után közös lesz a sebességük, akkor az ütközést *tökéletesen rugalmatlannak* nevezzük.

3. Tökéletesen rugalmas, centrális, egyenes ütközések

Rugós ütközővel ellátott, súrlódásmentes sínen mozgó kocsik ütközése jó közelítéssel tökéletesen rugalmasnak és centrálisnak tekinthető (**21.3. ábra**). Mivel az ütköző testek sebességvektora egy egyenesbe esik, ezért a megmaradási tételeket a következő egyszerűbb alakban írhatjuk fel:



21.3. ábra

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 , \tag{21.3}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 . \tag{21.4}$$

Rendezzük át a (21.3,4) összefüggéseket a következőképpen:

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2), \tag{21.5}$$

$$m_1 (v_1 - u_1) \cdot (v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \cdot (u_2 + v_2). \tag{21.6}$$

A (21.6) egyenletet a (21.5)-tel elosztva azt kapjuk, hogy

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2 . \tag{21.7}$$

A (21.5,7) kétismeretlenes, lineáris egyenletrendszerből az ütközés utáni sebességekre az

$$u_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2 , \tag{21.8}$$

$$u_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2 + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 \tag{21.9}$$

összefüggéseket nyerjük.

4. Tökéletesen rugalmatlan ütközések

Tökéletesen rugalmatlan ütközéskor a két test ütközés után közös sebességgel (**u**) mozog tovább. Ez a sebesség a (21.1) impulzusmegmaradást kifejező egyenletből

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}} . \tag{21.10}$$

Tökéletesen rugalmatlan ütközést kísérletileg pl. olyan kiskocsikkal hozhatunk létre, amelyekre egymást vonzó mágneseket rögzítünk. A mágnesek az érintkezés után a kocsikat egymáshoz tapasztják. Gépjárművek ütközése gyakran úgy megy végbe, hogy az egyik jármű tolja magával a másikat. Ilyen esetekben is jó feltételezés az, hogy az ütközés tökéletesen rugalmatlan.

Az ütközés során fellépő ΔE energiaveszteség:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{u}^2. \tag{21.11}$$

Felhasználva a (21.10) összefüggést, rövid számolással igazolható, hogy

$$\boxed{\Delta E = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}\ . \tag{21.12}$$

A fenti formulából látható az is, hogy az energiaveszteség adott sebességek és tömegek mellett akkor a legnagyobb, ha a két sebességvektor egymással szembe mutat (frontális ütközés). A mozgási energiaveszteség legtöbbször hő-, illetve deformációs energiaként jelenik meg.

5. Ütközések rugalmasságának jellemzése, ütközési szám

Sínen mozgó kiskocsira szereljünk rugós ütközőt, és ütköztessük a kiskocsit merev, nagy tömegű fallal! Legyen a kocsi tömege m_1, kezdeti sebessége v_1, az ütközés utáni pedig u_1. Amint az ütköző a falhoz ér, elkezd összenyomódni, a kocsira egyre nagyobb erő hat. Ez a folyamat addig tart, amíg a kocsi sebessége egy pillanatra zérus lesz. Ezután a deformáció visszaalakul. Tartson a deformáció első szakasza τ^* ideig, a visszaalakulási pedig $\tau - \tau^* > 0$-ig. A két szakaszra írjuk fel az impulzustételt:

$$\int_0^{\tau^*} F(t)\mathrm{d}t = m_1 v_1, \qquad \int_{\tau^*}^{\tau} F(t)\mathrm{d}t = m_1 u_1. \tag{21.13,14}$$

Mivel az ütközés utáni sebességre mindig fennáll, hogy $0 \le u_1 \le v_1$, így a deformáció két szakaszában fellépő erőlökésekre teljesül, hogy

$$0 \le \varepsilon = \left| \frac{\int_{\tau^*}^{\tau} F(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{\tau^*} F(t)\mathrm{d}t} \right| \le 1. \tag{21.15}$$

A két erőlökés hányadosaként értelmezett ε ütközési szám alkalmas az ütközés rugalmasságának jellemzésére. Ha a kiskocsi ütközés utáni sebessége megegyezik az ütközés előttivel (tökéletesen rugalmas ütközés), akkor $\varepsilon = 1$. Tökéletesen rugalmatlan ütközésnél $\varepsilon = 0$, a deformációnak nincsen visszaalakulási szakasza.

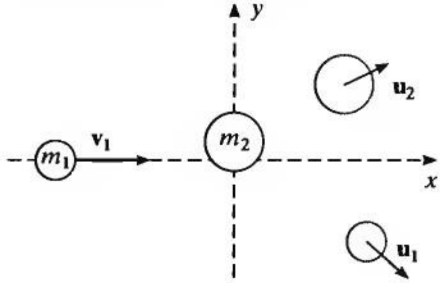
Az ütközések rugalmasságának jellemzésére bevezetett ε szám igen sok tényező függvénye lehet. Amellett, hogy függ az ütköző testek anyagi minőségétől, erősen függhet az ütközés körülményeitől, a sebességtől és a hőmérséklettől is. Ezen okok miatt anyagállandóként nem is szokás használni. Esetenként azonban ismerete hasznos lehet. Az ütközési szám egyszerűen meghatározható például egy sima lapon pattogó golyó visszapattanási magasságaiból. A mérés alapjául ekkor a (21.15) összefüggés szolgál. A pattogó golyó esetén $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, $v_2 = \sqrt{2gh_2}$, ahol h_1 a golyó esési, h_2 pedig a visszapattanási magassága. Ennek alapján

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \tag{21.16}$$

Elefántcsont golyó, illetve bizonyos gumifajták esetén az ütközési szám értéke 0,9 feletti érték is lehet.

6. Ferde ütközések

A következőkben olyan tökéletesen rugalmas ütközéssel foglalkozunk, ahol az egyik test nyugalomban van. Legyen a mozgó, m_1 tömegű test kezdeti sebessége $\mathbf{v}_1$, a nyugvó test tömege m_2. Koordináta-rendszerünk x tengelye mutasson $\mathbf{v}_1$ irányába. Az y tengely legyen az ütközés utáni $\mathbf{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y})$ és $\mathbf{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y})$ sebességvektorok síkjában (**21.4. ábra**).



21.4. ábra

Az impulzusmegmaradás miatt a sebességkomponensekre fennáll az alábbi két egyenlet:

$$m_1 v_1 = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \qquad 0 = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}. \tag{21.17,18}$$

Az energiamegmaradás további feltételt jelent a négy ismeretlen sebességkomponensre:

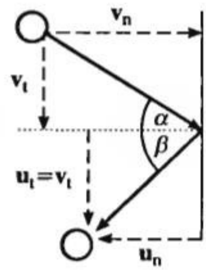
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (u_{1x}^2 + u_{1y}^2) + \frac{1}{2} m_2 (u_{2x}^2 + u_{2y}^2). \tag{21.19}$$

A fenti három, független egyenletben négy ismeretlen szerepel. Ez azt jelenti, hogy az ütközési folyamat leírása ebben az esetben nem lehetséges pusztán a megmaradási törvények alapján. Az ütközés utáni sebességek meghatározásához az ütközési folyamat erőtörvényét is ismerni kellene.

Példaként vizsgáljuk meg a ***pontszerű test ütközését rugalmas fallal.***

Ütközzön a $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó, pontszerű, m tömegű test rugalmas fallal és legyen az ütközés során fellépő erőknek a fal síkjába eső komponense elhanyagolható (**21.5. ábra**). Ekkor a sebességvektornak a fal síkjába eső összetevője nem változik meg az ütközés folyamán. A síkra merőleges sebesség-összetevő iránya pedig ellentétesre változik. Ha az ütközés az ε ütközési számmal jellemezhető, akkor

$$u_n = -\varepsilon v_n, \qquad u_t = v_t. \tag{21.20,21}$$



21.5. ábra

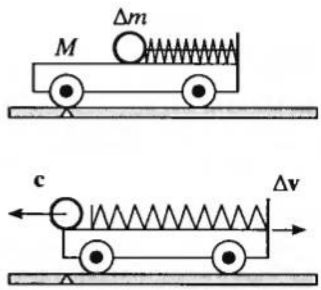
Látható tehát, hogy az ütköző részecske α beesési és β visszaverődési szögére fennáll, hogy

$$\operatorname{tg}\beta = \left|\frac{u_t}{u_n}\right| = \left|\frac{v_t}{\varepsilon v_n}\right| = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{azaz} \quad \beta > \alpha. \tag{21.22}$$

A fal által kifejtett erőlökés nagysága $mv_n(1+\varepsilon)$. Tökéletesen rugalmas ütközésnél a beesési és a visszaverődési szögek megegyeznek, a fal által kifejtett erőlökés nagysága $2mv_n$.

22. § Rakétamozgás

Kiskocsira rögzített kör alakú lemezrugót vagy csavarrugót összenyomunk, majd fonállal rögzítjük (**22.1. ábra**). A rugó elé helyezett golyó a fonál elégetése után lerepül a kocsiról, a kocsi pedig vele ellentétes irányban elindul.



22.1. ábra

Hasonló jelenség figyelhető meg, amikor a felfújt léggömböt nyitott véggel elengedjük, és a nyíláson kiáramló gáz hatására a ballon „rakétaként" elindul. A szénsavpatronos és vízsugárhajtású rakétamodellek szintén a kilövellt gáz, illetve folyadék hatására indulnak el az áramlással ellentétes irányba.

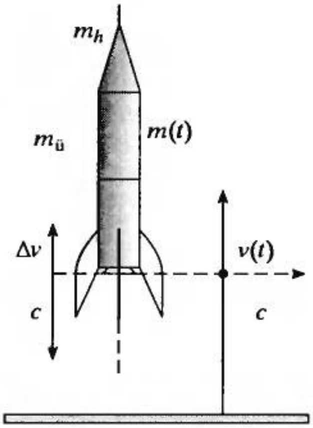
A rakéta működési elvét a fenti kísérletek jól illusztrálják. Az M tömegű kiskocsira helyezett Δm tömegű testet a kocsihoz képest $\mathbf{c}$ sebességgel kilőve, a kiskocsi $\Delta\mathbf{v}$ sebességre tesz szert. A kiskocsiból, a rugóból és a kilőtt testből álló pontrendszerre érvényes az impulzusmegmaradás tétele, vagyis a kezdeti és a szétlökődés utáni impulzusoknak egyezniük kell:

$$0 = M\Delta\mathbf{v} + \Delta m\mathbf{c}. \tag{22.1}$$

Innen a kiskocsi sebességnövekedésére

$$\boxed{\Delta\mathbf{v} = -\frac{\Delta m}{M}\mathbf{c}} \tag{22.2}$$

adódik.



22.2. ábra

A rakéták úgy működnek, hogy az üzemanyag elégetésekor keletkező nagynyomású gáz a fúvókákon nagy sebességgel kiáramolva impulzust visz el a rendszerből, és a rakétatest – az impulzusmegmaradás törvényének megfelelően – ellentétes irányba lökődik. A rakéták általában folyékony tüzelőanyag és oxidálószer elégetésével állítják elő a nagy sebességű gázáramot.

A (22.2) összefüggés alapján meghatározhatjuk a rakéta sebességét az idő függvényében. Határozzuk meg a $v(t)$ sebességgel mozgó, $m(t)$ tömegű rakéta sebességének Δt idő alatt bekövetkező növekedését a vele együtt mozgó inerciarendszerhez képest (**22.2. ábra**). Legyen az üzemanyag sebessége a rakétatesthez képest c. Mivel számértékileg az egységnyi idő alatt kilövellt üzemanyag a rakéta tömegével az

$$\dot{m} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) \tag{22.3}$$

alakban fejezhető ki, a rakétatest sebességének növekedése az impulzusmegmaradás törvénye szerint

$$\Delta v = -\frac{\Delta m}{m(t)}c = -\frac{\dot{m}(t)\Delta t}{m(t)}c\,. \tag{22.4}$$

Mivel

$$\frac{\mathrm{d}[\ln m(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \tag{22.5}$$

a kezdetben m_0 tömegű rakéta sebességének növekedése:

$$v(t) - v(0) = -c\ln\frac{m(t)}{m_0} = c\ln\frac{m_0}{m(t)}\,. \tag{22.6}$$

Ebből adódik, hogy a kezdősebesség nélkül induló rakéta által elérhető maximális sebesség:

$$\boxed{v_{\max} = c\ln\left(\frac{m_h + m_ü}{m_h}\right) = c\ln\kappa}\,, \tag{22.7}$$

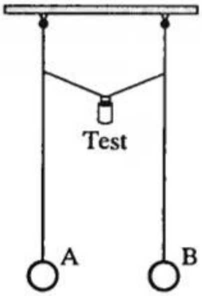
ahol m_h a hasznos, $m_ü$ az üzemanyag tömegét jelöli, $\kappa = (m_h + m_ü)/m_h$ a rakétára jellemző ún. tömegarány. A rakéták sebességének a (22.7) összefüggés szerint határt szab az üzemanyag tömegének és a hasznos tömegnek az aránya. Ez az arány bizonyos határon túl csak úgy javítható, ha a rakétáról leválasztják az üres és feleslegessé vált üzemanyagtartályokat. Ezeket a rakétákat, ahol az eredetileg fellőtt rakéta további önálló rakétákat hordoz, *többfokozatú rakétának* nevezzük.

Megjegyzés: $v_{\max}$ kiszámításakor nem vettük figyelembe a nehézségi erő hatását.

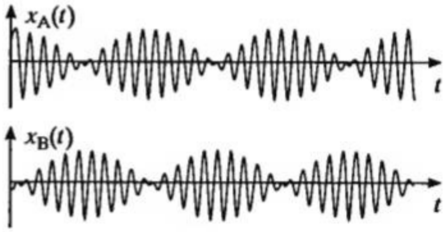
23. § Csatolt rezgések

Csatolt rezgés legtöbbször testek olyan kölcsönhatása során lép fel, amikor a rendszer tagjait saját egyensúlyi helyzetükhöz és egymáshoz is harmonikus erő köti. Ilyen rezgéseket legegyszerűbben két csatolt fonálinga segítségével tanulmányozhatunk.

Kapcsoljunk össze két egyenlő hosszúságú fonálingát kis nehezékkel ellátott fonállal (**23.1. ábra**)!



23.1. ábra



23.2. ábra

Hozzuk az egyik ingát (A) lengésbe úgy, hogy a másik inga (B) kezdetben legyen nyugalomban. Megfigyelhetjük, hogy az idő múlásával a B inga is lassan lengésbe jön, miközben az A inga rezgési amplitúdója fokozatosan csökken, majd egy pillanatra megáll. Ezután az ingák szerepe megfordul. Az A inga amplitúdója kezd növekedni, a B ingáé csökkenni. Mindez periodikusan ismétlődik. Az energia a két inga között periodikusan kicserélődik. A két inga közötti csatolás erősségét a köztes fonálon levő test tömegének változtatásával tudjuk változtatni. Nagyobb tömegű testnél (erős csatoláskor) a kicserélődési idő kisebb, kis tömegűnél (laza csatolás) nagyobb. A **23.2. ábra** sematikusan mutatja a két inga kitérésének időfüggését.

Két testből álló csatolt rendszerek mozgása során tehát a következőket tapasztaljuk:

- mindkét test rezgőmozgást végez;
- amikor az egyik test mozgási és potenciális energiájának összege (összenergiája) nagy, a másik testé kicsi;
- az energia periodikusan cserélődik a két test között.

I. C) A MEREV TEST MECHANIKÁJA

A korábbiakban pontrendszerekre fogalmaztuk meg a fontosabb dinamikai tételeket. E tételek természetesen érvényesek kiterjedt testekre is, hiszen minden kiterjedt test olyan kicsiny részekre bontható, amelyek már pontszerűnek tekinthetők.

A kiterjedt testek között vannak olyanok, amelyek mechanikai kölcsönhatások során nagyon kis deformációt szenvednek. Ezt a kis deformációt első közelítésben elhanyagolva úgy tárgyalhatjuk a mozgást, hogy közben a test alakváltozásától eltekintünk. Az ilyen, határesetre történő extrapolációból alakult ki a merev test fogalma.

I. C) 1. ÁLTALÁNOS LEÍRÁS

24. § A merev test kinematikája

1. A merev test fogalma, szabadsági fokok száma

Merevnek nevezzük azt a testet, amelyre fennáll, hogy bármely két pontjának távolsága állandó.

A merev test helyzetét három, nem egy egyenesbe eső pontjának koordinátáival jellemezhetjük. A merev test egy A pontjának rögzítése után a test többi pontjai a rögzített *pont* körüli gömbfelületen mozoghatnak. Ha a testnek egy másik B pontját is rögzítjük, akkor a test az A és B ponton átmenő tengely körül még elfordulhat. A tengelynek az egyenesen kívül fekvő, egyébként tetszőleges harmadik, C pontjának rögzítésével már az egész test helyzete meghatározott.

A három pont helyének megadásához kilenc adat (koordináta) szükséges. A merev kötés miatt azonban ezek között három összefüggést írhatunk fel; például azt, hogy a három pont közül bármely kettőnek a távolsága állandó.

Mivel a kilenc adat közül három nem független, a merev test helyzete általában 6 független adattal jellemezhető. Más szóval: a szabad merev testnek $f = 6$ szabadsági foka van. Speciális mozgások esetén (pl. síkmozgás, tengely körüli forgómozgás stb.) a merev test mozgásának jellemzésére hatnál kevesebb koordináta is elegendő. (A szabadsági fok elnevezés a termodinamikában más tartalmat is nyer, 48. §.)

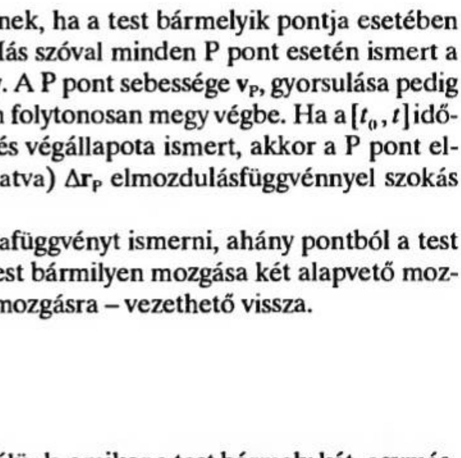
2. Merev test mozgásának leírása

A merev test mozgását akkor tekintjük ismertnek, ha a test bármelyik pontja esetében tudjuk, hogy hol található adott időpillanatban. Más szóval minden P pont esetén ismert a pont helyzetét időben megadó $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P(t)$ függvény. A P pont sebessége $\mathbf{v}_P$, gyorsulása pedig $\mathbf{a}_P$. A test pontjainak mozgása az idő függvényében folytonosan megy végbe. Ha a $[t_0, t]$ időintervallumban a test mozgásának csak a kezdő- és végállapota ismert, akkor a P pont elmozdulását (az adott időintervallumra vonatkoztatva) $\Delta\mathbf{r}_P$ elmozdulásfüggvénnyel szokás jellemezni.

A merev test esetén nem szükséges annyi pályafüggvényt ismerni, ahány pontból a test áll. A következőkben látni fogjuk, hogy a merev test bármilyen mozgása két alapvető mozgásra – haladó (transzlációs) és forgó- (rotációs) mozgásra – vezethető vissza.

3. Merev test haladó mozgása (transzláció)

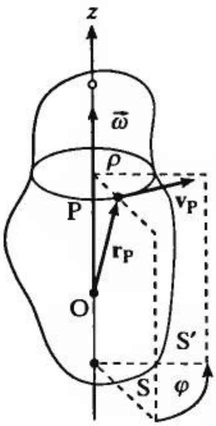
Merev test transzlációs mozgásáról akkor beszélünk, amikor a test bármely két, egymással nem párhuzamos szakasza a mozgás során külön-külön önmagával párhuzamos marad. Ebben az esetben a merev test pontjainak pályái egymással egybevágó görbék (**24.1. ábra**). A transzláció értelmezéséből következik, hogy a merev test minden pontjának adott idő alatt bekövetkező elmozdulása egyenlő. Abból, hogy egyenlő idők alatt a merev test minden pontjának elmozdulása egyenlő, következik, hogy a test pontjainak sebessége és gyorsulása is azonos.



24.1. ábra

4. Merev test forgómozgása (rotáció)

A merev test forgómozgást végez, ha van legalább két pontja, amely a mozgás során helyben marad. A két pontot összekötő egyenes a forgástengely, amely körül a merev test tengelyen kívül fekvő pontjai körpályán mozognak. A merev test tengely körüli forgását kinematikai-



24.2. ábra

lag a szögsebességgel jellemezzük (**24.2. ábra**). Válasszunk a forgástengelyen egy tetszőleges O pontot, és jelöljük a tőle a test P futópontjához húzott helyvektort $\mathbf{r}_P$-vel. A test forgása közben a forgástengely pontjai helyben maradnak, a P pont pedig a tengelyre merőleges síkban ρ sugarú körön mozog. A test többi pontjai ezzel a síkkal párhuzamos síkban mozognak. Az elfordulás φ szöge a merev test bármelyik pontjára ugyanakkora. (A tengelyre illeszkedő bármelyik S félsík a φ szöggel elforgatott S' félsíkba kerül át.)

Az elfordulási szög az idő $\varphi(t)$ függvényeként adható meg. Vegyük fel a z tengelyt a forgástengely egyenesében. A φ szög előjelét megállapodás szerint akkor választjuk pozitívnak, ha az elfordulás iránya a z tengellyel jobbcsavart alkot. A korábban bevezetett definíció alapján a forgómozgás szögsebessége $|\bar{\omega}| = \Delta\varphi/\Delta t$, ahol $\bar{\omega}$ a forgástengelyben fekvő vektor, iránya a forgásiránnyal jobbcsavart alkot. Az $\bar{\omega}$ szögsebességvektorral a P pont pillanatnyi sebessége a

$$\mathbf{v}_P = \bar{\omega} \times \mathbf{r}_P \tag{24.1}$$

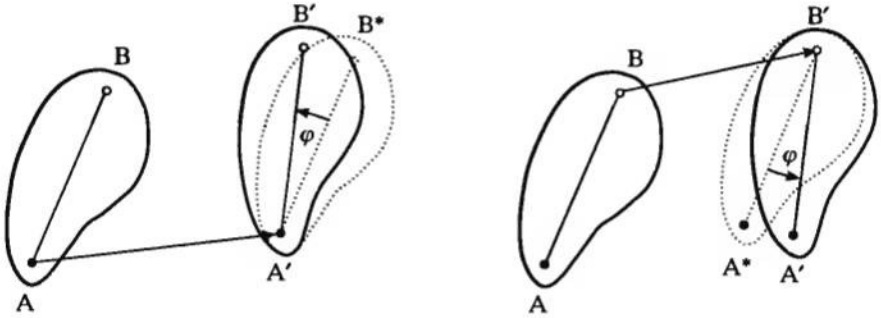
alakban adható meg (17. § 3.).

A szögsebesség változásának sebességét megadó szöggyorsulás nagysága $\beta = \Delta\omega/\Delta t$. A szöggyorsulás vektora, ha a forgástengely iránya nem változik, ugyancsak a forgástengely egyenesébe esik. Amennyiben azonban a tengely iránya pillanatonként változik (vagyis amikor a szögsebesség irányának változása miatt is felléphet szöggyorsulás), akkor a β-vektor nem párhuzamos az $\bar{\omega}$-vektorral.

5. A merev test síkmozgása

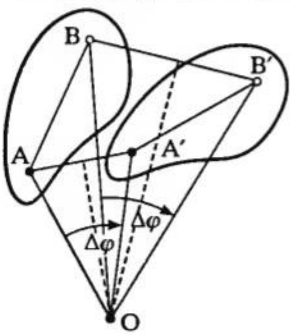
A merev test mozgásának fontos speciális esete a síkmozgás. Gépek alkatrészeinek, egymással csuklósan kapcsolódó darabjainak mozgása gyakran ilyen mozgás. Síkmozgásról akkor beszélünk, ha a merev test pontjai a térben rögzített síkkal párhuzamos síkokban mozognak. Nyilvánvaló, hogy a merev test mint egész ebben az esetben úgy mozog, mint a rögzített síkkal párhuzamos valamely síkmetszete. A síkmetszet mozgása viszont teljes értékűen helyettesíthető a síkmetszet tetszőleges két pontjának, illetve az ezeket összekötő szakasznak a mozgásával.

A síkmozgás kapcsán igazoljuk, hogy tetszőleges síkbeli mozgás megvalósítható egyetlen transzlációval és azt követő rotációval. A **24.3. ábra** a merev test adott helyzetváltozásának kétféle megvalósítását mutatja. Az ábra bal oldali része azt a változatot mutatja, amikor először olyan transzlációt hajtunk végre, amely az A pontot A′-be viszi, majd az A′ pont körüli $\varphi(A')$ szögű forgatással a B* pont B′-be kerül. A jobb oldali ábra szerint először a B pontot B′-be vivő transzláció történik, majd a $\varphi(B')$ szögű rotációval A* A′-be kerül. A két esetben a transzláció különböző, a rotáció szöge azonban függetlenül az előző transzlációtól, mindkét esetben ugyanakkora. A forgatás tengelye is mindkét esetben merőleges a síkra.

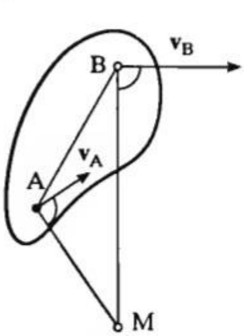


24.3. ábra

Síkmozgás esetén mindig található a merev testen vagy a merev testtel együtt mozgó síkon olyan O = O′ pont, amely a mozgás kezdő- és véghelyzetében is ugyanott marad. Belátható, hogy a testnek az adott mozgása ekkor megvalósítható az O körüli egyetlen forgatással. A forgástengely a következőképpen határozható meg. Tegyük fel, hogy a merev test mozgása során az $\overline{AB}$ szakasz a kezdeti helyzetéből az $\overline{A'B'}$ helyzetbe kerül. Húzzuk meg az $\overline{AA'}$ és $\overline{BB'}$ szakaszok felező merőlegesét és keressük meg O metszéspontjukat. (Ha a két egyenes párhuzamos, akkor a síkmozgás egyetlen transzlációval adható meg.) A **24.4. ábra** mutatja, hogy az AOB Δ egybevágó az A′OB′ Δ-gel, mert a két háromszög megfelelő oldalai egyenlők. Ezért az AOA′∢ = BOB′∢, ami bizonyítja, hogy ha a testet úgy forgatjuk el O körül, hogy A az A′-be kerüljön, akkor B a B′-be kerül.



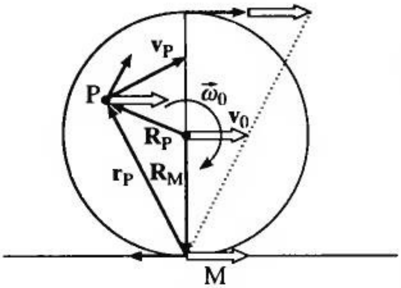
24.4. ábra



24.5. ábra

6. A pillanatnyi forgástengely síkmozgás esetén

A síkmozgást végző test rövid Δt ideig tartó mozgása során az AOA′∢ = BOB′∢ = $\Delta\varphi$ szögelfordulás kicsiny. Az A és a B pont elmozdulásvektora az O forgáspontból a pontokhoz húzott szakaszokkal $(90° - \Delta\varphi/2)$ szöget zár be. $\Delta\varphi \to 0$ esetén az O pontok sorozata olyan M ponthoz tart, amely az adott pillanatban jellemzi a mozgást. Az M pontot pillanatnyi forgáspontnak (momentán centrumnak) nevezzük. A pillanatnyi forgáspontból nézve a merev test minden pontja körmozgást végez és az adott pillanatban a test bármely pontjának sebességvektora merőleges az M-ből a ponthoz húzott sugárra (**24.5. ábra**). A merev test síkmozgása során a pillanatnyi forgáspont helye a síkon változik.



24.6. ábra

A merev testek síkmozgása gyakran ***gördülés***. Gördüléskor a mozgó test határgörbéje mindig valamilyen előírt görbére esik. Ennek a mozgásnak fontos, speciális esete a *tiszta gördülés*. Tiszta gördülésről akkor beszélünk, amikor a „lefedett" pályaszakasz hossza egyenlő a test kerületének azon ívdarabjával, amely érintkezésbe került a pályaszakasszal. Ekkor a test kerületi pontjának és a pályának az érintkezési pontja azonos sebességgel mozog. Foglalkozzunk a síkon gördülő R sugarú korong mozgásával (**24.6. ábra**)! A korong sebessége a transzlációs és a forgási sebesség összegeként állítható elő:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \mathbf{R}_P. \tag{24.2}$$

Mivel tiszta gördüléskor a korong talajjal érintkező pontjának nincs a talajhoz képest sebessége: $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \mathbf{R}_M = 0$, ahonnan $\mathbf{v}_0 = -\vec{\omega}_0 \times \mathbf{R}_M$ adódik.

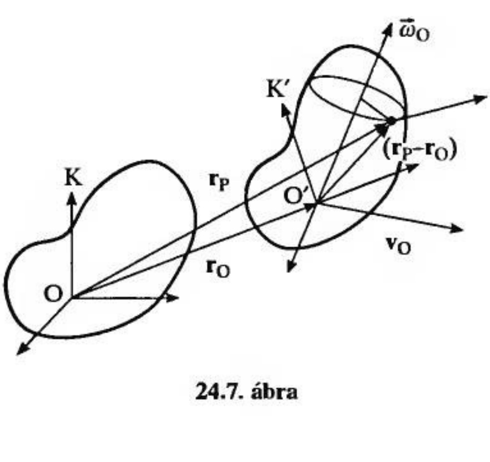
Az, hogy a korong talajjal érintkező pontjának a sebessége zérus, egyben azt jelenti, hogy minden időpillanatban ez a pont a pillanatnyi forgáspont.

A tiszta gördülés esetén $\mathbf{v}_P = \vec{\omega}_0 \times (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_M) = \vec{\omega}_0 \times \mathbf{r}_P$, ahonnan látható, hogy a P pont M körüli $\vec{\omega}_0$ szögsebességű körmozgást végez.

A korong mozgása csúszva gördülés, ha $v_0 > R\omega_0$, ekkor a pillanatnyi forgáspont a körön kívül, a körközéppont alatt található. Amennyiben $v_0 < R\omega_0$, a pillanatnyi forgáspont a körön belül van.

7. Merev test általános mozgása

Az előzőekben síkmozgás esetén igazoltuk, hogy a merev test tetszőleges mozgása megvalósítható egyetlen transzlációval és az azt követő rotációval. A transzláció nagysága függ a vonatkoztatási pont választásától, a forgatás szöge azonban nem.



24.7. ábra

Térbeli mozgásokra hasonló tétel áll fenn. Válasszunk ki a merev testen egy O pontot, és rögzítsünk hozzá K koordináta-rendszert. Jelöljük O′-vel azt a pontot, amibe a test elmozdulása során az O pont kerül. A K koordináta-rendszer pedig menjen át K′-be. A merev testet kezdeti helyzetéből új helyzetébe átvihetjük az OO′ eltolással és az azt követő, egyetlen tengely körüli elforgatással, amelynek során a K rendszer átkerül a K′ rendszerbe (Euler–D'Alembert-tétel). A transzláció nagysága függ az O′ pont választásától. A forgatás szöge és tengelyiránya azonban nem (**24.7. ábra**).

A merev test véges elmozdulása felfogható rövid Δt ideig tartó elemi mozgások egymásutánjaként. Tetszőleges P pont sebességét úgy kaphatjuk meg, hogy az O′ pont $\mathbf{v}_O$ pillanatnyi sebességéhez hozzáadjuk az O′-n átmenő, pillanatnyi forgástengely körüli $\vec{\omega}_O$ szögsebességű forgásból származó kerületi sebességet:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \vec{\omega}_O \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O). \tag{24.3}$$

Ez az összefüggés a merev test bármely pontjára érvényes.

25. § A merev test egyensúlya

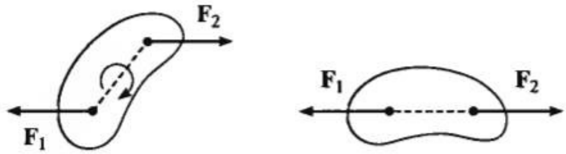
Merev test mozgásának kinetikai leírása két nagy egységre bontható, a *sztatikára* és a *dinamikára*. Az előbbi a merev test egyensúlyának feltételeit vizsgálja, amikor a merev testre külső erők hatnak; az utóbbi pedig a külső erők hatásának eredményét írja le, amikor az egyensúlyi feltételek nem teljesülnek.

A sztatika a fizika egyik legrégibb ága, a gyakorlati mérnöki tudomány számára is alapvető fontosságú. A következőkben először az egyensúllyal kapcsolatos kérdéseket vizsgáljuk.

1. Merev test egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele

Foglalkozzunk először olyan merev testtel, amelyre csak két erő, $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ hat (**25.1. ábra**). Vizsgáljuk meg mi a feltétele, hogy a két erő hatására a test egyensúlyban legyen. A két erő a test tömegközéppontját akkor nem gyorsítja, ha

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0. \tag{25.1}$$



25.1. ábra

A fenti feltétel teljesülése mellett a merev test foroghat tömegközéppontja körül, ha a két erő hatásvonala nem esik egybe. A példa mutatja, hogy az egyensúly feltétele tömegpontra és merev testre vonatkozóan nem ugyanaz.

Hasson a merev testre N számú $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N$ külső erő, rendre az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ támadáspontban. Írjuk fel a testre a pontrendszerre vonatkozó tömegközéppont- és impulzusmomentum-tételt tömegközépponti koordináta-rendszerben:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i\right)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i, \qquad \frac{\mathrm{d}\left(\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i\right)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{M}_i. \tag{25.2,3}$$

Legyen a merev test egyensúlyban, ekkor bármelyik pontjának $\mathbf{v}_i$ sebessége zérus, így az egyensúly szükséges feltétele a

$$\boxed{\sum_i \mathbf{F}_i = 0}, \qquad \boxed{\sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0} \tag{25.4,5}$$

egyenletek teljesülése. A (25.4,5) összefüggések teljesülése egyben elégséges feltétele is az egyensúlynak. A tömegközéppont-tétel miatt a $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ egyenletből következik, hogy a rendszer tömegközéppontja nyugalomban van, azaz a test legfeljebb a tömegközépponton átmenő, pillanatnyi forgástengely körül foroghat. Ha még a $\sum_i \mathbf{M}_i = 0$ feltétel is teljesül, akkor sem a tengely iránya, sem a forgás szögsebessége nem változhat.

2. Merev testre ható kényszererők

25.2. ábra

A sztatikai problémákban gyakran találkozunk olyan esetekkel, amikor a merev testre a szabaderőkön kívül kényszererők is hatnak. A kényszerekből származó erők erőtörvénye hiányos, gyakran csak az erők irányára vonatkozóan tehetünk kijelentéseket. A **25.2. ábra** néhány jellegzetes kényszert mutat:

a) a *fonál* mindig fonálirányú erőt fejt ki;

b) a *sima fal* a fal felületére merőleges irányú erőt fejt ki;

c) a *gömbcsukló* által kifejtett kényszererő hatásvonala metszi a csuklót, iránya a merev testre ható többi erőtől függ úgy, hogy az egyensúly feltételei teljesüljenek.

3. Erőrendszer helyettesítése (redukciója)

Felvetődik a kérdés, hogy adott erőrendszer helyettesíthető-e egyetlen erővel. Helyettesítésen azt értjük, hogy az erők

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{25.6}$$

eredőjét olyan $\mathbf{r}_0$ helyvektorú pontba helyezzük, hogy forgatónyomatéka megegyezzék az erőrendszernek a nyomatékával, azaz

$$\mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \tag{25.7}$$

legyen. Mivel az erőt eltolhatjuk hatásvonala mentén anélkül, hogy forgatónyomatéka megváltozna, a (25.7) nyomatéki egyenlet nem egyetlen $\mathbf{r}_0$ pontra, hanem a rajta átmenő $\mathbf{F}$ irányú egyenes minden pontjára igaz.

Az erőpár egyszerű példája mutatja, hogy van olyan erőrendszer, amely a fenti értelemben nem helyettesíthető egyetlen erővel.

a) Erőpár

Vegyünk olyan, két erőből álló erőpárt, amelyben az erők vektori összege zérus, de a két erő hatásvonala nem esik egy egyenesbe (**25.3. ábra**). Az erőpárnak adott O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} = \mathbf{d} \times \mathbf{F} \neq 0 \tag{25.8}$$

és független az O pont választásától. Mivel a két erő vektori összege zérus, az összegvektor nyomatéka is mindig zérus. Az erőpár tehát nem helyettesíthető egyetlen erővel.

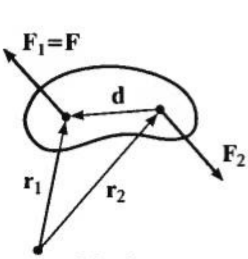
b) Erőrendszer helyettesítése egyetlen erővel és erőpárral

Az előzőekben láttuk, hogy nem minden erőrendszer (pl. erőpár) helyettesíthető egyetlen eredő erővel. Igazolható viszont, hogy bármely erőrendszer helyettesíthető egyetlen erővel és egy erőpárral.

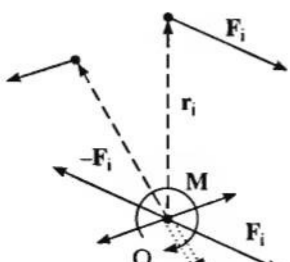
Vegyük a vizsgált erőrendszert és válasszunk a térben egy $\mathbf{r}_0$ helyvektorú O pontot. Adjuk hozzá az erőrendszer minden tagjához az az O vonatkoztatási pontban támadó $\mathbf{F}_i$ és $-\mathbf{F}_i$ erőket (**25.4. ábra**). Ezáltal nem változik sem az eredő erő, sem az O pontra vonatkozó forgatónyomaték. Az $\mathbf{r}_i$ helyvektorú $\mathbf{F}_i$ és az O-ban támadó $-\mathbf{F}_i$ erőkből álló erőpárnak csak forgatónyomatéka van. A megmaradó erők hatása egyetlen, O-ban támadó $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i$ erővel helyettesíthető.

c) Párhuzamos erőrendszer eredője

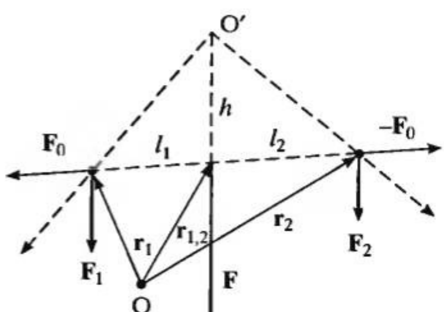
Foglalkozzunk először két erőből álló, síkbeli erőrendszerrel. A **25.5. ábrán** látható módon adjunk az erőrendszerhez nulla erőt és nulla nyomatékot szolgáltató $\mathbf{F}_0, -\mathbf{F}_0$ erőpárt. Az így előálló erőrendszerben az erők hatásvonala már metszi egymást (kivéve, ha $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$). A helyettesítő erő paralelogramma-módszerrel megszerkeszthető. Az eljárás során az eredő erő hatásvonalának egy pontját kapjuk meg. A **25.5. ábra** alapján meghatározzuk a hatásvonal és a két támadási pontot összekötő szakasz $\mathbf{r}_{1,2}$ metszéspontját. Az ábrán látható háromszögek hasonlósága miatt



25.3. ábra



25.4. ábra



25.5. ábra

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{l_1}{h}, \qquad \frac{F_0}{F_2} = \frac{l_2}{h} \tag{25.9,10}$$

és ebből adódik, hogy

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 . \tag{25.11}$$

Mivel

$$\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_1 + \frac{l_1}{l_1 + l_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{l_2 \mathbf{r}_1 + l_1 \mathbf{r}_2}{l_1 + l_2}, \tag{25.12}$$

a (25.11) felhasználásával a hatásvonalnak és az $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ vektornak a metszéspontjára az

$$\mathbf{r}_{1,2} = \frac{F_1 \mathbf{r}_1 + F_2 \mathbf{r}_2}{F_1 + F_2} \tag{25.13}$$

összefüggést nyerjük. Eszerint az eredő erő hatásvonala a két támadáspontot összekötő szakaszt olyan $\mathbf{r}_{1,2}$ pontban metszi, amelynek helyvektora az összetevők támadáspontjába húzott helyvektoroknak az erők abszolút értékével „súlyozott" számtani közepe. Ezt a pontot az $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ támadáspontú, párhuzamos $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ erők centrumának nevezzük.

Az eljárás tetszőleges számú, az $\mathbf{e}$ egységvektorral párhuzamos erőre általánosítható. Az $(\mathbf{r}_1, F_1\mathbf{e})$, $(\mathbf{r}_2, F_2\mathbf{e})$, ..., $(\mathbf{r}_N, F_N\mathbf{e})$ erőrendszer eredője a következőképpen határozható meg. Válasszuk ki az $(\mathbf{r}_1, F_1\mathbf{e})$ és az $(\mathbf{r}_2, F_2\mathbf{e})$ erőt. Megmutattuk, hogy e két erő eredőjének hatásvonala átmegy az $\mathbf{r}_{1,2}$ helyvektorú ponton, azaz a két erő erőcentrumán. Több párhuzamos erő esetén az előző eljárást úgy folytathatjuk, hogy a két párhuzamos erőt a kettejük erőcentrumában ható $\mathbf{F}_{1,2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ eredő erővel helyettesítjük, és az előbbi gondolatmenettel meghatározzuk az $\mathbf{F}_{1,2}$ és $\mathbf{F}_3$ erők centrumát. A három erő erőcentruma az $\mathbf{r}_{1,2}$ és $\mathbf{r}_3$ közti szakaszon az

$$\mathbf{r}_{1,2,3} = \frac{F_{1,2} \mathbf{r}_{1,2} + F_3 \mathbf{r}_3}{F_{1,2} + F_3} \tag{25.14}$$

helyen található. A (25.13) összefüggés és az $F_{1,2} = F_1 + F_2$ felhasználásával

$$\mathbf{r}_{1,2,3} = \frac{F_1 \mathbf{r}_1 + F_2 \mathbf{r}_2 + F_3 \mathbf{r}_3}{F_1 + F_2 + F_3} \tag{25.15}$$

alakban adható meg. Az eljárást ismételve, az N párhuzamos erő centrumára az

$$\boxed{\mathbf{r}_{1,2,3,\ldots,N} = \mathbf{r}_0 = \frac{F_1\mathbf{r}_1 + F_2\mathbf{r}_2 + \ldots + F_N\mathbf{r}_N}{F_1 + F_2 + \ldots + F_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} F_i}} \tag{25.16}$$

eredményt kapjuk. Az ebben a pontban támadó

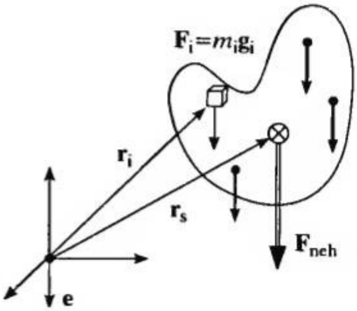
$$\mathbf{F} = \left(\sum_{i=1}^{N} F_i\right)\mathbf{e} \tag{25.17}$$

erő a párhuzamos erőrendszer eredője. Az $\mathbf{r}_0$ helyvektorral definiált erőcentrum tehát az a pont, amelyben a rögzített támadáspontú párhuzamos erők eredője támad. Az eredő erő iránya megegyezik az összetevő erők irányával, abszolút értéke pedig az összetevők abszolút értékének összegével egyenlő.

Az erőcentrum helye nem változik meg, ha a párhuzamos erőrendszer minden összetevőjét ugyanakkora szöggel elforgatjuk eredeti irányától, mert a merev test pontjait jellemző helyvektorok és az erők abszolút értékei változatlanok maradnak. Az erőcentrum a párhuzamos erők eredőjének a merev testhez rögzíthető támadáspontja.

4. A nehézségi erő centruma; a súlypont

Az előző pontban tárgyalt párhuzamos erőrendszer fontos speciális esete a testek minden pontjára ható nehézségi erőrendszer. A Föld adott pontján a nehézségi erő iránya határozza meg a függőlegest. (A függőón fonala ezt az irányt mutatja.) Gondolatban osszuk fel a merev testet kicsiny m_i tömegű részekre (**25.6. ábra**). Ezek mindegyikére $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{g}_i$ nehézségi erő hat. Nem túlságosan nagy méretű test esetén a nehézségi erők párhuzamosaknak tekinthetők ($\mathbf{g}_i = g_i\mathbf{e}$). Ily módon a párhuzamos erőrendszer centruma a (25.16) definíció alapján:

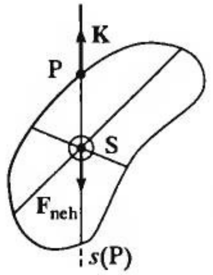


25.6. ábra

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_i F_i\mathbf{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i m_i g_i\mathbf{r}_i}{\sum_i m_i g_i}. \tag{25.18}$$

Mivel adott helyen a nehézségi gyorsulás értéke – kis tartományon belül – minden tömegrészre ugyanakkora ($g_i = g$), a nehézségi erők centrumát jellemző helyvektor a test tömegközéppontjának helyvektorával egyezik meg:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_S = \frac{\sum_i m_i g_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i g_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \mathbf{r}_{TKP}, \qquad \mathbf{F}_{neh} = \left(\sum_i m_i\right)\mathbf{g}. \tag{25.19,20}$$



25.7. ábra

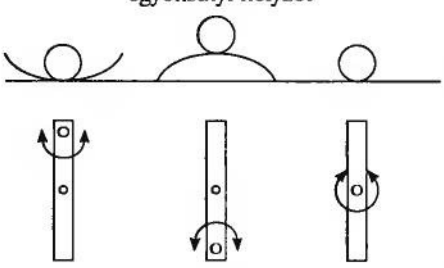
A nehézségi erők centrumát ***súlypontnak*** nevezzük. Fenti megszorítások mellett a súlypont és a tömegközéppont egybeesik.

Ha a merev testet meghatározott P pontjában felfüggesztjük vagy alátámasztjuk, akkor a test olyan helyzetet vesz fel, hogy a P pontban ébredő **K** kényszererő és a testre ható nehézségi erők eredője egyensúlyt tart (**25.7. ábra**). Mind a kényszererő, mind a nehézségi erő hatásvonala átmegy a P ponton. Ezért a test S súlypontja rajta van a P ponton átmenő s(P) függőleges egyenesen. Az s(P) egyenest a merev test *súlyvonalának* nevezzük. A különböző pontokon átmenő súlyvonalak mindig a súlypontban metszik egymást.

A tömegközéppont és a súlypont helye homogén gravitációs térben megegyezik. Fogalmilag azonban természetesen különböznek egymástól. A súlypont a földi nehézségi erőtérhez kötött fogalom, a tömegközéppont viszont mindig létezik.

5. Merev test egyensúlyának stabilitása; állásszilárdság

Merev test egyensúlya esetén a testre ható erők és forgatónyomatékok vektori összege zérus. A gyakorlati életben fellépő sztatikai problémákban az egyensúlyi helyzet ismerete mellett alapvető fontosságú az egyensúlyi helyzet stabilitásának vizsgálata is. Az egyensúly stabilitása úgy vizsgálható, hogy a testet kissé kimozdítjuk egyensúlyából és magára hagyjuk. Ha a test a kitérítés után visszatér eredeti helyzetébe, akkor az egyensúly stabilis (biztos). Ha a test a kimozdítás után eltávolodik az egyensúlyi helyzetétől, és nem tér vissza oda, az egyensúlyi helyzet labilis (bizonytalan). Abban az esetben, amikor a test az új helyzetében is egyensúlyban marad, indifferens (közömbös) egyensúlyról van szó. Erre a háromféle egyensúlyi helyzetre mutat példát a **25.8. ábra**.

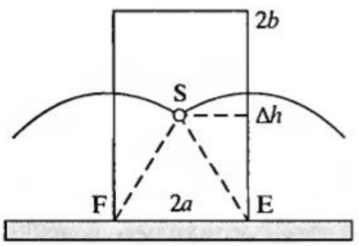


25.8. ábra

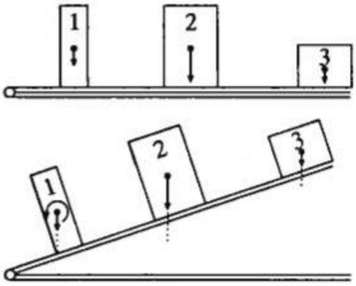
a) Egyensúly vizsgálata a potenciális energiafüggvény segítségével

Az előző ábrán bemutatott példák arra az egyszerű esetre vonatkoznak, amikor a testre szabaderőként egyedül a nehézségi erő hat. A nehézségi erő centruma a súlypont. Látható, hogy stabilis egyensúlyban a súlypont a szomszédos helyekhez képest a legmélyebben helyezkedik el, labilis egyensúlyban minden szomszédos helyzethez viszonyítva magasabban; indifferens helyzetekben pedig azonos szinten marad. A súlypont egyensúlyi helyzethez tartozó szintje tehát egységesen jellemzi a három egyensúlyi helyzetet függetlenül attól, hogy a kényszer (felfüggesztés, alátámasztás) a súlypont alatt vagy fölött van-e.

A nehézségi erőtérben a testeknek potenciális energiájuk van. A potenciális energia úgy számítható, mintha a test össztömege a súlypontban volna egyesítve, és az összes helyzeti energiát a súlyponthoz rendelnénk. Ezt figyelembe véve, a test helyzeti energiája kisebb, ha a súlypontja mélyebben helyezkedik el. Így tehát az előbb mondottak szerint, stabilis egyensúlyban a test helyzeti energiája az összes szomszédos helyzetekéhez viszonyítva a legkisebb. Ezt az eredményt általánosabban is megfogalmazhatjuk: *mechanikai rendszer akkor van stabilis egyensúlyban, ha a rendszer potenciális energiájának ebben a helyzetben minimuma van (Dirichlet-tétel).* A **25.9. ábrán** látható hasábot az E és F oldalél körül kimozdítva a súlypont köríven mozog. A stabilis, függőleges egyensúlyi helyzetben a potenciális energiának minimuma van.



25.9. ábra



25.10. ábra

b) Állásszilárdság

Az egyensúly stabilitásával kapcsolatos fogalom az *állásszilárdság.* A **25.10. ábrán** látható három hasáb mindegyike kezdetben stabilis egyensúlyi helyzetben van. A lejtő emelésekor először a keskenyebb (1) alapú dől el, majd a két fennmaradó, azonos alapélű közül a nagyobb (2) magasságú követi. Más szóhasználattal azt mondjuk, hogy a 2-es test állásszilárdsága nagyobb az 1-es test állásszilárdságánál. A legnagyobb a 3-as test állásszilárdsága.

Az egyensúlyi helyzetekben a súlypontban koncentrált nehézségi erő hatásvonala metszi az alátámasztási felületet. Amikor a nehézségi erő hatásvonala eléri az alátámasztási felület határát, majd kilép belőle, a hasáb felbillen. Ilyen meggondolások miatt tervezik a járműveket széles keréktávolsággal és úgy, hogy súlypontjuk is alacsonyan legyen. Hasonlóképpen, emiatt készülnek a bútorok, állványok, épületek széles alapzattal, ezért töltik ki a toronydaruk alsó vázát nehezékkel.

A stabilitás mennyiségi jellemzésére az átbillentő erő mellett (helyett) más paramétert is bevezethetünk. Geometriai mértékként megadhatjuk például azt a szöget, amellyel a testet az alátámasztási felület határoló éle mentén el kell fordítani, hogy labilis egyensúlyi helyzetbe kerüljön (**25.9. ábra**).

A stabilitás energetikai mértéke az a munka, amely egyenlő a stabilis és a legközelebbi labilis egyensúlyhoz tartozó potenciális energia különbségével. A **25.9. ábra** jelöléseivel például

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = mg\Delta h = mg(\sqrt{a^2 + b^2} - b). \tag{25.21}$$

Adott test esetén m állandó, ezért a stabilitás mértékének a $\Delta V = g\Delta h$ potenciálkülönbséget is tekinthetjük. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy az egyensúly annál stabilabb, minél „mélyebb" a stabilis egyensúlyhoz tartozó „potenciálgödör".

6. Egyszerű gépek

Környezetünkben számos olyan eszköz található, amely az „erő megsokszorozására" szolgál. Ilyen eszközök például a különböző típusú fogók, ollók, nyitók, emelők stb. Ezek az eszközök különböző variációban, összetett mechanikai szerkezetekben is szinte mindig fellelhetők. Az összetett erősokszorozó szerkezetek többnyire néhány alapvető, úgynevezett egyszerű gépből állíthatók össze. Az egyszerű gépek két típusba sorolhatók, beszélünk emelő és lejtő típusú gépekről. Az egyszerű gépek többnyire arra szolgálnak, hogy az általunk kifejtett **F** erővel kiegyensúlyozzunk, illetve elmozdítsunk egy nagyobb **G** súlyú testet. Az egyszerű gépekkel végezhető W_{h} hasznos munka ideális esetben megegyezik azzal a $W_{\mathrm{ö}}$ összes munkával, amit az **F** erő végez az elmozdulás során. Ha a súrlódási veszteségektől eltekintünk, az egyszerű gépek

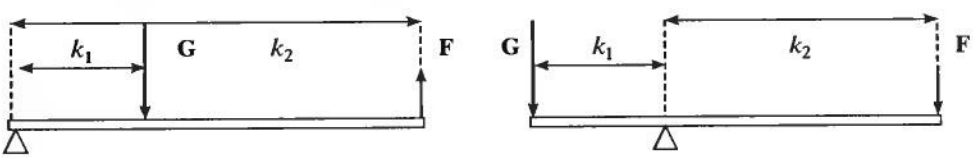
$$\eta = \frac{W_{\mathrm{h}}}{W_{\mathrm{ö}}} \tag{25.22}$$

hatásfoka 100%. A valóságban azonban a hatásfok mindig kisebb 100%-nál.

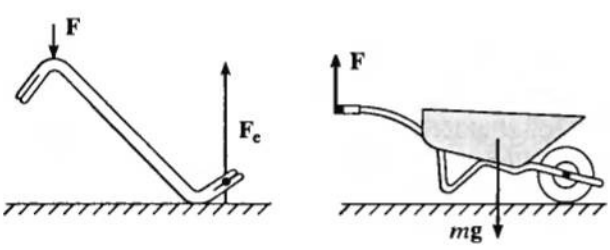
A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a különböző egyszerű gépek esetén milyen kapcsolat áll fönn az **F** és a **G** erők között.

a) Emelő típusú egyszerű gépek (emelők, csigák)

Az emelő tengely körül forgatható merev test. A forgáspont és a két erő támadásvonalának helyzete szerint megkülönböztetünk *egy- és kétkarú emelőt* (**25.11. ábra**). A kiegyensúlyozott **G** súlyt tehernek, az **F**-et emelő erőnek nevezzük. Az egyensúly $Fk_2 = Gk_1$ feltételéből az emelő erőre $F = Gk_1/k_2$ adódik.



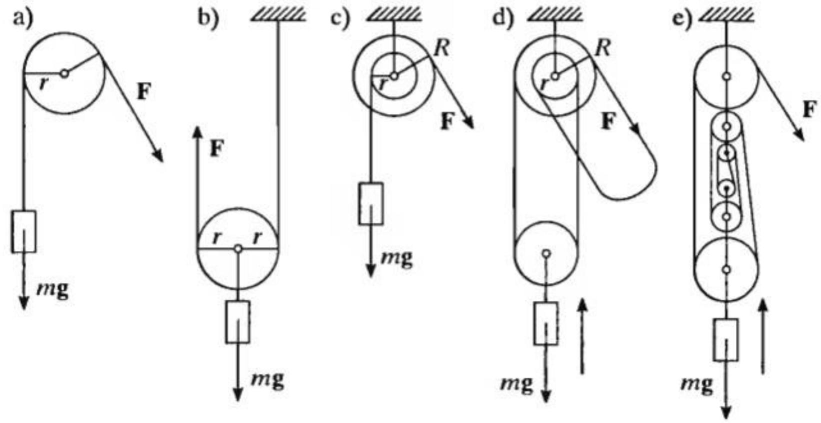
25.11. ábra



25.12. ábra

Emelővassal felnőtt ember igen nagy súlyú testet is képes megemelni. Az emelők speciális változatai a különböző mérlegek, feszítővasak, fogók, talicska stb. Az emberi kar is modellezhető egykarú emelőként **(25.12. ábra)**.

A **25.13/a. ábra** *állócsigát,* a **25.13/b. ábra** *mozgócsigát,* a **25.13/c. ábra** *hengerkereket,* a **25.13/d. ábra** *differenciális csigát* és a **25.13/e. ábra** *csigasort* ábrázol. Az egyensúlyi nyomatéki egyenletek az első négy esetben a következők:



25.13. ábra

a) $mgr - Fr = 0,$ azaz $F = mg,$ (25.23)

b) $mgr - F2r = 0,$ azaz $F = mg/2,$ (25.24)

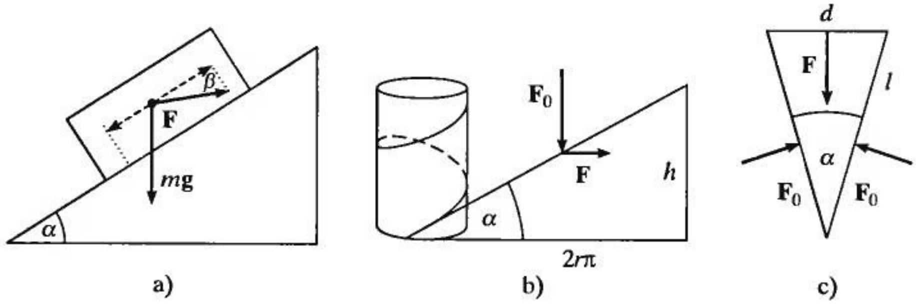
c) $mgr - FR = 0,$ azaz $F = mg\dfrac{r}{R},$ (25.25)

d) $FR + \dfrac{mg}{2}r = \dfrac{mg}{2}R,$ azaz $F = mg\left(\dfrac{R-r}{2R}\right).$ (25.26)

A **25.13/e. ábrán** látható csigasor esetén az egyensúly feltétele: $F = mg/6$, mivel a teher hat fonálon oszlik meg.

b) Lejtő típusú egyszerű gépek (lejtő, csavar, ék)

A *lejtőre* (**25.14/a. ábra**) helyezett testet a lejtő síkjával β szöget bezáró olyan **F** erővel tudjuk egyensúlyban tartani, amelynél az erő lejtő menti vetülete a testre ható nehézségi erő lejtő menti vetületével egyenlő és azzal ellentétes irányú: $F \cos\beta = mg \sin\alpha$. Ha az erő lejtőirányú, akkor $\beta = 0$ miatt $F = mg \sin\alpha$, ha pedig az alappal párhuzamos, akkor $\beta = \alpha$ miatt $F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.



25.14. ábra

A *csavart* (**25.14/b. ábra**) olyan lejtőnek foghatjuk fel, amelynek a magassága a h menetmagasság, alapjának hossza a csavarorsó kerülete ($2r\pi$). Az F_0 teher az alapra merőleges, ezt az alappal párhuzamos erővel egyensúlyozzuk: $F = F_0\ \mathrm{tg}\,\alpha = F_0 h/(2r\pi)$.

Az *ékre* (**25.14/c. ábra**) ható F_0 teher és az F egyensúlyozó erő közötti kapcsolatot erőparalelogrammából állapíthatjuk meg:

$$F = 2F_0 \sin\frac{\alpha}{2} = F_0\left(\frac{d}{l}\right), \tag{25.27}$$

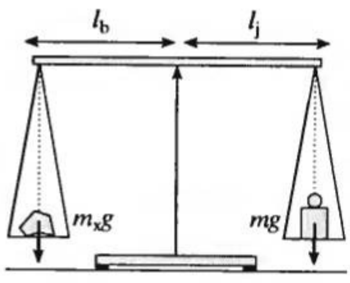
ahol α az ék lapjai által bezárt szög, l a lapok hossza, d az ék szélessége.

7. Mérlegek, mérlegelési eljárások

Az egyenlő karú mérleget ma is sok helyen használják, bár az elektronikus mérlegek elterjedésével ez a klasszikus mérlegtípus nagymértékben visszaszorult. Laboratóriumokban ma is találkozhatunk az egyenlő karú mérleg precíziós változatával, az analitikai vagy kémiai mérleggel. A mérleg legfontosabb része a szilárd mérlegrúd, amelynek közepén található a pontosan megmunkált, kemény anyagból készült ék. A mérlegrúd végén serpenyők, középen mutató található. Az ék és ezen keresztül a mérlegrúd az alátámasztási felületről felemelhető („arretálás"). Méréskor az ék visszakerül a nagy keménységű anyagból (acél, achát) készült vízszintes felületre. A mérlegrúd egyik végén levő tányérba kerül az ismeretlen m_x tömegű, mérendő test. A másik serpenyőbe helyezett m tömegű testtel kiegyensúlyozzuk a mérleget (**25.15. ábra**). Egyensúlyban, amikor a mérlegrúd vízszintes és a mutató a skála nulla jelénél áll, a rúdra mint merev testre teljesül a forgatónyomatékok egyenlőségét kifejező

$$m_x g l_b = m g l_j \qquad (25.28)$$

egyenlet. Ha a bal és a jobb oldali mérlegkarok hossza megegyezik, akkor az m kiegyensúlyozó tömeg megegyezik a mérendő test tömegével.



25.15. ábra

A mérlegkarok hosszának csekély eltéréséből származó mérési hiba különböző mérési eljárásokkal korrigálható.

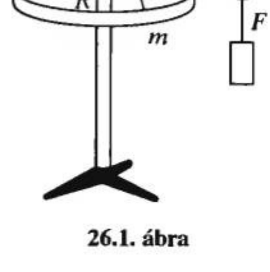
A tizedes mérleggel, levélmérleggel még ma is gyakran találkozhatunk vásárláskor, hivatalokban.

Ma már azonban az elektronikus mérlegek szinte minden területen tért nyertek. Az elektronikus mérlegekben valamilyen rugalmas szerkezetnek a terhelés hatására bekövetkező kicsiny elmozdulását mérik, és ebből határozzák meg a teher nagyságát. Az elmozdulás mérése elektronikus érzékelőkkel történik. Ily módon 0,1 μg érzékenységű mérlegek is készíthetők. A mérlegelés egy másik, dinamikai módszere, amikor a rugalmas felületre helyezett testtel a mérlegen kialakuló rezgési frekvenciát mérjük. Az ilyen mérlegek pl. a világűrben, a súlytalanság állapotában is használhatók.

I. C) 2. A MEREV TEST SPECIÁLIS MOZGÁSA

26. § A merev test forgása rögzített tengely körül

A következőkben először a merev test rögzített tengely körüli forgásával foglalkozunk. A merev testet úgy tekintjük, mint speciális pontrendszert.



26.1. ábra

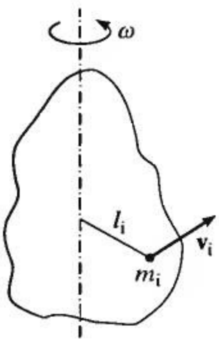
1. A forgómozgás alapegyenletének kísérleti igazolása

A **26.1. ábrán** vázolt eszközzel a forgómozgás kísérletileg vizsgálható. Az r sugarú orsóra csévélt fonál segítségével forgatónyomatékot gyakorolunk az orsóból, az acéldrótokból és az abroncsból álló rendszerre. A forgó karika β szöggyorsulását az idő és a süllyedő test elmozdulásának méréséből, r ismeretében meghatározhatjuk. F, r ismeretében az M forgatónyomaték és a β szöggyorsulás között összefüggést állapíthatunk meg. Különböző m tömegű és R sugarú abroncsok alkalmazásával a forgó test paramétereitől való függést is megkaphatjuk. A kísérleti eredmények szerint a β szöggyorsulás egyenesen arányos az abroncsra ható M forgatónyomatékkal ($\beta \sim M$). Arányossági együttható az abroncsra jellemző mennyiség. Mérési sorozattal igazolható, hogy

$$\boxed{M = \Theta\,\beta}, \tag{26.1}$$

ahol $\Theta = mR^2$ az abroncs tehetetlenségi nyomatéka.

2. A tengely körül forgó test mozgási (forgási) energiája



26.2. ábra

A forgómozgás alapegyenletéhez egyszerűen eljuthatunk a rögzített tengely körül forgó merev test mozgási energiájának vizsgálatával is. A test pontjai a tengelyre merőleges síkokban körpályán mozognak (**26.2. ábra**). Az i-edik, m_i tömegű rész mozgási energiája:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (l_i \omega)^2, \tag{26.2}$$

ahol l_i a tömegpont forgástengelytől mért távolsága, ω a merev test pillanatnyi szögsebessége. A merev test forgási energiája az egyes részek mozgási energiájának összegével egyenlő, tehát

$$E_k = \sum_i E_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i l_i^2. \tag{26.3}$$

Az energia-kifejezésben szereplő összeg a merev testnek az adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\boxed{\Theta = \sum_i m_i l_i^2}, \tag{26.4}$$

amelynek segítségével a forgómozgás energiája az

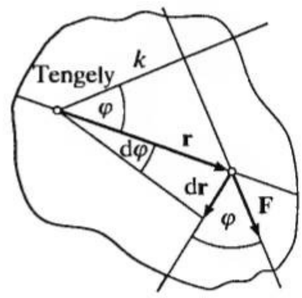
$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\Theta\omega^2} \tag{26.5}$$

alakban írható fel. Nagy tehetetlenségi nyomatékú, gyorsan forgó testek (lendkerék, pörgettyű) tetemes mozgási energiával rendelkeznek, ezért a gyakorlatban energiatárolóként is használják őket.

A munkatétel szerint a pontrendszer mozgási energiájának a megváltozása egyenlő a rendszerre ható összes erő munkájának összegével. Tengely körül forgó merev test elemi szögelfordulása során a testre ható erők munkája:

$$\boxed{dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F\cdot r d\varphi\cdot\cos\varphi = Fk\,d\varphi = M\,d\varphi}. \tag{26.6}$$

Az elemi munka tehát a forgatónyomaték és az elemi szögelfordulás szorzatával egyenlő. (A **26.3. ábrán** a merev testre ható erőknek csak a tengelyre merőleges síkba eső komponensét vettük figyelembe, mert a tengellyel párhuzamos összetevők munkája a forgás során nulla.)



26.3. ábra

Alkalmazzuk a munkatételt a forgó merev testre:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{dW}{dt}. \tag{26.7}$$

A (26.5) és a (26.6) egyenlet felhasználásával a (26.7) a következő alakban írható:

$$\Theta\omega\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = M\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = M\omega, \tag{26.8}$$

illetve

$$\boxed{M = \Theta\beta = \Theta\ddot{\varphi}}. \tag{26.9}$$

A rögzített tengely körüli forgás $M = \Theta\beta$ *alapegyenlete* szerint tehát a merev testre ható erők tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatéka egyenlő a test forgástengelyre vett Θ tehetetlenségi nyomatékának és β szöggyorsulásának szorzatával.

Ha a külső erők forgástengelyre vonatkozó eredő forgatónyomatéka nulla, akkor a merev test állandó szögsebességgel forog a tengely körül, miközben a $\Theta\omega$ forgásmennyiség időben állandó. Ez *a forgásmennyiség megmaradásának törvénye.* A $\Theta\omega$ forgásmennyiség abban az esetben is megmarad, amikor a tengely körül forgó test nem merev. Ha a belső erők hatására a tehetetlenségi nyomaték megváltozik, akkor a szögsebesség is megváltozik úgy, hogy a $\Theta\omega$ szorzat állandó marad.

3. A tehetetlenségi nyomatékra vonatkozó tételek

A forgómozgás dinamikai leírása során a tehetetlenségi nyomaték a tehetetlenség mértékének szerepét játssza. Értéke a test tengelyhez viszonyított tömegeloszlásától függ. A tehetetlenségi nyomaték konkrét meghatározása sokszor visszavezethető egyszerűbb, könnyen számolható esetekre az alábbi tételek alapján.

a) Addíciós tétel

Közös tengelyű testek összes tehetetlenségi nyomatéka az egyes testek tehetetlenségi nyomatékainak összegével egyenlő:

$$\boxed{\Theta = \sum_i \Theta_i}\,. \tag{26.10}$$

(Ez az állítás a tehetetlenségi nyomaték definíciója alapján nyilvánvaló.)

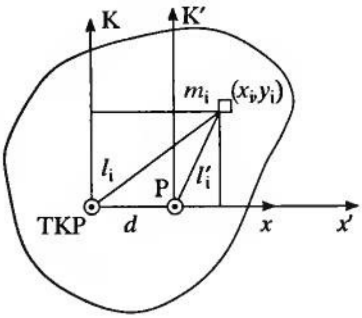
b) Lapítási tétel

A test tehetetlenségi nyomatéka nem változik meg, ha a test pontjait a tengellyel párhuzamosan eltoljuk (pl. egy hengert gondolatban változatlan sugarú körlappá lapítunk). Eszerint például egyenlő tömegű és sugarú homogén henger, korong és körlap tehetetlenségi nyomatéka egyenlő.

c) Steiner tétele

A tétel a párhuzamos tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok között állapít meg összefüggést. Két olyan párhuzamos tengelyre vonatkozik, amelyek közül az egyik a tömegközépponton megy át, a másik egy adott P ponton. Legyen a két tengely távolsága d, a merev test tömege m, a tehetetlenségi nyomatékok Θ_{TKP} és Θ_P. A tétel állítása:

$$\boxed{\Theta_P = \Theta_{TKP} + md^2}\,. \tag{26.11}$$



26.4. ábra

A bizonyításhoz tekintsük a **26.4. ábrát**. A tömegközépponton és a P ponton átmenő párhuzamos tengelyek irányában vegyük fel a két koordináta-rendszer z és z' tengelyeit. Az x és x' tengelyek pedig essenek a tömegközéppontból a z' tengelyre állított merőleges irányába. A tehetetlenségi nyomaték definíciója szerint a két tengelyre vett nyomatékok:

$$\Theta_{TKP} = \sum_i m_i l_i^2 \tag{26.12}$$

és

$$\Theta_P = \sum_i m_i l_i'^2, \tag{26.13}$$

ahol l_i, illetve l'_i a merev test i-edik pontjának a két tengelytől mért távolsága:

$$l_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \quad \text{és} \quad l_i'^2 = (x_i - d)^2 + y_i^2. \tag{26.14,15}$$

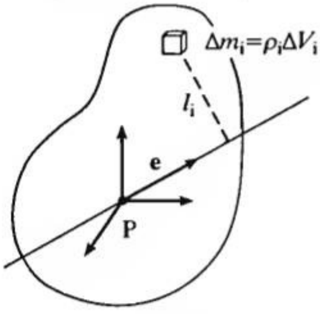
Ezek alapján a P ponton átmenő tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték a következőképpen adható meg:

$$\Theta_P = \sum_i m_i[(x_i - d)^2 + y_i^2] = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) + d^2\sum_i m_i - 2d\sum_i m_i x_i\,. \tag{26.16}$$

Az utolsó tagban szereplő $\sum_i m_i x_i$ összeg zérus, mivel a merev test tömegközéppontjának x koordinátája a K koordináta-rendszerben $0 = \sum_i m_i x_i \big/ \sum_i m_i$. (A tömegközéppont a szóban forgó koordináta-rendszer origója.) A (26.16) összefüggésben a jobb oldal első tagja a tömegközépponton átmenő tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték, a második tag pedig a merev test össztömegének és a tengelyek közötti távolság négyzetének szorzata, tehát $\Theta_P = \Theta_{TKP} + md^2$.

A Steiner-tételből következik, hogy az egymással párhuzamos tengelyekre vett tehetetlenségi nyomatékok közül a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

Folytonos tömegeloszlású testek tehetetlenségi nyomatékának meghatározásakor a vizsgált testet kicsiny részekre bontjuk és az egyes tömegelemekhez tartozó tehetetlenségi nyomatékokat összegezzük (**26.5. ábra**).



26.5. ábra

A sűrűségeloszlás ismeretében a test teljes térfogatára vett

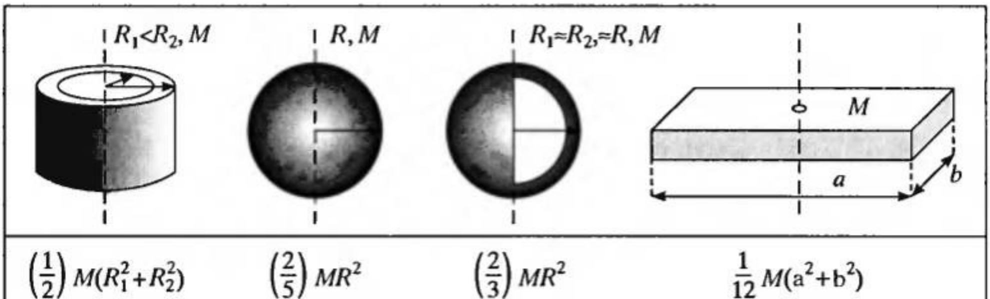
$$\Theta = \sum_i l_i^2 \Delta m_i = \sum_i l_i^2 \rho_i \Delta V_i \tag{26.17}$$

összegzés a tehetetlenségi nyomaték közelítő értékét adja meg. $\Delta V_i \to 0$ és $i \to \infty$ esetén előálló határérték az adott tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték, amelyet az

$$\boxed{\int_V \rho(\mathbf{r}) l^2(\mathbf{r}) \mathrm{d}V(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{i\to\infty \\ \Delta V_i \to 0}} \sum_i l_i^2 \rho_i \Delta V_i} \tag{26.18}$$

szimbólummal jelölünk.

A **26.6. ábrán** néhány jellegzetes szimmetrikus test tehetetlenségi nyomatékát tüntettük fel.



26.6. ábra

27. § A merev test síkmozgásának dinamikai leírása

A síkmozgás kinematikai tárgyalásakor megismertük ennek a mozgástípusnak a főbb jellemzőit. Legáltalánosabb esetben a merev test haladva–forgó mozgást végez, miközben a forgástengely a rögzített alapsíkra merőleges, és önmagával párhuzamosan mozog. Ez a mozgás a gyakorlati életben sokszor megvalósul, többnyire így mozognak pl. a járművek forgó részei.

1. Síkmozgások általános dinamikai leírása

A síkmozgás dinamikailag a merev test tömegközéppontjának mozgásával és a tömegközéppont körüli forgással jellemezhető. A tömegközéppont mozgását az

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{TKP}} = m\mathbf{a}_{\mathrm{TKP}} = \sum_{\mathrm{i}} \mathbf{F}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{k})} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{(\mathrm{k})}} \tag{27.1–4}$$

egyenlet adja meg. A tömegközéppont körüli forgás a

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\mathrm{i}} \mathbf{M}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{k})} = \mathbf{M}_{\mathrm{e}}^{(\mathrm{k})} \tag{27.5,6}$$

impulzusmomentum-tétellel írható le. Ha a koordináta-rendszer z tengelyét a mozgás síkjára merőlegesen választjuk, akkor a szögsebességvektor $\vec{\omega}(0,0,\omega)$ alakú. Legyen az erőrendszer minden tagja az x–y síkban, ekkor (27.5,6)-nak – a mozgás leírása szempontjából – csak a szögsebesség változását leíró z komponense lényeges:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Theta_z \omega) = M_z, \tag{27.7}$$

ahol $\Theta_z = \sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}}(x_{\mathrm{i}}^2 + y_{\mathrm{i}}^2)$, $M_z = (\mathbf{M}_{\mathrm{e}}^{(\mathrm{k})})_z$ pedig a külső erők z tengely körüli eredő forgatónyomatéka. $\Theta_z (= \Theta)$ a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. Merev testnél értéke állandó. Ezért a (27.7) egyenletet a tengely körüli forgás alapegyenletéhez hasonló,

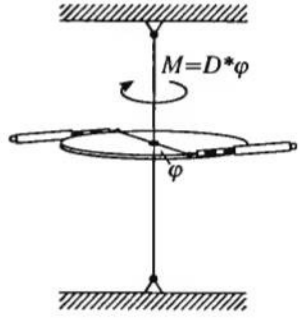
$$\Theta\ddot{\varphi} = \Theta\beta = M_z \tag{27.8}$$

alakban is felírhatjuk. A merev test síkmozgása a (27.1–4) és a (27.8) egyenletek alapján, valamint a kezdeti feltételek megadásával egyértelműen leírható.

A merev test mozgásának kinematikai leírása során megállapítottuk, hogy a síkmozgás mindig előállítható egymást követő elemi forgásokból, azaz minden pillanatban tiszta forgásnak is tekinthető. Így elegendő a forgómozgás alapegyenletét felírni. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy a pillanatnyi forgástengelyen kijelölt pont – bár sebessége zérus – általában gyorsuló mozgást végez. Ilyen esetekben a forgómozgás alapegyenletének felírásakor figyelembe kell venni a tehetetlenségi erők forgatónyomatékát is.

Megmutatható, hogy amennyiben a pillanatnyi forgáspont gyorsulása a tömegközéppont felé mutat, akkor a forgómozgás alapegyenletének felírásakor a tehetetlenségi erőket figyelmen kívül hagyhatjuk.

2. Torziós rezgés



27.1. ábra

A vázolt kísérletben, kifeszített acélszálra korongot erősítettünk. A korong peremére gyakorolt erőpár hatására a korong és vele együtt az acéldrót elfordul (**27.1. ábra**).

Nem túlságosan nagy elfordulási szögek esetén a torziós szál visszatérítő nyomatéka egyenesen arányos a szöggel. Ha a korongot elcsavarjuk és magára hagyjuk, periodikus mozgást végez a torziós szál mint forgástengely körül. A tapasztalat szerint a visszatérítő nyomaték:

$$\boxed{M = -D^*\varphi}, \tag{27.9}$$

ahol φ az elfordulás szöge, D^* a szálra jellemző együttható (régebbi neve: direkciós forgatónyomaték; SI-szabvány szerinti neve csavarási rugómerevség, jele: c_φ), a negatív előjel pedig a szögkitéréssel ellentétes irányra utal. Ezt az összefüggést ***lineáris forgatónyomaték-törvénynek*** nevezzük.

A forgatónyomaték ismeretében írjuk fel a rögzített tengely körüli mozgás alapegyenletét:

$$\Theta\ddot{\varphi} = -D^*\varphi. \tag{27.10}$$

(Θ ebben a kísérleti összeállításban a korong tehetetlenségi nyomatéka a korong síkjára merőleges szimmetriatengelyre vonatkoztatva.) A (27.10) egyenlet ugyanolyan típusú, mint amilyennel a harmonikus rezgőmozgás dinamikai leírásakor már foglalkoztunk. Lineáris forgatónyomaték hatására harmonikus forgási rezgést végez a test, tehát a mozgást leíró függvény a következő alakban adható meg:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\Omega t + \delta), \tag{27.11}$$

ahol φ_0 a forgási rezgés amplitúdója, δ a kezdőfázis, Ω a dinamikai adatokkal meghatározott körfrekvencia:

$$\Omega = \sqrt{D^*/\Theta}. \tag{27.12}$$

Az amplitúdó és a kezdőfázis értékét a kezdeti feltételek határozzák meg, a harmonikus rezgőmozgás tárgyalásakor megismert módon. A forgási rezgés periódusideje:

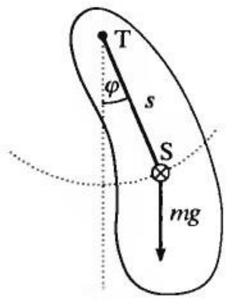
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\Theta/D^*}}\,. \tag{27.13}$$

A fenti képlet alapján D^* ismeretében, lengésidőméréssel meghatározhatjuk a torziós szálhoz vagy spirálrugóhoz rögzített test tehetetlenségi nyomatékát, vagy Θ ismeretében a D^*-ot. (D^*-nak a szál méreteitől és rugalmas állandóitól való függését a rugalmasságtanban tárgyaljuk, 30. § 1.)

Torziós szál elcsavarodásán alapul nagyon sok mérőműszer. Ezen az elven igen érzékeny mérőeszközök készültek, mint például CAVENDISH, COULOMB, EÖTVÖS Loránd torziós mérlege, galvanométerek stb.

3. Fizikai inga

Fizikai ingának olyan merev testet nevezünk, amely rögzített tengely körül a nehézségi erő hatására lengőmozgást végezhet. A **27.2. ábra** fizikai ingát mutat. Az ábrán T a forgástengely és az ábra síkjának döféspontját jelöli, S a merev test súlypontja, s a súlypontnak a forgástengelytől mért távolsága, φ a TS egyenes elfordulási szöge.



27.2. ábra

A testre ható nehézségi erő forgatónyomatéka:

$$M = -mgs\sin\varphi = \Theta\ddot{\varphi}. \qquad (27.14,15)$$

Ha a kitérés szöge $\varphi << 1$ rad, akkor $\sin\varphi \approx \varphi$, tehát a forgatónyomaték a lineáris forgatónyomaték-törvénynek tesz eleget: $M = -mgs\varphi$ és $D^* = mgs$.

A fizikai inga kis kitérések esetén közelítőleg harmonikus mozgást végez, amelynek lengésideje:

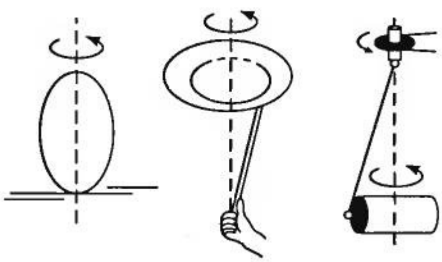
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\Theta/mgs}}\,. \qquad (27.16)$$

(Itt Θ a merev testnek a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, m a test tömege, s a súlypontnak a forgástengelytől mért távolsága.)

28. § Pörgettyűmozgás

1. Forgás szabad tengely körül

Asztalon megpörgetett gyűrű, pálcával forgatott tányér, motorral megforgatott henger, abroncs, téglatest szimmetriatengelye körül tartósan forog (**28.1. ábra**). Ezekből a kísérletekből is következik, hogy a testek csapágyazott tengely nélkül is tartósan foroghatnak, időben állandó irányú forgástengely körül. Az ilyen tengelyt *szabad tengelynek* nevezzük. A csapágyazott szabad tengely, a nehézségi erőtől eltekintve, nem terheli a csapágyat.

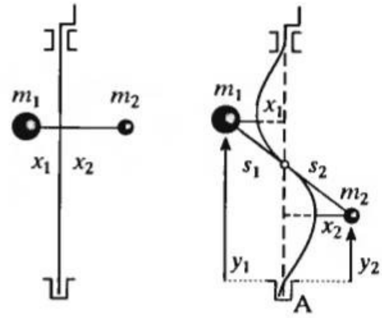


28.1. ábra

Felvetődik a kérdés, hogy mi a fizikai feltétele annak, hogy a forgástengely szabad tengely legyen. A szükséges feltételekről a legegyszerűbb „merev test", a súlyzómodell is felvilágosítást ad.

A **28.2. ábra** szerinti kísérletben az acéldrót tengelyt forgás közben akkor nem „terheli" erő, ha a két golyót összekötő vékony rúd két végén ébredő (a golyók körmozgását biztosító) erők nagysága megegyezik egymással, vagyis amikor

$$m_1 x_1 \omega^2 = m_2 x_2 \omega^2 , \tag{28.1}$$



28.2. ábra

ahonnan

$$m_1 x_1 = m_2 x_2 . \tag{28.2}$$

Ez utóbbi feltétel a tömegközéppontra teljesül, azaz a szabad tengelynek át kell mennie a tömegközépponton. Ez azonban még nem elégséges feltétel; például a jobb oldali ábra szerinti összeállításban a tengely a tömegközépponton halad át, mert teljesül az $m_1 s_1 = m_2 s_2$ összefüggés, a tengely erősen deformálódott, azonban vélhetően nem szabad tengely. A forgó golyók nyomatékot gyakorolnak a csapágyakra, amelynek értéke például az alsó csapágyra:

$$M_A = (m_1 x_1 \omega^2) y_1 - (m_2 x_2 \omega^2) y_2 . \tag{28.3}$$

Szabad tengely esetén ennek a nyomatéknak nullának kell lennie, azaz

$$m_1 x_1 y_1 - m_2 x_2 y_2 = \sum_{i=1}^{2} m_i x_i y_i = 0. \tag{28.4}$$

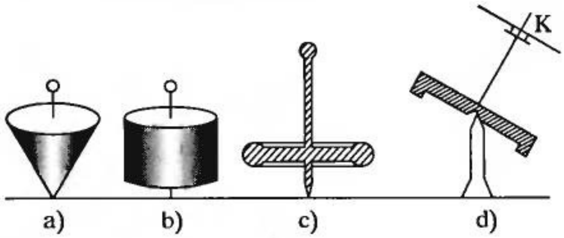
E második szükséges feltétel szerint a $\Theta_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i$ „eltérítő" (deviációs) nyomatékok algebrai összege nulla.

Az egyszerű esetre vett megfontolás érvényes kiterjedt merev testre is. A két szükséges feltétel egyben elégséges is, vagyis szabad tengely az olyan tengely, amely átmegy a merev test tömegközéppontján, és amelyre a deviációs nyomatékok összege nullával egyenlő. Igazolható, hogy bármilyen merev test esetében létezik legalább három ilyen, a tömegközépponton átmenő, egymásra merőleges irány.

Forgó gépalkatrészek tervezésekor gyakran feladat, hogy a csapágyazott forgástengely egyben szabad tengely is legyen. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor különösen a nagy szögsebességgel forgó gépek tengelyei a nagy nyomatékok miatt eltörhetnek. Szabad tengely körüli forgásnak tekinthető számos sportbeli jelenség is, például tornász, műugró szaltóugrása, korcsolyázó piruettje stb.

2. Erőmentes szimmetrikus pörgettyű; nutáció

Az egy pontjában rögzített merev test mozgását pörgettyűmozgásnak nevezzük. A pörgettyűmozgás általános leírása igen bonyolult, ezért a következőkben csak néhány általános, egyszerű esettel foglalkozunk (**28.3. ábra**).



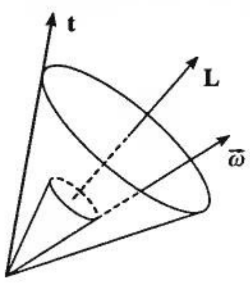
28.3. ábra

Szimmetrikus pörgettyűnek nevezzük az olyan merev testet, amelynek van szimmetriatengelye és a rögzített pont a tengely egy pontja (**28.3. ábra**). Ilyen például a szimmetriatengely egy pontjában rögzített forgásszimmetrikus test; kúp, henger stb. A gyakorlatban legtöbbször úgynevezett „lapos" pörgettyűt használnak; erre az a jellemző, hogy a szimmetriatengelyre vonatkoztatott nyomaték a legnagyobb (**28.3/c,d. ábra**).

Erőmentesnek nevezzük a *pörgettyűt* akkor, amikor a külső erőknek a rögzítési pontra vonatkoztatott eredő forgatónyomatéka nulla. Ha a testre a rögzítési pontbeli erőn kívül csak a nehézségi erő hat, akkor erőmentes pörgettyűt úgy kapunk, hogy a testet a súlypontjában rögzítjük. Ez az eset valósul meg a **28.3/d. ábrán**, ahol a szimmetriatengelyen levő, mozgatható „nehezék" megfelelő eltolásával elérhető, hogy a súlypont az alátámasztási pontba kerüljön.

Megforgatva a pörgettyűt szimmetriatengelye körül úgy, hogy kezdetben a tengelyét adott irányba állítjuk, azt tapasztaljuk, hogy a pörgettyű tartósan forog a térben állandó helyzetű szimmetriatengelye körül. Ebben az esetben a forgástengely ($\vec{\omega}$) egybeesik a szimmetriatengellyel (**t**) és ugyanez az egyenes lesz az impulzusnyomaték-vektor (**L**) egyenese is. A merev test szabad tengely körül forog. Az impulzusnyomaték irány és nagyság szerint állandó, mert a külső erők forgatónyomatéka nullával egyenlő ($\mathbf{M} = 0$).

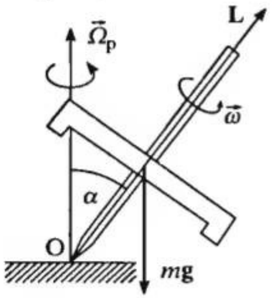
Ha a szimmetriatengelyt forgás közben kibillentjük előbbi helyzetéből, a zavar megszűnte után a pörgettyű továbbra is „erőmentes" marad, impulzusnyomaték-vektorának egyenese a térben ismét változatlan állású. A pörgettyű **t** szimmetriatengelye a zavar eredményeként kúpfelület mentén mozog. Az $\vec{\omega}$ pillanatnyi forgástengely vándorlását megfigyelhetjük, ha a K korongra sakktábla-mintázatú papírlapot ragasztunk. (Ekkor ugyanis csak azok a négyzetek láthatók viszonylag élesen, amelyek a forgástengely közelében vannak, a távoli forgó négyzetek elmosódottak.) A kísérlet tanúsága szerint ez a tengely is kúpfelületet ír le. Mindkét kúpnak közös tengelye a térben állandó helyzetű impulzusnyomaték-vektor egyenese. A **t** szimmetriatengelynek és az $\vec{\omega}$ pillanatnyi forgástengelynek az **L** tengelyű kúpfelületek menti mozgását *nutációnak* nevezzük (**28.4. ábra**).



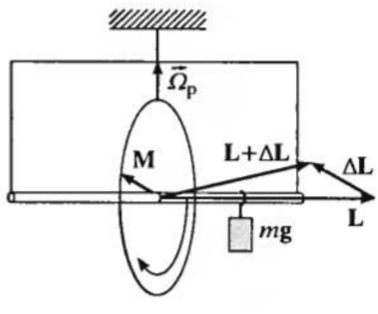
28.4. ábra

3. Súlyos szimmetrikus pörgettyű; precesszió

Ha a külső erőknek a pörgettyű rögzítési pontjára vonatkoztatott eredő forgatónyomatéka nem nulla, akkor a pörgettyűt *súlyos pörgettyűnek* nevezzük. Ez az eset valósul meg a **28.5. ábrán**, ahol az O rögzítési pont nem esik egybe a pörgettyű súlypontjával, és emiatt a nehézségi erő forgatónyomatékot gyakorol a merev testre. A forgatónyomaték természetesen származhat más külső erőtől is. Nagy szögsebességgel megforgatott pörgettyűt az ábrán látható helyzetbe állítva azt tapasztaljuk, hogy a pörgettyű nem borul fel, hanem szimmetriatengelye a függőleges tengely körül α nyílásszögű kúpfelület mentén mozog. Az erőmentes pörgettyű esetéhez képest ez új jelenség, mert ott ilyen kezdeti feltételek mellett a pörgettyű szimmetriatengelye nem változtatta térbeli helyzetét. A szimmetriatengelynek és egyidejűleg az impulzusmomentum-vektornak a külső forgatónyomaték hatására létrejövő kúp menti mozgását *precessziónak* nevezzük.

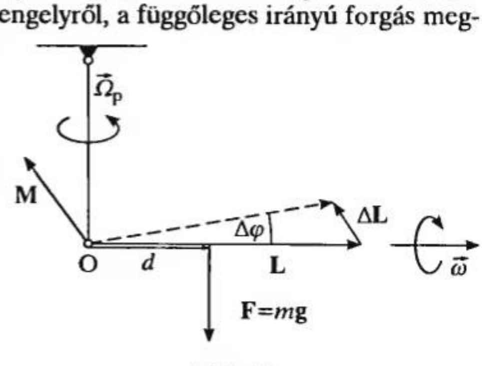


28.5. ábra



28.6. ábra

Tekintsük a **28.6. ábrát**, amely szerint a pörgettyűként szolgáló biciklikerék tengelye tetszés szerint elfordulhat mind vízszintes, mind függőleges tengely körül, anélkül, hogy a kerék súlypontjának helyzete változna. Figyeljük meg, mi történik az eredetileg erőmentesen forgó pörgettyűvel, ha erőhatásnak tesszük ki! Pörgessük meg a kereket úgy, hogy impulzusmomentuma az ábrán látható **L** vektorral egyezzék meg. Ezután akasszunk testet a kerék tengelyére. Azt tapasztaljuk, hogy a kerék függőleges tengely körül lassú forgásba kezd. Abban a pillanatban, amikor a testet leemeljük a tengelyről, a függőleges irányú forgás megszűnik. Ha a testet a kerék másik oldalán akasztjuk a tengelyre, akkor a függőleges tengely körüli forgás iránya az előzőével ellentétes lesz. Ezt a mozgást nevezzük a *pörgettyű precessziójának*. A precesszió szögsebessége meghatározható az impulzusmomentum-tétel alapján. A **28.7. ábra** mutatja, hogy a tengelyre ható $\mathbf{F} = mg$ erő $\mathbf{M}$ nyomatéka merőleges a pörgettyű $\mathbf{L} = \Theta\vec{\omega}$ impulzusmomentumára. Ez azt jelenti, hogy az $M = mgd$ nyomaték hatására a pörgettyű impulzusmomentumának iránya



28.7. ábra

változik meg. Jelöljük Ω_p-vel a precesszió szögsebességét, és a **28.7. ábra** alapján írjuk fel az impulzusmomentum megváltozását:

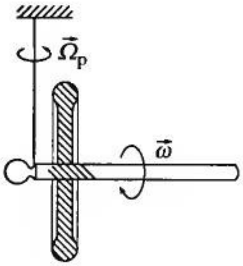
$$\Delta L = L\Delta\varphi = L\Omega_p \Delta t\,. \tag{28.5}$$

Ezzel az impulzusmomentum-tétel az

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L\Omega_p \tag{28.6}$$

alakban írható fel, ahonnan a precesszió szögsebességére

$$\boxed{\Omega_p = \frac{M}{L} = \frac{mgd}{\Theta\omega}} \tag{28.7}$$



28.8. ábra

adódik.

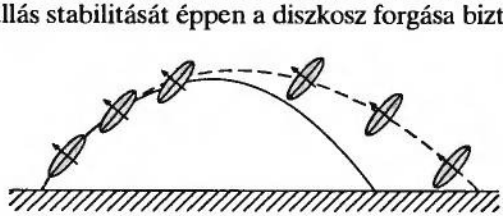
A pörgettyűk alátámasztása igen sokféleképpen valósítható meg, s ennek megfelelően a precesszió is sokféle módon létrejöhet.

A **28.8. ábrán** látható tengelyezett, korong alakú pörgettyűt függesszük fel tengelyének egyik végpontja közelében, pörgessük meg, majd hagyjuk magára! A gyorsan forgó pörgettyű a függőleges fonal körül saját súlya hatására precesszálva forog tovább. A precesszió szögsebessége a felfüggesztett biciklikerék forgásához hasonlóan határozható meg.

4. A pörgettyűjelenségek gyakorlati vonatkozásai

Mint az előzőekben láttuk, az erőmentes pörgettyű külső zavar hiányában szimmetriatengelye körül tartósan forog. A pörgettyű tengelyének iránytartása teszi lehetővé, hogy a különböző irányú tengelyekkel beállított erőmentes pörgettyűk rendszerét irányjelzőként, vonatkoztatási rendszerként használják. Ezt az elvet az űrhajózásban, repülőgépek navigációjában hosszú időn át használták.

A gyors pörgettyű tengelyének stabilitását a sportban is kihasználják. Például a megpörgetett diszkosz megfelelő indítás esetén, adott kezdősebesség mellett messzebbre repül, mint a hajításból számított érték, mert a diszkoszra a **28.9. ábrán** látható állásban dinamikai felhajtóerő is hat. Az állás stabilitását éppen a diszkosz forgása biztosítja.



28.9. ábra

A Föld tengelyének lassú precesszióját (26 000 év) az okozza, hogy alakja nem pontosan gömb, és tömegeloszlása miatt nem tökéletes erőmentes pörgettyű.

Síntörés vagy sínre helyezett tárgy hatására a vasúti kocsi kerekének impulzusmomentuma függőleges irányban hirtelen megváltozik. Ezt olyan forgatónyomaték tudja létrehozni, amelyhez tartozó erők a kocsi tengelyét vízszintes síkban elforgatják, emiatt a kerekek letérnek a sínpálya irányáról, a vonat kisiklik.

Járművek tervezésekor (pl. betont szállító, keverő autónál) a forgórészek elhelyezésénél figyelembe veszik a kanyarodás közben fellépő pörgettyűs nyomatékot, amely lényeges szerepet játszhat a jármű stabilitásában.

I. D) A DEFORMÁLHATÓ TESTEK MECHANIKÁJA

Valódi testek egy csoportjának mozgását a „merev test" feltételezéssel jó közelítéssel le tudtuk írni. Számos jelenség tanulmányozásakor azonban már nem tekinthetünk el a testek alakváltozásától: még az úgynevezett szilárd anyagok esetében sem, annál kevésbé a folyadékok és gázok körében.

Feltesszük, hogy az anyag a teret – amelyet elfoglal – folytonosan tölti ki, *kontinuumot* alkot. Egyelőre *homogén és izotrop anyag* deformációját tárgyaljuk, azaz olyan anyagét, amelynek fizikai tulajdonságai nem függnek sem a helytől, sem a választott iránytól. Az anyagi minőséget leíró állandók makroszkopikus jellemzők.

Először szilárd anyagok rugalmas alakváltozásával foglalkozunk; ezen belül is olyan kis deformációkkal, amelyek lineárisan függnek az alakváltozást okozó erőtől, tehát amelyekre érvényes a *Hooke-törvény*. [Robert HOOKE angol fizikus, 1635–1703.] Szilárd anyagon szűkebb értelemben a kristályos szerkezetű anyagokat, az úgynevezett szilárdtesteket értjük. *Rugalmas alakváltozásnak* az olyan deformációt nevezzük, ahol az erőhatás megszűnte után a test visszanyeri eredeti állapotát. Ha az erőhatás megszűntével ez nem következik be, akkor azt mondjuk, hogy a test *képlékeny, maradandó alakváltozást* szenvedett. Rudak, lemezek formálása, alakítása mindig képlékeny alakváltozás.

A továbbiakban az elemi deformációk tulajdonságait vizsgáljuk a Hooke-törvény keretein belül.

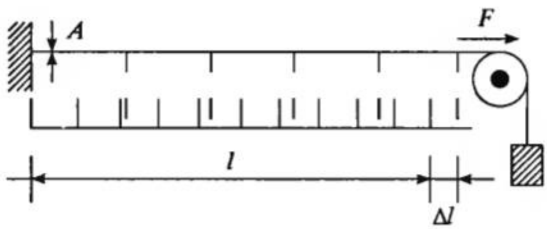
I. D) 1. RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSOK

29. § Egyszerű rugalmas alakváltozások

1. Nyújtás és térfogati összenyomás

a) Hooke-törvény

Adott minőségű, de különböző hosszúságú és keresztmetszetű, majd különböző minőségű fémhuzalokat megnyújtva (**29.1. ábra**) azt találjuk, hogy a Δl megnyúlás egyenesen arányos az alkalmazott F erővel, a huzal l hosszával és fordítottan arányos a huzal A keresztmetszetével:



29.1. ábra

$$\Delta l \sim \frac{Fl}{A}. \tag{29.1}$$

A (29. 1)-be írandó arányossági együttható a huzal anyagi minőségére jellemző. Ha a huzal erővel szembeni ellenállását nagy számértékkel szeretnénk jellemezni, akkor a nyújtásra vonatkozó Hooke-törvény:

$$\boxed{\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl}{A}}, \tag{29.2}$$

ahol E a *rugalmassági* vagy *Young-modulus* (kiejtése: modulusz). (Thomas YOUNG [jang] angol fizikus, 1773–1829).) A (29.2) alapján az E rugalmassági modulus SI-egysége a pascal, jele: Pa (vagyis megegyezik a nyomás SI-egységével). Meghatározása: 1 Pa = 1 N/m^2. Értékét néhány anyagra a *29.1.táblázat* tartalmazza.

Rugalmassági állandók és adatok *29.1. táblázat*

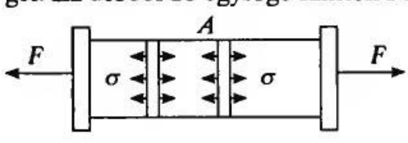
Anyag	E, 10^{10} Pa	G, 10^{10} Pa	μ	K, 10^{10} Pa	σ_B, 10^6 Pa
Alumínium	6,8	2,5	0,34	7,3	170–260
Réz	11,0	4,6	0,35	14,0	390–450
Ólom	1,7	0,65	0,45	4,3	17–22
Vas	20,0	8,7	0,29	16,6	–
Volfrám	40,0	17,5	0,28	37,0	4100–7000
Kvarcüveg	5,9	2,4	0,2	3,6	780
Acél	21,5	8,1	0,29	16,3	390–1800

Megjegyzés: A mértékegység jele előtt levő szám azt jelenti, hogy az oszlopban található értéket 10-nek a megadott hatványával kell megszorozni.

A huzal egyenlő szakaszainak megnyúlása egyenlő mértékben járul hozzá a teljes megnyúláshoz: a drót teljes hosszában, egyenletesen nyúlik. Bevezetve az $\varepsilon = \Delta l/l$ relatív megnyúlást és a $\sigma = F/A$ mechanikai feszültséget (röviden: feszültséget), a Hooke-törvény a következő alakot ölti:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}, \tag{29.3}$$

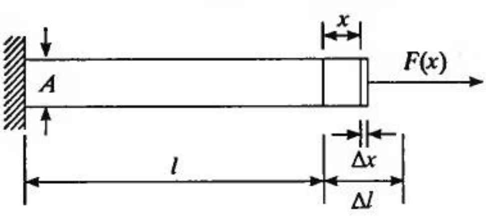
vagyis az ε relatív hosszváltozás egyenesen arányos a külső erő hatására ébredő σ feszültséggel. Ez utóbbi SI-egysége szintén Pa.



29.2. ábra

A megnyújtott huzalban azáltal alakul ki egyensúly, hogy a huzal hosszára merőleges keresztmetszetekben nyújtáskor belső feszültség ébred. Ez a feszültség minden keresztmetszetben ugyanakkora, mint a drót végeire ható F erővel és a rá merőleges A keresztmetszettel definiált külső feszültség (**29.2. ábra**).

Mivel a relatív megnyúlás a huzal teljes hosszában egyenletes, azt mondjuk, hogy a *deformáció homogén*. Ha a relatív megnyúlás és egyidejűleg a belső feszültség változik a drót hossza mentén, *inhomogén deformációról* beszélünk. Ez az eset valósul meg például akkor, amikor a felfüggesztett huzal saját súlyának hatására nyúlik meg.



29.3. ábra

b) Nyújtás közben végzett munka, rugalmas energiasűrűség

Nyújtsuk meg az l hosszúságú, A keresztmetszetű rudat Δl-lel (**29.3. ábra**)! A nyújtást lassan – egyensúlyi helyzetek sorozatán keresztül – végezzük. A végzett munka a változó erő elemi munkáinak összegével egyenlő.

Az x hosszúsággal megnyújtott rúdban

$$F(x) = \frac{EA}{l}x \tag{29.4}$$

erő ébred. A Δx elemi úton végzett munka:

$$\Delta W = F(x)\Delta x = \frac{EA}{l}x\Delta x. \tag{29.5}$$

A lineárisan növekvő erő összes munkája:

$$W = \int_0^{\Delta l} F(x)\mathrm{d}x = \frac{EA}{l}\int_0^{\Delta l} x\mathrm{d}x = \frac{EA}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\Delta l} = \frac{1}{2}\left(\frac{EA}{l}\right)(\Delta l)^2. \tag{29.6}$$

E munka eredményeként a rúdban, a megnyújtott rugóhoz hasonlóan rugalmas potenciális energia tárolódik ($E_r = W$).

A (29.4) és a (29.6) összefüggéseket rendre összevetve a rugóerő és a rugó megnyújtása közben végzett munka kifejezésével, a rugalmas rúdhoz (huzalhoz) hozzárendelhetjük a

$$D = \frac{EA}{l} \tag{29.7}$$

direkciós állandót.

A V térfogatú rúdban tárolt E_r rugalmas energia sűrűsége:

$$u = \frac{E_r}{V}. \tag{29.8}$$

Felhasználva a (29.6) eredményt, az u *energiasűrűségre*

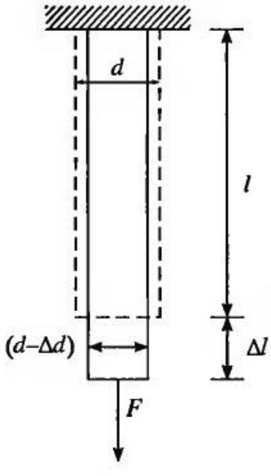
$$u = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{EA}{l}\right)(\Delta l)^2}{Al} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{29.9}$$

adódik.

2. Nyújtást kísérő haránt-összehúzódás. Poisson-szám

29.4. ábra

Gumicsőre szorosan illeszkedő gyűrű lecsúszik a csőről, ha a csövet megnyújtjuk (**29.4. ábra**). Ilyen egyszerű kísérlet is bizonyítja, hogy a cső, rúd, huzal stb. keresztmetszete nyújtás közben csökken, összenyomáskor megnő. A nyújtás, összenyomás eredményeként a harántméretek is megváltoznak. Kísérletek tanúsága szerint a harántméretek relatív változása egyenesen arányos



29.5. ábra

a hosszméret relatív változásával. Ha a **29.5. ábra** alapján l az eredeti hossz, Δl a megnyúlás, d az eredeti harántméret és Δd ennek megváltozása, akkor

$$\boxed{\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}}, \qquad \mu \geq 0. \tag{29.10}$$

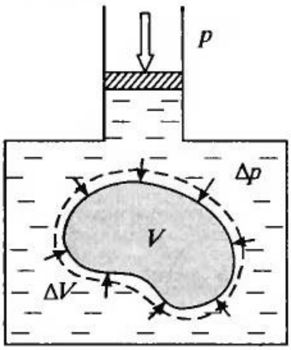
A μ arányossági tényezőt *Poisson-számnak* nevezzük. (Siméon POISSON [poaszö] francia fizikus, 1781–1840.) A negatív előjel azt mutatja, hogy nyújtáskor haránt-összehúzódás, összenyomáskor haránt irányú méretnövekedés jön létre. A nyújtás és a rá merőleges összehúzódás eredményeként a nyújtott test térfogata megváltozik. Példaként vegyük az l hosszúságú és d átmérőjű, kör keresztmetszetű rudat, amelynek a nyújtás során Δl-lel és Δd-vel változnak meg a méretei. A test ΔV térfogatváltozása a másodrendben kicsiny tagok elhanyagolása után a

$$\Delta V = \frac{\pi}{4}(d+\Delta d)^2(l+\Delta l) - \frac{\pi}{4}d^2 l \approx \frac{\pi}{4}d^2 l\left[\frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta d}{d}\right] \tag{29.11}$$

alakban adható meg. A relatív térfogatváltozásra ebből az adódik, hogy a relatív megnyúlással arányos:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\mu). \tag{29.12}$$

Tapasztalat szerint nyújtáskor (általában) a testek térfogata nem csökken. Ez azt jelenti, hogy $\Delta V \geq 0$, aminek a fenti egyenlet alapján következménye, hogy a Poisson-szám az adott anyagnál a $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ intervallumba esik. Megjegyezzük azonban, hogy léteznek olyan cellás szerkezetű anyagok, amelyek haránt irányú mérete nyújtás hatására nő. Ezeknek az anyagoknak a Poisson-száma negatív.



$\Delta V = -\kappa V \Delta p$

29.6. ábra

2. Térfogati összenyomás

Térfogati összenyomást úgy valósíthatunk meg, hogy a testre minden irányból – például folyadék közvetítésével – nyomást fejtünk ki (**29.6. ábra**). Tapasztalat szerint a térfogatcsökkenés egyenesen arányos a test térfogatával és a testre gyakorolt nyomás Δp változásával:

$$\Delta V = -\kappa V \Delta p, \tag{29.13}$$

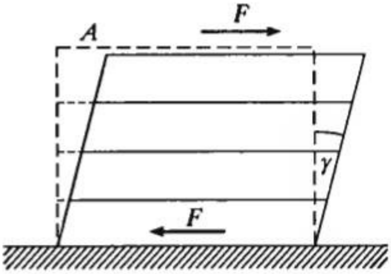
ahonnan

$$\boxed{\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\Delta V}{\Delta p}\right)}. \tag{29.14}$$

A (29.14) összefüggésben κ anyagi jellemző, az ún. *kompresszibilitási* (összenyomhatósági) *együttható*. Számértéke megadja, hogy egységnyi nyomásnövekedés hatására mekkora relatív térfogatcsökkenés lép fel. A kompresszibilitási együttható helyett gyakran a reciprokát, a $K = 1/\kappa$ *kompressziós modulust* használjuk, amelynek SI-egysége a Pa. Ez az anyagjellemző a test összenyomással szembeni ellenállását jellemzi.

3. Nyírás

Rugalmas hasáb felső, A keresztmetszetű lapjára a lappal párhuzamos F erőt fejtünk ki (**29.7. ábra**). Az erő nagyságától függően a hasáb különböző γ szöggel deformálódik. A felső lappal párhuzamos rétegek elcsúsznak egymáson, mint a kártyacsomag lapjai. Ezt az alakváltozást *nyírásnak* nevezzük. (A jelenség jól szemléltethető két párhuzamos lap között levő lágy, rugalmas anyaggal, pl. szivaccsal, vastagabb könyvvel.) Kis deformációknál a nyírás γ szöge egyenesen arányos a felülettel párhuzamos erővel, fordítottan a lap területével és függ az anyagi minőségtől:



29.7. ábra

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{A}}. \tag{29.15}$$

Az anyagi minőségtől függő G együtthatót *nyírási modulusnak* nevezzük. A nyírási modulus SI-egysége a pascal per radián, jele: Pa/rad, kifejezése: 1 Pa/rad = 1 Pa. A nyírás során a testnek az erővel párhuzamos rétegei elcsúsznak egymáson, miközben a felületekben visszahúzó τ nyírófeszültség ébred. Az ebből származó erő egyensúlyt tart a külső erővel:

$$\tau A = F, \tag{29.16}$$

azaz

$$\boxed{\tau = G\gamma}. \tag{29.17}$$

A nyírásra kapott $\gamma = \tau/G$ összefüggés analóg a nyújtásra vonatkozó $\varepsilon = \sigma/E$ Hooke-féle törvénnyel. Mindkét összefüggés tartalma az, hogy a deformáció arányos a feszültséggel.

A nyírási alakváltozás során az F erő munkát végez. A nyújtás során megismert számoláshoz hasonlóan megmutatható, hogy az energiasűrűség

$$u = \frac{E_r}{V} = \frac{1}{2} G\gamma^2 = \frac{1}{2}\tau\gamma \tag{29.18}$$

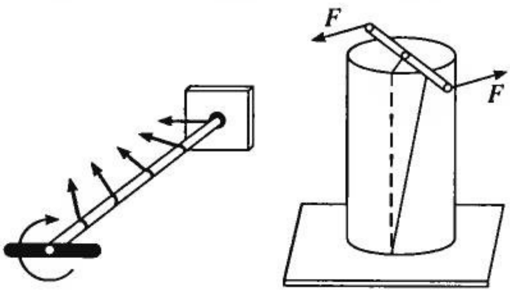
összefüggéssel adható meg.

A *29.1. táblázat* megadja néhány anyag rugalmas állandóinak értékét.

30. § Összetett rugalmas alakváltozások

1. Csavarás

Egyik végén befogott, 1–2 méter hosszú vékony fémrudat megcsavarva, a rúdra egyenlő közönként erősített nyilak elfordulásából leolvasható, hogy a rúd elcsavarodása egyenesen arányos a rúd hosszával és a rúd végére kifejtett forgatónyomatékkal (**30.1. ábra**). Elcsavarodás közben a rúd egyes rétegei – merőleges keresztmetszetei – elfordulnak, s a rúd végén mérhető elcsavarodást eredményeznek. A rudat koncentrikus csövekre bontva, az egyes csövek téglalap alakú palástja az elcsavarodás során paralelogrammává torzul. A csövek nyírási deformációt szenvednek. Az elemi csövek nyírásához szükséges forgatónyomatékok összege adja meg a rúd elcsavarásához szükséges teljes nyomatékot.



30.1. ábra

Az M külső forgatónyomaték hatására az L hosszúságú, R sugarú rúd végének φ szögű elcsavarodása a

$$\boxed{\varphi = \frac{2}{\pi G} \cdot \frac{L}{R^4} M} \qquad (30.1)$$

összefüggéssel adható meg. Ezen eredmény szerint az elcsavarodás szöge egyenesen arányos a szabad végen ható külső forgatónyomatékkal és a rúd hosszával, fordítottan arányos a rúd sugarának negyedik hatványával és függ a rúd anyagi minőségétől. (Ugyanolyan hosszú és anyagi minőségű rudak esetében a fele átmérőjű tizenhatszor nagyobb mértékben csavarodik el ugyanazon külső nyomaték hatására.)

A megcsavart rúd, huzal olyan torziós rugónak feleltethető meg, amelynek direkciós nyomatéka:

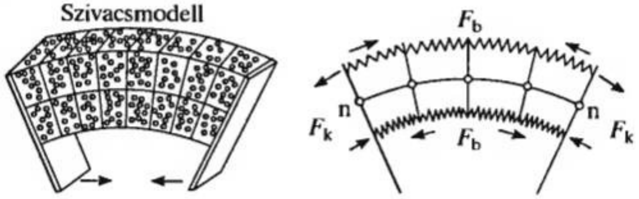
$$\boxed{D^* = \frac{M}{\varphi} = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L}}. \qquad (30.2)$$

A torziós szál elcsavarodása a sugár negyedik hatványával fordítottan arányos, ezért vékony szálak alkalmazásával rendkívül érzékeny mérőeszközök készíthetők. Ezért alkalmazzák olyan széles körben alapműszerként a torziós mérlegeket (CAVENDISH, COULOMB, EÖTVÖS torziós mérlege, torziószálas galvanométer stb.).

A rugalmas csavarás jelenségének az előbb említetten kívül is nagy a gyakorlati jelentősége. Ezen alapul többek között a járművek, szerszám- és fúrógépek forgó tengelyein a nyomaték- és teljesítményátadás.

2. Hajlítás

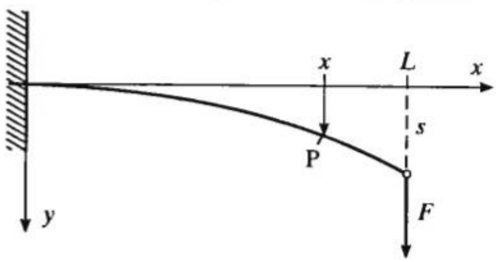
Rugalmas rúd hajlítása közben a hosszára merőleges, eredetileg párhuzamos keresztmetszetek elmozdulnak (**30.2. ábra**). Két közeli keresztmetszet által határolt rúddarab úgy deformálódik, hogy egy közbülső réteg fölött levő pontok távolodnak egymástól (nyújtási tartomány), a réteg alattiak pedig közelednek egymáshoz (összenyomási tartomány). Ezt a meggörbült, de változatlan hosszúságú réteget neutrális (semleges) zónának nevezzük .



30.2. ábra

A hajlítás során a külső erők hatására a megnyúlt és összenyomott rétegekben ébredő, a belső feszültségből származó visszahúzó erők a neutrális réteg körül visszatérítő nyomatékot gyakorolnak a rúdra. Terheljünk egyik végén vízszintesen befogott, L hosszúságú, A keresztmetszetű homogén rudat a szabad végén F erővel (**30.3. ábra**). Igazolható, hogy kis lehajlás esetén a neutrális réteg átmegy a rúdkeresztmetszet tömegközéppontján. A hajlított rúd alakját megszabó neutrális szál egyenlete az

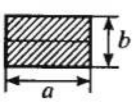
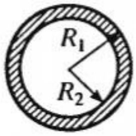
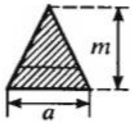
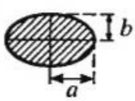
$$y(x) = \frac{F}{EI}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \qquad (30.3)$$



30.3. ábra

harmadfokú polinommal írható le. A fenti összefüggésben I a rúdkeresztmetszet másodrendű felületi nyomatéka. Néhány jellegzetes keresztmetszetre I értéke a *30.1. táblázatban* látható.

Másodrendű felületi nyomatékok   *30.1. táblázat*

			
$\frac{1}{12}ab^3$	$\frac{\pi}{4}(R_1^4 - R_2^4)$	$\frac{1}{36}am^3$	$\frac{\pi}{4}ab^3$

A (30.3) egyenletből a rúd végének s lehajlására az

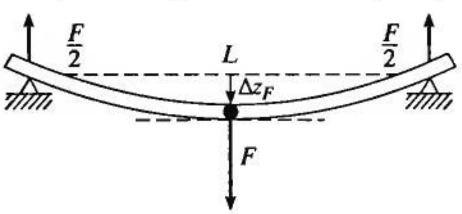
$$\boxed{s = y(L) = \frac{FL^3}{3EI}} \tag{30.4}$$

eredményt kapjuk. A befogási ponttól távolodva adott F terhelőerő mellett a lehajlás mértéke köbösen nő a távolság függvényében. A Young-modulus és az I felületi nyomaték növelése a lehajlást csökkenti.

Téglalap alakú keresztmetszet esetén a felületi nyomaték ($I = ab^3/12$) lineárisan függ az erőre merőleges és köbösen az erővel párhuzamos oldaltól. Rudak, gerendák lehajlása adott terhelés, anyagi minőség és hossz mellett nagymértékben függ a keresztmetszet alakjától és az igénybevétel irányától. (Pl. az élére fektetett vonalzó lehajlása ugyanakkora terhelés mellett sokszorosan kisebb, mint a lapjára fektetetté.) Tartók, rudak, gerendák körében (vasúti sín, födémgerenda stb.) gyakori a T, illetve I keresztmetszet. Ezekben a keresztmetszetekben ugyanis a tartó tömegének nagy része távol helyezkedik el a neutrális rétegtől, s emiatt a felületi nyomaték nagy lesz.

3. Behajlás

Épületek kivitelezése során a tartófalakra vízszintes gerendák vagy vasbeton födém kerül, ami átveszi a későbbiek során a felületen fellépő erőket és közvetíti a főfalak felé (**30.4. ábra**). A két végén alátámasztott, közepén F erővel megterhelt rúd az erő hatására behajlik.



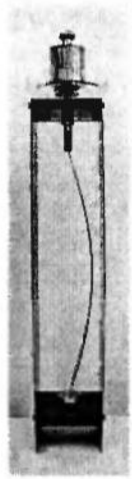
30.4. ábra

A hajlítás szempontjából a rúd úgy tekinthető, mintha középső, vízszintes részét fogtuk volna be mereven és a két végen $F/2$ erő húzná felfelé. A rúd (gerenda) behajlására a (30.4) összefüggés felhasználásával így

$$\Delta z_F = \frac{FL^3}{48EI} \tag{30.5}$$

adódik. A vízszintes rúd saját súlya miatt is behajlik, ez a valóságban általában lényegesen kisebb, mint a terhelés hatására keletkező behajlás.

4. Kihajlás



30.5. ábra

Rudak hosszirányú terhelése igen sok esetben eredményez olyan kihajlást, amely már maradandó alakváltozással jár (**30.5. ábra**). Az ehhez tartozó F_E kritikus nyomóerő (az az erő, amelynél a kihajlás létrejöhet) Leonhard EULER [ajler] (svájci matematikus, 1707–1783) nyomán (1744) a rugalmasságtan keretein belül is közelítőleg meghatározható.

EULER szerint az a kritikus terhelés, amelynél az L hosszúságú, csuklósan megtámasztott, egyenes, állandó keresztmetszetű rúd elveszíti a függőleges, stabilis egyensúlyi helyzetét, az

$$\boxed{F_E = \pi^2 \frac{EI}{L^2}} \qquad (30.6)$$

erőnél következik be. Műszaki szempontból, építészeti tervezések során, a kritikus nyomóerő ismerete különösen fontos.

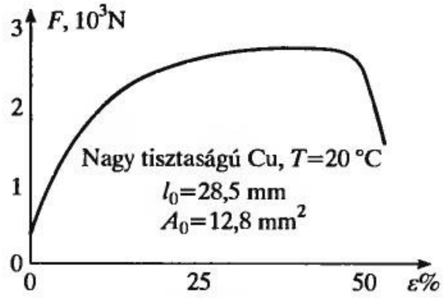
5. A feszültség- és a deformációs állapot általános jellemzése

Az előzőekben a rugalmas anyag elemi deformációit vizsgáltuk. Rugalmas test a külső erők hatására deformálódik, s a kiindulási esethez képest megváltoznak a test részei között ható belső erők. A testben feszültség ébred. (Feszültségeket létrehozhatunk más úton is, pl. úgy, hogy az anyagot melegítjük, egyes anyagoknál pedig erős deformáció léphet fel, ha mágneses vagy elektromos mezőbe helyezzük.) Az elemi deformációkat leíró példáinkban ezt a feszültséget értelmeztük a legegyszerűbb esetekre. A test feszültség- és deformációs állapotának leírása általános esetben viszonylag bonyolult, s csak magasabb matematika felhasználásával lehetséges.

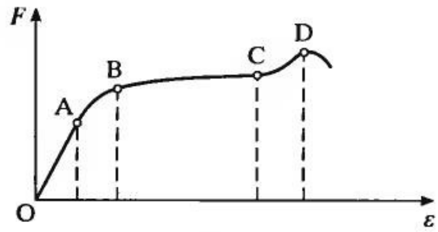
Az anyag belsejében kialakuló feszültség- és deformációs állapot feltérképezése a mérnöki és a fizikai anyagtudomány számára alapvető fontosságú. Számos kísérleti technika létezik, amellyel az anyag belsejében levő feszültségállapot meghatározható. Az egyik klasszikus vizsgálati módszer, ami üvegszerű amorf anyagok és átlátszó polimerek (pl. plexi) esetében alkalmazható, a kettős törés jelenségére épül (125. §). Az említett anyagok természetes állapotukban izotropok, kettős törést nem mutatnak. Mechanikai terhelés hatására, vagy a dermedés során az anyagban maradt mechanikai feszültségek miatt kettős törővé válnak. Az ilyen anyagot keresztezett polárszűrők közé helyezve és kivetítve, az ernyőn színes feszültségoptikai ábrát láthatunk (**125.1. színes ábra, melléklet**).

6. Képlékeny alakváltozás

A testek deformációját tanulmányozva gyakran előfordulnak olyan jelenségek, amelyekre a Hooke-törvény már nem érvényes, sőt amelyeket nem is sorolhatunk a rugalmas jelenségek körébe. Már a huzalok nyújtásakor is tapasztalhatjuk, hogy a deformáció csak vi-



30.6. ábra



30.7. ábra

szonylag szűk tartományban írható le a Hooke-törvénnyel. Ezt mutatja az 1 mm átmérőjű ipari rézdrót erő–megnyúlás diagramja (**30.6. ábra**).

Az erő–megnyúlás diagram sok más anyag esetében is hasonló tulajdonságokat mutat. A **30.7. ábra** sematikusan mutatja a deformáció kezdetétől a huzal elszakadásáig észlelhető fontosabb deformációs tartományokat. Kis terhelések mellett a próbatest közelítően a Hooke-törvény szerint nyúlik ($\overline{OA}$ szakasz), majd fokozatosan megszűnik a lineáris kapcsolat a húzóerő és a megnyúlás között. A B pont elérése után a test már nem nyeri vissza eredeti alakját, ha a húzóerőt megszüntetjük. További terhelésre maradandó alakváltozást észlelünk, a drót „megfolyik". A B pont a rugalmassági határ, a képlékenység kezdete. Az ehhez a ponthoz tartozó deformációt folyáshatárnak, a hozzá tartozó feszültséget folyásfeszültségnek nevezzük. Mivel a folyás megindulása nem mindig állapítható meg pontosan, ezért folyásfeszültségnek az $\varepsilon = 0{,}2\%$-os maradandó alakváltozáshoz tartozó feszültséget szokás elfogadni.

A folyáshatár elérése után bizonyos anyagok eredeti hosszuk többszörösére is megnyújthatók anélkül, hogy elszakadnának. Ezek az ún. szuperképlékeny anyagok rendkívül fontosak az ipari alkalmazások szempontjából. Általában a tartós folyás ($\overline{BC}$) csak egyre növekvő erő mellett érhető el, mert a folyás során az anyag lassan „felkeményedik". Ezt a jelenséget alakítási keményedésnek nevezzük. Fúrógéppel sok százszor körbecsavart lágy rézhuzal keménnyé válik és így puha falapba szögként beüthető. Az erő maximális értékénél (D) a huzal egy helyen befűződik (a többi helyhez képest jobban elvékonyodik) és csökkenő terhelés mellett is elszakad. Lényeges megjegyezni, hogy csak az erő–megnyúlás görbének van maximuma, ami a legegyszerűbb esetben a test befűződésének következménye. A minta keresztmetszete valahol, eleinte kissé, majd az egyre növekvő feszültség miatt egyre rohamosabban csökken, ezért csökkenő erő mellett is bekövetkezik a minta nyúlása, illetve elszakadása. A feszültség és deformáció közti kapcsolat (néhány kivételtől eltekintve) mindig szigorúan monoton függvénykapcsolat.

A maximális erő a próbatest szilárdságára jellemző. Az A_0 keresztmetszetű próbatest *szakítási szilárdságát* a

$$\boxed{\sigma_B = \frac{F_{max}}{A_0}} \tag{30.7}$$

összefüggés definiálja (*29.1. táblázat*).

A mindennapi életben találkozunk olyan anyagokkal, amelyek képlékenyek, jól alakíthatóak. Ezeknél az anyagoknál a plasztikus tartomány dominál. A rideg anyagok közvetlenül a rugalmas tartomány elérése után elszakadnak, eltörnek. Közismert képlékeny anyag pl. az ólom, amely kovácsolással vékony lemezzé alakítható. Az öntöttvas, illetve az üveg pedig ridegségéről, törékenységéről ismert. Magas hőmérsékleten képlékenyen viselkedik a vas, az acél, amit öntött, tömbi állapotból hengerléssel lemezzé, húzással dróttá lehet alakítani. Nagy nyomó- vagy húzóerő alkalmazásával számos fém, pl. az alumínium- és az acéllemezek hidegen is alakíthatók (pl. gépkocsikarosszéria-elemek). A kovácsolási módszerek, edzési technikák több ezer éves eljárások, amelyekkel a fémek nemcsak alakíthatók, hanem keményíthetők is. A fegyverek (pl. damaszkuszi, toledói pengék) készítésének titka a felületkezelés, amivel az időjárás viszontagságaival szemben is ellenállóvá tehető az anyag.

A rugalmasságtan tárgyalásakor azzal a feltételezéssel éltünk, hogy a feszültségek egyedül és kizárólagosan az adott pontban adott időpillanatban fellépő deformációk függvényei. Ez azt jelenti, hogy adott deformációs állapot fenntartásához mindig ugyanakkora erő szükséges. Emiatt a rideg és a képlékeny alakváltozást egymást kizáró anyagi tulajdonságnak érezzük. Léteznek azonban olyan anyagok, amelyek az erőhatás sebességétől függően egyszer képlékenyek, másszor ridegek. Ilyen anyag a szobahőmérsékleten gyurmaszerű ugrógitt (polibórsziloxán). Kis sebesség esetén (kézi formázáskor) az ugrógitt könnyen gyúrható. Gömb alakúra gyúrva és nagy sebességgel a földre pattintva azonban rugalmasan felugrik, s ha kalapáccsal ütünk rá, szilánkosan törik, mint az üveg. Az egyszerű jelenség mutatja, hogy a feszültségállapot, amely az anyag belsejében kialakul, nemcsak a deformációtól, hanem annak sebességétől is függhet.

31. § A szilárdtestek szerkezetéről

1. A kristályos testek felépítése

A rugalmasságtan keretén belül nem foglalkoztunk a szilárdtest mikroszkopikus és fenomenologikus jellemzői közötti kapcsolattal. A rugalmas és a képlékeny alakváltozás, és velük összefüggésben számos kérdés megválaszolásához elengedhetetlen az anyag mikroszerkezetének ismerete.

Az anyagok mechanikai tulajdonságainak vizsgálatával az anyagtudomány foglalkozik. Az anyagtudomány vizsgálati területe a legkülönbözőbb anyagokra (fémekre, ötvözetekre, műanyagokra, üvegekre, cellás szerkezetekre stb.) kiterjed. A követelmények általában összetettek, az anyagnak egyidejűleg több optimális tulajdonsággal is rendelkeznie kell. (A repülőgépgyártásban pl. a nagy szilárdság mellett többnyire követelmény az is, hogy az anyag könnyű és tartós legyen, jól bírja a periodikus, fárasztási igénybevételt.)

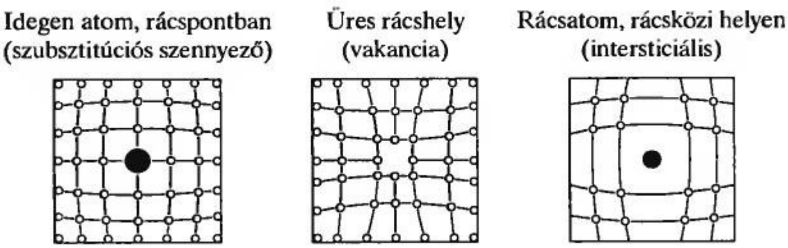
Röntgendiffrakciós és más vizsgálati módszerek eredményeiből kiderült, hogy a szilárd anyagok jelentős része kristályos szerkezetű. A szilárd anyag atomjai, molekulái úgynevezett elemi cella ismétlődéseként szabályos geometriai alakzatok szerint rendeződnek. (A **31.1. ábra** különböző kristályszerkezetek elemi celláját mutatja.)

31.1. ábra

A szilárdtesteket hosszú távú rendezettség jellemzi. A szabályos szerkezetű kristályt egykristálynak (monokristálynak) nevezzük. Az egykristály erőteljesen anizotrop, ami abban nyilvánul meg, hogy különböző irányokban más és más az anyag szilárdsága, rugalmas állandóinak nagysága, fajlagos ellenállása, hővezetése stb. A gyakorlatban használt fémek és ötvözetek viszont jó közelítéssel izotropok. A fém felületét finoman lecsiszolva és megfelelő kémiai maratásnak alávetve, mikroszkóp alatt 10^{-4}–10^{-5} cm átlagos átmérőjű kristályszemcsék sokaságát figyelhetjük meg. E szemcsék mint egykristályok a legkülönbözőbb irányítottságúak; orientációjuk sokfélesége miatt a makroszkopikus méretű fémdarab gyakran izotrop tulajdonságokat mutat. Az ilyen anyagokat polikristályosnak nevezzük.

2. Kristályhibák

A kristályosodás folyamán mindig létrejönnek kristályhibák. Ez azt jelenti, hogy a szabályos geometriai rend helyileg „megsérül". A hibák kiterjedésük szerint csoportokba oszthatók (**31.2. ábra**).



31.2. ábra

a) Pontszerű hibák

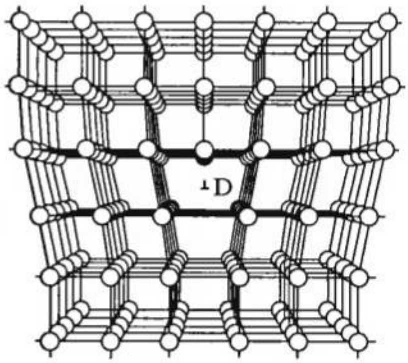
Ide tartoznak az idegen, szennyező atomok, amelyek beépülnek a rácspontokba (szubsztitúciós vagy helyettesítő szennyező), néha rácspontok közti (intersticiális) helyekre.

Az ötvözési eljárással bevitt anyagok szerepe gyakran a mechanikai tulajdonság javítása, a szilárdság növelése. A nagy tisztaságú alumínium pl. rendkívül puha, képlékeny, szinte kenhető. Kis szennyeződés hatására azonban képlékenysége csökken.

Tökéletesen tiszta anyagban is léteznek ponthibák. A termikus mozgás miatt a rácshelyek adott hányada mindig üresen található. Ezek az üres rácshelyek a vakanciák. Szobahőmérsékleten $\approx 10^8$, olvadáspont környékén 10^3–10^4 atomra jut átlagosan egy vakancia.

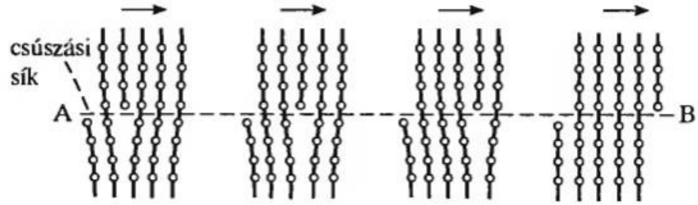
b) Vonalszerű hibák

A **31.3. ábra** olyan kristályrészt mutat, amelybe a D pontig terjedően többlet-félsík „ékelődött" a többi sík közé, emiatt a félsík éle mentén a rács deformálódott. Az ilyen vonalas kristályhibát *diszlokációnak*, pontosabban éldiszlokációnak nevezzük **(31.3. ábra)**. A diszlokációk keletkezésének és a kristályban való mozgásának fontos szerepe van a szilárdtestek rugalmas és képlékeny alakváltozása során. Egykristályok nyújtásakor megfigyelhető, hogy a deformáció közben a minta egyes részei a csúszási síkok mentén elcsúsznak egymáshoz képest. Ezt a csúszást értelmezzük a **31.4. ábra** alapján. Az AB csúszási síkban egy rácstávolságnyi elmozdulás úgy jöhet létre, hogy a csúszási sík két oldalán egymással szemben álló rácspontok egyidejűleg egy egységnyit elcsúsznak egymáshoz képest. Abban az esetben viszont, amikor a csúszási síkban diszlokáció van, a csúszás úgy megy végbe, hogy a diszlokáció végigfut a csúszási síkban (most balról jobbra), miközben az egyes rácspontok egymás után veszik fel az elcsúszás utáni új helyüket. Ez a deformáció több nagyságrenddel kisebb feszültség hatására jön létre, mint az előbbi. A képlékeny alakváltozások diszlokációmozgással magyarázhatók. Elektronmikroszkópos felvételeken a diszlokációvonal jól látható.



31.3. ábra

A diszlokációknak a képlékeny alakváltozásban játszott szerepét TAYLOR, OROWAN és POLÁNYI tárta fel.



31.4. ábra

I. D) 2. NYUGVÓ FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK MECHANIKÁJA (HIDRO- ÉS AEROSZTATIKA)

32. § Nyugvó folyadékok mechanikája (Hidrosztatika)

1. A folyadékok általános jellemzése

Mindennapos tapasztalat, hogy a folyadékok gyakorlatilag térfogattartók, vagyis igen nagy erővel is csak kismértékben nyomhatók össze. Emellett könnyen önthetők, és mindig felveszik az edény alakját. Mindezek a tulajdonságok értelmezhetők, ha a folyadékrészeket egymáson könnyen elgördülő golyókként fogjuk fel, amelyek között érintőleges, azaz nyíróerők nincsenek, egymásra csak merőleges irányú erőt fejtenek ki. A nyírási erők hiányával magyarázható a nagyfokú gördülékenység, amelynek többek között az az eredménye, hogy a nyugvó folyadék szabad felszíne a nehézségi erő és a folyadékrészek között ható erők összhatásaként vízszintes. A különböző alakú edényekbe öntött folyadékot úgy tekintjük, mint állandó térfogat mellett deformált testet. Nyírási alakváltozás során a folyadékban nem ébred nyírófeszültség. Még a sűrűn folyó folyadékok – kátrány, méz, glicerin – részei között is csak olyan mozgás közben hatnak nyíróerők, amikor a folyadék részecskéi egymáshoz képest is elmozdulnak.

Az olyan folyadékot, amelyben a folyadékrészek egymáshoz viszonyított elmozdulása során sem hat súrlódási erő, *ideális folyadéknak* nevezzük.

2. Nyomás nyugvó folyadékban

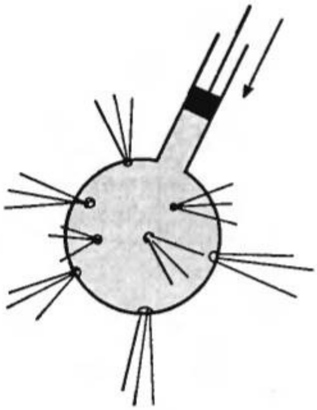
A hidraulikus emelő, a folyadékfék és még számos berendezés azon az elven működik, hogy a folyadékra kifejtett nyomást a folyadék gyengítetlenül „közvetíti" a folyadék minden részébe és az edény falaira. Erre vonatkozó egyszerű kísérletet végezhetünk pl. a vízibuzogánnyal (**32.1. ábra**). Ha a dugattyúval nyomást fejtünk ki a buzogányban levő vízre, a lyukas gömbből a víz minden irányban egyenlő mértékben áramlik kifelé.

A **32.2. ábra** a *hidraulikus emelő* működési elvét mutatja. Az A_1 keresztmetszetű dugattyúra kifejtett F_1 erőt az A_2 keresztmetszetű hengerben F_2 erővel egyensúlyozhatjuk ki. Ez az erő az F_1 erőnél A_2 / A_1-szer nagyobb, azaz

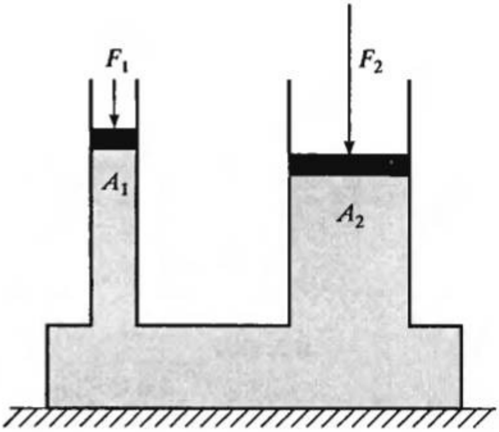
$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1, \tag{32.1}$$

illetve

$$\boxed{\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}}. \qquad (32.2.)$$



32.1. ábra



32.2. ábra

Az utóbbi összefüggés a két dugattyú által kifejtett nyomások egyenlőségét fejezi ki. A gyakorlatban működő hidraulikus berendezéseken nyitó és záró szelepek biztosítják a periodikus működést és azt, hogy a tartalékfolyadék a dugattyúkkal mozgatott folyadék terébe bejusson. Kis keresztmetszetű nyomóhenger és nagy keresztmetszetű munkahenger esetén kis erővel nála több nagyságrenddel nagyobb súlyú terhet tudunk felemelni. Az ehhez szükséges munka azonban természetesen legalább annyi, mint amekkora a teher felemeléséhez a hidraulikus emelő használata nélkül szükséges.

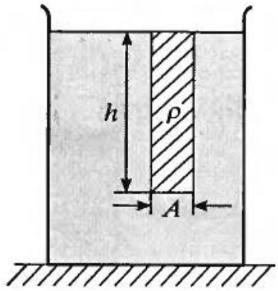
A felsorolt jelenségek lényegét ***Pascal törvénye*** (Blaise PASCAL [paszkál] francia fizikus, matematikus és filozófus, 1623–1662) fejezi ki, amely szerint ***a nyomás a folyadékokban egyenletesen terjed*, azaz *a folyadékra gyakorolt külső nyomásból származó nyomás a folyadék belsejében és határfelületén minden irányban ugyanakkora.***

3. Hidrosztatikai nyomás

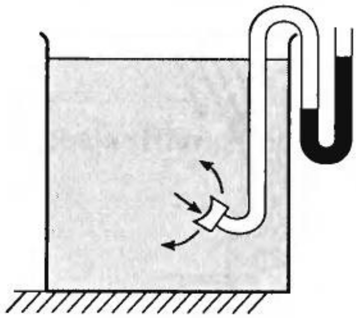
Eddig csak a külső nyomás terjedésével foglalkoztunk. Nem vettük figyelembe, hogy a folyadéknak súlya van, s ezért az egyes folyadékrétegek nyomják az alattuk levőket. Ennek következtében a folyadék kissé összenyomódik, aminek eredményeként a folyadékban feszültség, azaz nyomás ébred. Ezt a folyadék súlyából származó nyomást *hidrosztatikai nyomásnak* nevezzük. Egyszerűen beláthatjuk, hogy *a hidrosztatikai nyomás egyenesen arányos a felszíntől mért mélységgel és a folyadék sűrűségével.*

A **32.3. ábrán** látható, folyadékkal telt edényben a felszíntől h mélységben A keresztmetszetű felületelemet választottunk ki. A felette levő folyadékoszlop súlya $G = Ah\rho g$, az ebből származó nyomás pedig

$$\boxed{p = h\rho g}. \qquad (32.3)$$



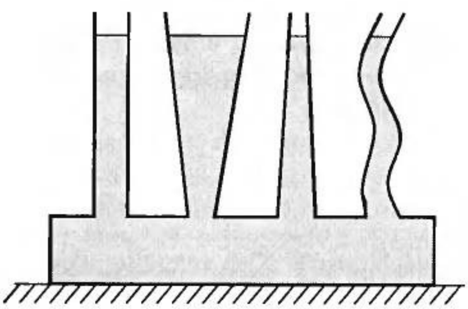
32.3. ábra



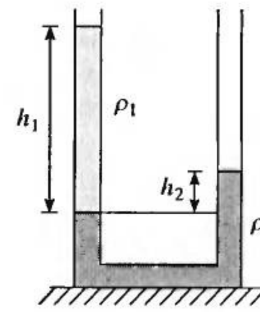
32.4. ábra

A hidrosztatikai nyomásra kapott (32.3) alatti eredmény a kísérletek tanúsága és elméleti megfontolás szerint is általánosan érvényes, a folyadék súlyából származó nyomás független a folyadékba helyezett felületelem irányításától. Ezt a **32.4. ábrán** látható kísérleti összeállítással igazolhatjuk. A vízbe tett gumimembrános szelencéhez gumicsővel összekötött nyomásjelző csatlakozik. Adott mélységben a nyomásmérő állandó nyomást mutat, függetlenül a membrán felületének irányításától (a nyomás izotropiája). Attól függően, hogy a nyomást az edény aljára vagy oldalára számítjuk, beszélhetünk fenék-, illetve oldalnyomásról.

Az egymáshoz folyadékkal csatlakozó edényeket *közlekedőedényeknek* nevezzük. Amint a **32.5. ábra** mutatja, a homogén folyadék a közlekedőedény minden szárában azonos magasságban helyezkedik el.



32.5. ábra



32. 6. ábra

Nem keveredő folyadék esetén a közös szinttől mért hidrosztatikai nyomások egyenlők:

$$h_1 \rho_1 g = h_2 \rho_2 g, \tag{32.4}$$

vagyis az érintkezési felülettől mért folyadékmagasságok a sűrűséggel fordítottan arányosak (**32.6. ábra**). A közlekedőedények elvét alkalmazzák többek között az építkezéseknél használt gumicsöves vízszintezők készítésekor, víztornyok és vízvezetékek tervezésekor, nyomásmérésnél stb.

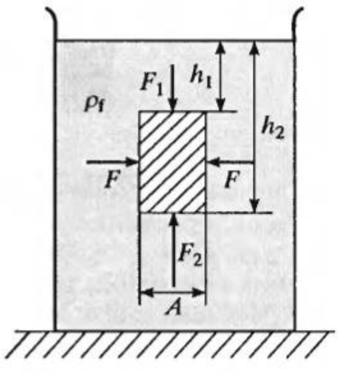
Ha a folyadékra p_0 külső nyomás – például légnyomás – is hat, akkor a ρ sűrűségű folyadékban, h mélységben az össznyomás:

$$\boxed{p = p_0 + h\rho g}\,. \tag{32.5}$$

A közlekedőedények száraiban a nyomást természetesen ez a nyomásösszeg adja. Amennyiben azonban a szárakban ható külső nyomás azonos, akkor elegendő a hidrosztatikai nyomást figyelembe venni.

4. Az Arkhimédész-törvény

Hétköznapi tapasztalat, hogy a folyadékba merített testet kisebb erővel tarthatjuk, mint amikor a test nincsen folyadékban; vagy az, hogy a folyadékba tett test el sem merül. Ez a sok ezer éves megfigyelés az alapja az úszásnak, a hajózásnak és sok más gyakorlati alkalmazásnak. Ezeket a jelenségeket azzal magyarázzuk, hogy a folyadékba merülő testekre felhajtóerő hat. A felhajtóerőt akár mérőkísérlettel, akár elméleti megfontolásokon alapuló számításokkal is meghatározhatjuk.



32.7. ábra

Először egyszerű alakú testre számítjuk ki a felhajtóerőt. A **32.7. ábra** szerint A keresztmetszetű, h magasságú egyenes henger merül ρ_f sűrűségű folyadékba. A hidrosztatikai nyomás miatt a folyadék erőt fejt ki a henger lapjaira és a palástra. Az oldalirányú erők eredője nulla, az alsó és a felső lapra ható erők különbsége pedig

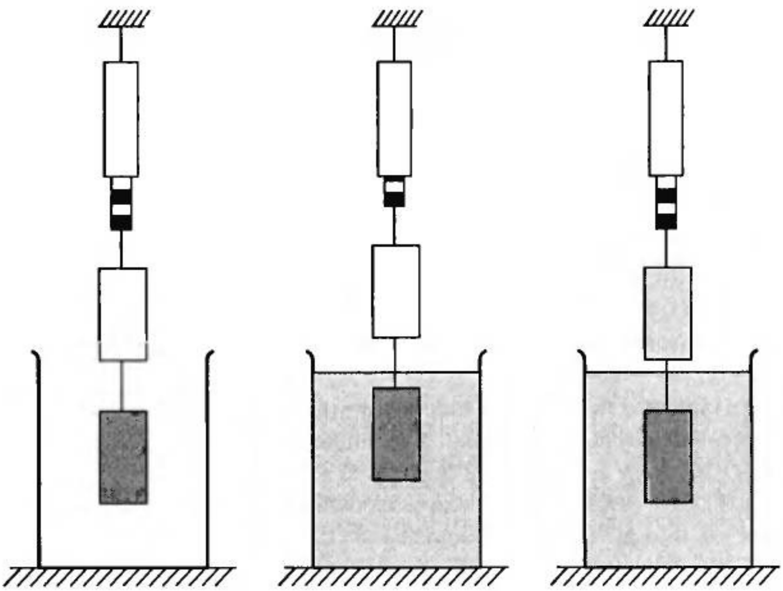
$$F_f = F_2 - F_1 = h_2\rho_f gA - h_1\rho_f gA = (h_2 - h_1)\rho_f gA. \tag{32.6}$$

Mivel $h_2 - h_1 = h$ a henger magassága és $V_t = hA$ a test térfogata, a felfelé ható eredő erő, vagyis a *felhajtóerő:*

$$\boxed{F_f = V_t\rho_f g}\,. \tag{32.7}$$

Eredményünk szerint a folyadékba merülő hengerre felhajtóerő hat, ami megegyezik a henger által kiszorított folyadék súlyával. A törvény nemcsak erre az esetre, hanem általánosan is igaz, azaz ***bármely folyadékba merülő testre a test által kiszorított folyadék súlyával megegyező felhajtóerő hat.*** Ezt a törvényt, amely a hidrosztatikai nyomás egyenes következménye, ***Arkhimédész törvényének*** nevezzük. (ARKHIMÉDÉSZ görög matematikus és fizikus, i. e. 287–212.)

Kísérletileg az Arkhimédész-törvényt pl. a **32.8. ábrán** látható összeállítással igazolhatjuk. Az ábrán dinamométerre akasztott üres henger és vele egyenlő térfogatú tömör henger látható. A tömör hengert folyadékba merítjük és megmérjük az erőcsökkenést. Ha az üres

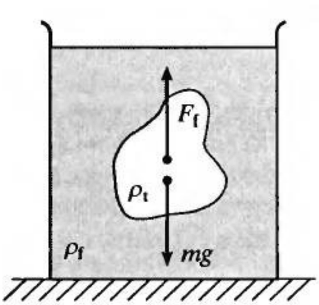


32.8. ábra

hengert a kísérletben használt folyadékkal színültig töltjük, a dinamométer ismét akkora erőt jelez, mint amikor a tömör henger még nem merült folyadékba, azaz az erő csökkenése egyenlő a kiszorított folyadék súlyával.

5. A testek úszása

Attól függően, hogy a testre ható nehézségi erő és a felhajtóerő közül melyik a nagyobb, a test lemerül vagy emelkedik a folyadékban. Ha a felhajtóerő nagyobb, mint az mg nehézségi erő, akkor a felemelkedő test úgy kerül egyensúlyba, hogy a folyadékba részben bemerülve úszik. Ha a két erő eredője teljes elmerülés esetén nulla, a test lebeg.



32.9. ábra

A **32.9. ábra** alapján az erők eredőjére vonatkozóan három esetet különböztethetünk meg. Ha a test sűrűsége $\rho_t > \rho_f$, akkor az eredő erő:

$$F_e = V_t(\rho_t - \rho_f)g > 0, \qquad (32.8)$$

a test *lemerül*. Ha $\rho_t = \rho_f$, akkor $F_e = 0$, a test *lebeg*, ha pedig $\rho_t < \rho_f$, akkor a test felemelkedik és olyan egyensúlyi helyzet alakul ki, hogy a test a folyadékba részben belemerülve *úszik*. Az utóbbi két esetben a testre ható nehézségi erő egyenlő a test által kiszorított folyadék súlyával. Az úszás esetén az egyensúly feltétele:

$$V_t\rho_t = V_f\rho_f, \tag{32.9}$$

ahol V_f a test folyadékba merülő részének térfogatát jelenti. A (32.9) összefüggésből

$$\frac{V_f}{V_t} = \frac{\rho_t}{\rho_f}, \tag{32.10}$$

azaz folyadékban úszó tömör test térfogatának annyiad része merül a folyadékba, ahányad része a test sűrűsége a folyadék sűrűségének (pl. az úszó jég térfogatának kb. 0,9 része merül a vízbe).

Ahhoz, hogy a test úszása stabilis legyen, a testre ható nehézségi erő és felhajtóerő egyenlőségén túl annak is teljesülnie kell, hogy kis kibillenés esetén a két erő visszatérítő forgatónyomatékot fejtsen ki a testre.

6. Sűrűségmérés

a) Szilárd testek sűrűségét egyszerűen meghatározhatjuk a következő eljárással. Ha rugós erőmérőre m tömegű testet akasztunk, akkor a dinamométer vákuumban (gyakorlatilag levegőben is) mg, a test folyadékba (pl. vízbe) merítésekor pedig F erőt jelez, amelyekkel a V térfogatú testre ható felhajtóerő:

$$F_f = \rho_f V g = mg - F, \tag{32.11}$$

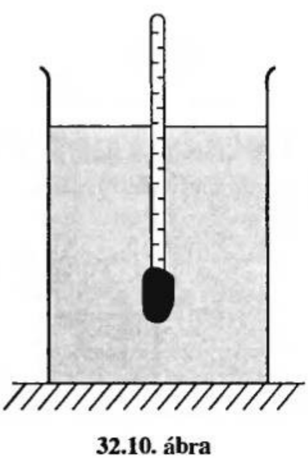
a test térfogata pedig

$$V = \frac{mg - F}{\rho_f g}. \tag{32.12}$$

Ezek alapján a szilárd test sűrűsége:

$$\rho_t = \frac{m}{V} = \frac{mg}{mg - F}\rho_f. \tag{32.13}$$

b) Folyadékok sűrűségét szintén Arkhimédész törvénye alapján mérhetjük meg. Dinamométerrel megmérjük egy tetszőleges V térfogatú szilárd test súlyát. Ez levegőben megegyezik a testre ható mg nehézségi erővel. Ezután a testet a keresett ρ_f sűrűségű folyadékba merítjük és leolvassuk, hogy mekkora F értéket mutat az erőmérő. Ugyanilyen mérést végzünk úgy, hogy a test ismert ρ_0 sűrűségű folyadékba merül. Az erőmérőről ekkor leolvasott érték legyen F_0. Arkhimédész törvénye szerint $mg - F = V\rho_f g$ és $mg - F_0 = V\rho_0 g$. E két összefüggésből az ismeretlen sűrűség:



32.10. ábra

$$\rho_f = \frac{mg - F}{mg - F_0}\rho_0. \tag{32.14}$$

c) Az úszó testek attól függő mértékben merülnek be a folyadékba, hogy átlagos sűrűségük hányad része a folyadék sűrűségének. Ezen az elven működnek az ismert sűrűségű folyadékkal kalibrált, alul nehezékkel ellátott úszó sűrűségmérők, az *areométerek* (**32.10. ábra**). Az areométereket olyan skálával látják el, hogy ha folyadékba merítjük őket, akkor a folyadékszinttel egybeeső skálaérték éppen a folyadék sűrűségét adja. (Hasonlóan működnek egyes cukortartalom, alkoholfok és zsírtartalom mérésére szolgáló eszközök is.)

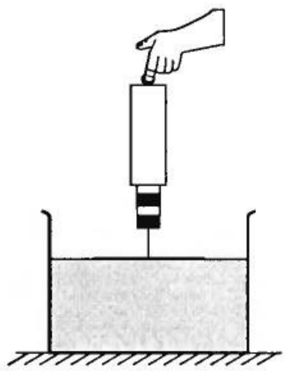
33. § Molekuláris erők folyadékokban

1. Kohéziós és adhéziós erők

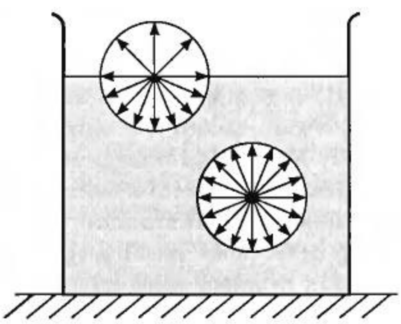
A szakítási kísérletek azt bizonyítják, hogy térfogatnöveléskor a folyadékrészek között vonzóerő hat. A **33.1. ábrán** vázolt kísérletben tiszta üveglapot szakítottunk el víz felszínéről. Az ehhez szükséges erőt érzékeny dinamométerrel mérhetjük. Elszakítás után a lapon vízcseppek maradnak, vagyis folyadékrészek szakadnak el egymástól. A dinamométer az egynemű részek között fellépő összetartó erőt, az ún. *kohéziós erőt* méri. Ha ezt a kísérletet víz helyett higannyal végezzük, ismét jól mérhető erő szükséges az üveglap leválasztásához. Ekkor azonban az üveglap száraz marad; a dinamométer most a higany és az üveg közötti erőt jelzi. Az ilyen, különböző minőségű anyagok közötti vonzóerőt *adhéziós erőnek* nevezzük.

2. Jelenségek a folyadék felszínén

Alumíniumérme, borotvapenge, varrótű úszik a vízen, ha óvatosan tesszük a felszínre. Az úszó fémtestek alatt és környékén a felszín rugalmas hártyaként behorpad. Ez a jelenség, hogy a víz megtartja a nála többszörösen nagyobb sűrűségű testeket, nem magyarázható az



33.1. ábra



33.2. ábra

úszás feltételéről tanult ismereteinkkel. Ha a fémdarabokat élükkel tesszük a vízre, elmerülnek. Azt mondhatjuk, hogy mintegy átszakították a felszíni, rugalmas hártyát. Ennek a hártyának a folyadék belsejétől eltérő tulajdonságait a molekulák közötti erőkkel magyarázhatjuk. A folyadék belsejében kiválasztott folyadékrészre a szomszédos molekulák gömbszimmetrikusan hatnak, a felszín közelében levő molekulák körül viszont a hatásgömbön belül levő szomszédos molekulák eloszlása nem egyenletes (**33.2. ábra**).

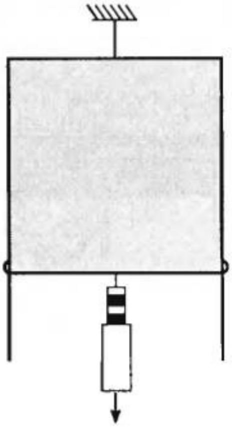
3. A felületi feszültség

A folyadékhártyákban ható erőket legkönnyebben az ún. „szappanhártyás" kísérletekkel tanulmányozhatjuk. Folyékony mosószerből drótkeretben nagyméretű, tartós hártyák feszíthetők ki. Ezek a hártyák sokkal vastagabbak a felületi rétegnél, így mindegyiküknek két felületi rétege van. Mégis, az ilyen drótkeretekre feszített hártyák esetén, a felületi réteg viselkedése meghatározó a tömbfolyadékhoz képest.

A **33.3. ábrán** mozgatható oldalú, téglalap alakú drótkeret látható. Ha a keretet szappanoldatba mártjuk és hártyát feszítünk rá, akkor a folyadékhártya a mozgatható oldalt felrántva összehúzódik. Finom mérőkísérletek bizonyítják, hogy a mozgatható drótot a hártya területétől függetlenül, adott erővel tarthatjuk egyensúlyban. Különböző hosszúságú huzaldarabokra ható erők mérése alapján kiderült, hogy a folyadékhártya által kifejtett erő egyenesen arányos a vonaldarab hosszával. A drótkeret l hosszúságú darabjára ható erő:

$$\boxed{F = \sigma 2l}\,. \qquad (33.1)$$

(A 2-es szorzó azért szerepel, mert ebben a kísérletben a hártyának két felszíne van.) A folyadékfelszínnek ezt a tulajdonságát a σ arányossági együtthatóval, az ún. *felületi feszültséggel* jellemezzük. Dimenziója az erő dimenziójának (ML/T^2) és a hosszúság dimenziójának (L) a hányadosa, vagyis M/T^2. SI-egysége: N/m.

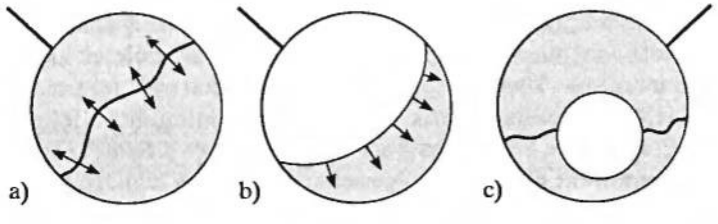


33.3. ábra

A felületi feszültség mindig a határfelület mentén érintkező két anyagra jellemző érték.

A felületi feszültségből származó erők természetesen nemcsak a hártyák határvonalán, hanem a hártya belsejében levő minden vonaldarabra is hatnak. Ezt mutatják a következő kísérletek.

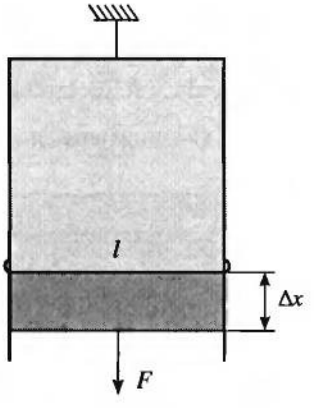
A **33.4. ábrán** látható drótkeretekre cérnát kötöttünk. A **33.4/a. ábrán** a cérna a síkhártyában lazán helyezkedik el; minden darabjára mindkét oldalról a hártya síkjában egyenlő



33.4. ábra

erő hat. A **33.4/b. ábra** azt az esetet mutatja, amikor az egyik hártyát kilyukasztottuk; a megmaradt hártya összehúzódik, és a cérnát a kényszer által megengedett mértékben, ívben feszíti ki. A **33.4/c. ábrán** a cérnán levő hurok kör alakúra feszül, mert a közbülső hártyát hurkapálcával kilyukasztottuk. Ezek a kísérletek azt igazolják, hogy a felületi feszültségekből származó erő minden vonaldarabra hat, hatásvonala benne van a hártya síkjában és merőleges az elemi vonaldarabra.

4. A felületi feszültség energetikai értelmezése



33.5. ábra

Amikor a hártya felszínét megnöveljük, munkát végzünk (**33.5. ábra**). Az l hosszúságú vonaldarab Δx elmozdulásakor végzett elemi munka

$$\Delta W = F\Delta x = \sigma 2l\Delta x = \sigma\Delta A. \tag{33.2}$$

Eredményünk szerint a munka egyenesen arányos a felület növekedésével, ΔA-val. Ezzel a munkával a felület potenciális energiáját növeltük. A (33.2) összefüggés alapján a σ felületi feszültségnek energetikai értelmezést adhatunk:

$$\boxed{\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{\Delta E_p}{\Delta A}}. \tag{33.3}$$

Eszerint a felületi feszültség számértéke egyenlő a határfelület egységnyi területtel történő megnöveléséhez szükséges munkával, pontosan ennyivel növekedik a felület potenciális energiája. A (33.3) formula szerint a felületi feszültség dimenziója az energia dimenziójának (ML^2/T^2) és a felület dimenziójának (L^2) a hányadosa, vagyis M/T^2. SI-egysége: J/m^2 ($=N/m$).

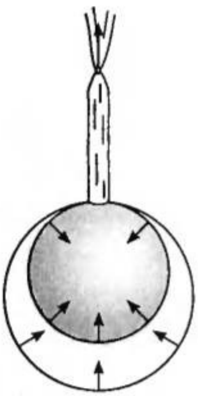
5. A felületi feszültség és az energiaminimum-elv

A folyadékhártyákkal végzett kísérletek során láttuk, hogy a kifeszített hártya a mozgatható oldalú keretben összehúzódik. A laza cérnahurok kifeszül, ha a belsejében levő hártyát kiszúrjuk, mert a környező hártya összehúzódik.

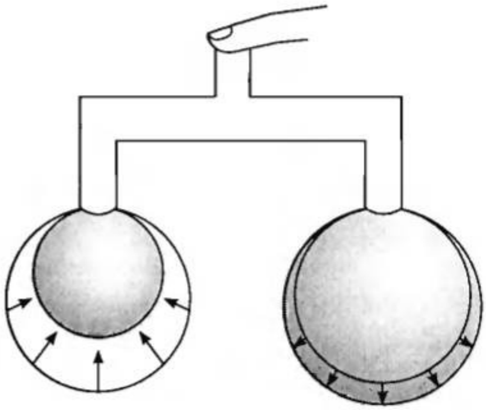
A kísérletek azt mutatják, hogy a folyadékhártya akkor van egyensúlyban, amikor a felszíne a kényszer adta feltételek mellett minimális. A minimálfelületek kialakulása a potenciális energiaminimum-elv következménye. A folyadékhártyák felületének változásával többnyire csak a felületi energia változik. Így az energiaminimumot a felületi energia minimuma szabja meg. A felületi energia nagysága pedig arányos a felület nagyságával. Természetesen amennyiben adott hártya kialakulásakor nemcsak a felületi, hanem pl. a helyzeti energia is változik, akkor az energiaminimum számításakor azt is figyelembe kell venni.

6. A görbületi nyomás

Az üvegcsővel fújt szappanbuborék összehúzódik, majd eltűnik, ha a cső másik végét nem zárjuk el. A buborékba fújt cigarettafüst nagy sebességgel áramlik ki a csövön (**33.6. ábra**), s annál nagyobb a sebesség, minél kisebb a buborék sugara. Amikor a buborék összehúzódott és a cső nyílásának megfelelő síkhártya lett belőle, a csőben maradt füst rendezett kiáramlása megszűnik. A jelenség tökéletesen érthető az energiaminimum-elv alapján, hiszen a hártya felülete az összehúzódás során minimálisra csökkent. A füst határozott kiáramlása azt igazolja, hogy a folyadékbuborékokban a külső nyomáshoz viszonyítva többletnyomás van; ez préseli ki a szabad nyíláson át a füstöt és a levegőt.



33.6. ábra



33.7. ábra

A **33.7. ábrán** látható kísérlet azt mutatja, hogy a zárt kettős nyílású cső két végén levő buborékok közül a kisebb sugarú összehúzódik, miközben a nagyobb sugarú tovább nő. Kisebb görbületi sugarú folyadékhártya többletnyomása, vagy más szóval görbületi nyomása tehát nagyobb.

A gömb alakú folyadékhártya görbületi nyomása pl. a munkatétellel határozható meg. Jelöljük az R sugarú gömb belsejében uralkodó többletnyomást p_g-vel. Növeljük meg a hártyagömb sugarát ΔR-rel! Ehhez

$$\Delta W = p_g A \Delta R \tag{33.4}$$

munkát kell végeznünk, ahol A a gömb felszíne. Ez a munka a hártya potenciális energiáját növeli, amelynek növekedése egyenesen arányos a felületnövekedéssel:

$$\Delta E_p = \sigma \Delta A . \tag{33.5}$$

A gömb $4R^2\pi$ felületének felhasználásával és figyelembe véve, hogy a hártyának most is két felszíne van, a (33.4) munka és a (33.5) energianövekmény egyenlőségét így írhatjuk:

$$p_g 4R^2 \pi \Delta R = \sigma \cdot 2 \cdot 4\pi[(R+\Delta R)^2 - R^2]. \qquad (33.6)$$

A műveletek elvégzése után és a ΔR-ben másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolásával a gömbhártya görbületi nyomására az alábbi eredményt kapjuk:

$$\boxed{p_g = \frac{4\sigma}{R}}. \qquad (33.7)$$

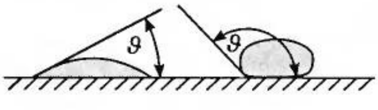
Egyszeres felszínű hártya esetén – ilyen pl. a vízcsepp felszíne – a görbületi nyomás:

$$p_g = \frac{2\sigma}{R}. \qquad (33.8)$$

A görbületi nyomás tehát fordítottan arányos a gömb sugarával.

7. Kapilláris jelenségek

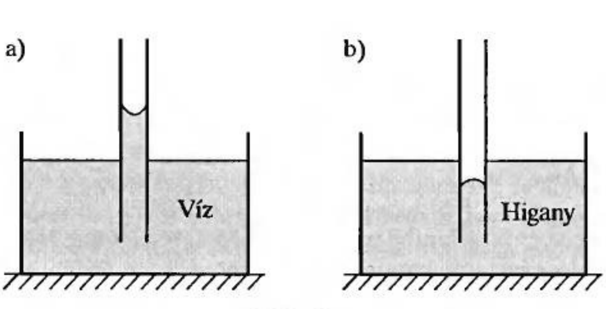
A tiszta üveglapra cseppentett víz szétterül, az üvegen levő higanycsepp viszont majdnem gömb alakú. Vékony csőben, kapillárisban a folyadék felszíne szemmel láthatóan görbült a cső fala mentén.



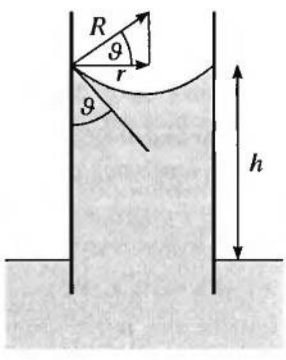
33.8. ábra

A **33.8. ábrán** jelölt ϑ szöget *illeszkedési szögnek* nevezzük. A ϑ szög az üvegfelület és a cseppfelszín, illetve a kapilláris alkotójának és a folyadékfelszín érintőjének a szöge. $\vartheta < 90°$ esetén nedvesítő, $\vartheta > 90°$ esetén nem nedvesítő folyadékról beszélünk.

A vékony csövekben megfigyelhető kapilláris jelenségeket is a felületi feszültségre vezethetjük vissza. A kapillárisban a folyadék szintje magasabb, ill. alacsonyabb attól függően, hogy a felszín homorú, vagy domború (**33.9. ábra**). Kapilláris csőben a felületi feszültség görbült felszínt hoz létre, s az ezzel járó görbületi nyomás miatt a folyadékszint addig emelkedik, illetve süllyed az edénybeli szinthez képest, amíg a szintkülönbségnek megfelelő hidrosztatikai nyomás a görbületi többletnyomással egyenlő nem lesz.



33.9. ábra



33.10. ábra

A **33.10. ábra** alapján az egyensúlyra a következő feltételt írhatjuk fel: az r sugarú kapillárisban R sugarú gömbfelülettel helyettesíthető folyadékfelszín alakul ki, így a görbületi nyomás:

$$p_g = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{r}. \tag{33.9}$$

A többletnyomásból származó erő nedvesítő folyadék esetén felfelé, nem nedvesítő folyadék esetén lefelé mutat. A többletnyomással a h magasságú folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása tart egyensúlyt:

$$h\rho g = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{r}. \tag{33.10}$$

Ebből a kapilláris emelkedésre (süllyedésre)

$$\boxed{h = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{r\rho g}} \tag{33.11}$$

adódik. Az összefüggésből látszik, hogy a kapilláris emelkedés, illetve süllyedés fordítottan arányos a kapilláris cső sugarával.

A kapilláris jelenségekre sok természetbeni és gyakorlati példát sorolhatunk fel: ilyen pl. a hajszálcsövesség, amely a talaj nedvességtartalmában játszik fontos szerepet; a folyadékok felszívódása szivacsos anyagokban stb.

A kapilláris emelkedés és az illeszkedési szög mérésével a felületi feszültség a (33.11) összefüggésből adódó

$$\sigma = \frac{hr\rho g}{2\cos\vartheta} \tag{33.12}$$

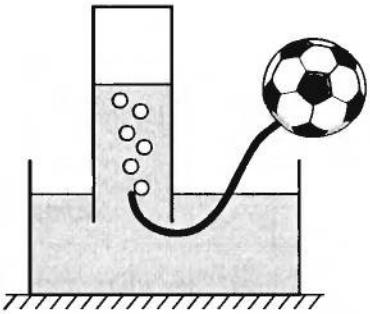
képlettel határozható meg. A mérést az illeszkedési szög méréséből adódó bizonytalanság miatt általában vizes oldat és víz relatív felületi feszültségének meghatározására szokás alkalmazni. Ez ugyanis megegyezik a két folyadék emelkedési magasságának hányadosával. Ebben az esetben nincsen szükség az illeszkedési szög meghatározására.

34. § Nyugvó gázok mechanikája (Aerosztatika)

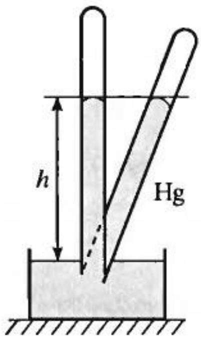
A gázok kitöltik a rendelkezésükre álló teret, ha más hatás ezt nem akadályozza meg. Pl. a Földünket övező levegő azért nem tölti ki az egész világűrt, mert a Föld gravitációs ereje hat rá. Mindennapos tapasztalat, hogy gázban a nyomás minden irányban gyengítetlenül terjed, tehát Pascal törvénye gázokra is érvényes. Zárt edényben levő gáz nyomását mindenütt egyenlőnek találjuk. A gáztér belsejében és az edény falán a rendezetlen mozgást végző gázrészek rugalmasan ütköznek, és a nagyszámú ütközéssel járó impulzuscsere időben állandó erőt, illetve nyomást eredményez a gáztér minden részében, amennyiben a külső körülmények (pl. a hőmérséklet, az edény térfogata stb.) nem változnak.

1. A levegő súlya és sűrűsége

Zárt edényben levő levegő súlyát közönséges táramérlegen is megmérhetjük pl. úgy, hogy megmérjük egy felfújt futball-labda súlyát, majd a benne levő levegőt kiengedjük és vízzel telt, nyílásával vízbe merülő mérőhengerben felfogjuk (**34.1. ábra**). Ezután ismét megmérjük a labda súlyát. A kísérletből a mérőhengerbeli levegő súlya, ill. tömege és sűrűsége meghatározható. Pontos mérések szerint 0 °C hőmérsékleten és 101 325 Pa normális légköri nyomáson a *levegő sűrűsége:* ρ_{lev} = 1,29 kg/m³.



34.1. ábra



34.2. ábra

2. A légnyomás, Torricelli-kísérlet

A levegő súlyából származó nyomás, a *légnyomás* meghatározása Evangelista TORRICELLI (olasz fizikus, 1608–1647) nevéhez fűződik. TORRICELLI körülbelül 1 méter hosszú, egyik végén zárt üvegcsövet higannyal töltött meg, és a csövet, nyitott végét befogva, higannyal töltött edénybe helyezte. Ezután a cső nyílását szabaddá tette. A csőben a higany szintje az edénybeli szinttől mérve körülbelül h = 76 cm magasságban állapodott meg, függetlenül a cső dőlésétől (**34.2. ábra**). A jelenség azzal magyarázható, hogy a csőben levő higanyoszlop súlyából származó nyomással – a közlekedőedények elve szerint – a levegő nyomása tart egyensúlyt. A cső higany feletti zárt terét *Torricelli-űrnek* nevezik.

A légnyomás hatásának demonstrálására mutatta be híres kísérletét Otto GUERICKE (német fizikus, 1602–1686) a magdeburgi féltekékkel. Két jól illeszkedő félgömbből álló tartályból kiszivattyúzta a levegőt, s az emiatt erősen összetapadó félgömböket csak nyolc pár ló tudta széthúzni.

A légnyomásra és a Torricelli-kísérletre alapozva többféle nyomásegységet is bevezettek. Így pl. 1 fizikai atmoszférának (1 atm) nevezzük a 76 cm magas, 0 °C-os higanyoszlop hidrosztatikai nyomását a tengerszint magasságában, a 45. szélességi fokon (ahol g = 9,806 65 m/s²). A $p = h\rho g$ alapján 1 atm (normális légköri nyomás) = 101 325 Pa. További, elsősorban a meteorológiában használt nyomásegység a bar, a millibar (mbar), valamint a hektopascal (hPa) [l. 8. § 2.f)].

3. A légnyomás függése a magasságtól

Mérési eredmények szerint a légnyomás a Föld felszínétől mért magassággal csökken. A légnyomás és a magasság közötti összefüggés meghatározására két egyszerűsítő feltételezéssel élünk, nevezetesen, hogy sem a levegő hőmérséklete, sem a nehézségi gyorsulás nem változik.

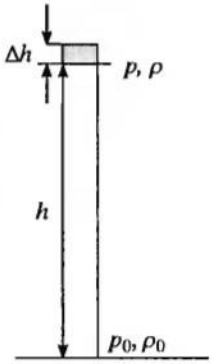
Legyen a Föld felszínén mért nyomás, illetve sűrűség p_0, illetve ρ_0, h magasságban p, illetve ρ (**34.3. ábra**).

Ha h magasságban Δh-val feljebb megyünk, akkor a nyomás változása

$$\Delta p = -g\rho\Delta h. \tag{34.1}$$

(A negatív előjel azt fejezi ki, hogy növekvő magassághoz kisebb nyomás tartozik.) Feltevésünk szerint a hőmérséklet állandó, tehát a (43.25) Boyle–Mariotte-törvény szerint

$$pV = p_0V_0, \tag{34.2}$$



34.3. ábra

illetve az m tömeggel való osztás után, továbbá figyelembe véve, hogy $m/V = \rho$ és $m/V_0 = \rho_0$,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}. \tag{34.3}$$

A (34.3) formulából fejezzük ki ρ-t, és helyettesítsük be a (34.1) összefüggésbe:

$$\Delta p = -p\frac{\rho_0}{p_0}g\Delta h. \tag{34.4}$$

Átalakítás után

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\frac{\rho_0}{p_0}gp, \tag{34.5}$$

ami határesetben a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\frac{\rho_0}{p_0}gp \tag{34.6}$$

differenciálegyenletbe megy át. A differenciálegyenlet megoldása:

$$\boxed{p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh}}. \tag{34.7}$$

Ezt az összefüggést *barometrikus magasságképletnek* nevezzük. Hasonló alakú a sűrűség–magasság függvény is:

$$\boxed{\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh}}. \tag{34.8}$$

Eredményünk szerint a légnyomás és a levegő sűrűsége a magassággal exponenciálisan csökken. (A földfelszín közelében a nyomás kb. 10 méterenként csökken 133 Pa-lal.) A légnyomás változását érzékeljük a hegyről lefelé haladó járműben, süllyedő repülőgépen stb.

A (34.7) képletből leolvasható, hogy a nagyobb sűrűségű gáz nyomása erősebben csökken a magassággal, mint a kisebb sűrűségűé. Ezzel magyarázható a kéményekben létrejövő huzat. A kéményben levő melegebb levegő sűrűsége kisebb, mint a külső hidegé, ezért a kémény magasságához kívül nagyobb nyomáscsökkenés tartozik, mint belül. Hasonlóképpen, amikor a hálózati gáz nyomása csökken, akkor a gázkészülékek működésében azért okoz először a földszinten zavart, s csak később a magasabb emeleteken, mert a gáz sűrűsége kisebb, mint a külső levegőé.

4. Felhajtóerő gázokban

A magassággal változó aerosztatikai nyomásnak a következménye a gázokban is tapasztalható felhajtóerő. A folyadékokban keletkező felhajtóerőre vonatkozó gondolatmenethez hasonló módon kimutatható, hogy a gázokban is van felhajtóerő, ami egyenlő a test által kiszorított gáz súlyával. Ezt a felhajtóerőt használják ki többek között léggömbök, léghajók, meteorológiai szondák felengedésekor.

Pontos méréskor a különböző méretű testekre ható különböző nagyságú felhajtóerőt is figyelembe kell venni. Ezt a számítást nevezik légüres térre való redukálásnak.

I. D) 3. FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK ÁRAMLÁSA (HIDRO- ÉS AERODINAMIKA)

35. § Ideális folyadékok áramlása

1. Az áramlás leírása

a) Bevezetés

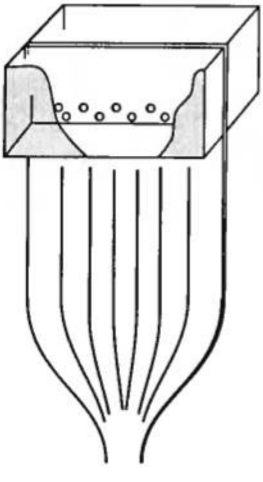
A folyadékok és gázok mozgásának, áramlásának leírásakor az anyagot a szilárd testekhez hasonlóan folytonosnak, kontinuumnak tekintjük. A mozgás dinamikai leírására most is a Newton-törvényeket, ill. a belőlük levezethető további tételeket, az energiatételt és a munkatételt használjuk.

A megszokott törvények alkalmazása azonban nem egyszerű, mert a folyadék részecskéinek egymáshoz viszonyított helyzetére vonatkozóan nem léteznek olyan szigorú összefüggések, mint például a merev test esetén, ezért a folyadék egészére nem adható olyan egységes leírás, mint a szilárd testekre.

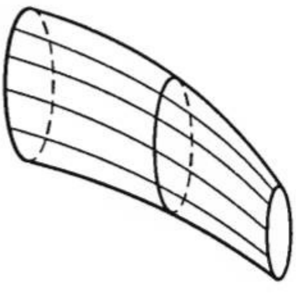
A gázok és a folyadékok közötti további különbséget jelent az, hogy a folyadékok lényegében összenyomhatatlanok, a gázok viszont nagymértékben összenyomhatóak. Ezért a kétféle anyag mozgása csak addig tárgyalható együtt, amíg az áramlás során a gáz jelentős összenyomódást nem szenved. Ez addig teljesül, amíg az áramlási sebesség sokkal kisebb a hang közegbeli terjedési sebességénél.

Az áramlás szemléltetésére bevezették az *áramvonal* fogalmát. *Az áramvonal olyan görbe, amelynek bármely pontjában húzott érintő az illető pontbeli sebességvektor egyenese.* Áramvonalrendszert demonstrál a Pohl-féle áramlási készülékkel végzett kísérlet (**35.1. ábra**). Két, egymástól fallal elválasztott tartályból tiszta víz és színes folyadék áramlik fésűfogszerű lyuksoron át két, egymáshoz közeli párhuzamos üveglappal határolt áramlási térbe. A kétféle folyadék nem keveredik össze, hanem *áramfonalakban* (vékony „folyadékcsövekben") áramlik a párhuzamos lemezek között. Az áramfonal vastagság nélküli, geometriai vonalnak megfelelő határesete az *áramvonal.*

Ha az áramlási térben gondolatban felvett zárt görbe pontjain átmenő áramvonalak összességét vesszük, úgynevezett *áramlási-* vagy *áramcsövet* kapunk (**35.2. ábra**). Az áramcső falának „alkotói" áramvonalak; emiatt a falon át nem folyik folyadék a csőbe és a csőből sem léphet ki, mert a falban áramló részek sebessége érintőirányú.



35.1. ábra



35.2. ábra

b) Az áramlások osztályozása

Az áramlásokat többféle szempont szerint osztályozhatjuk.

Súrlódásmentes, illetve *súrlódásos áramlásról* beszélünk attól függően, hogy elhanyagolhatók-e a folyadékrészek mozgása során fellépő nyíróerők vagy nem. Súrlódásmentes áramláson belül *örvénymentes* és *örvényes áramlást* különböztetünk meg.

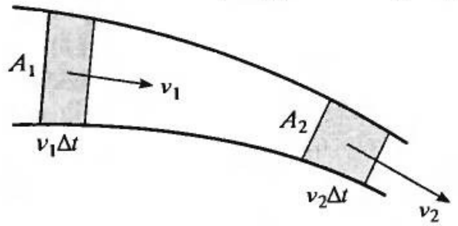
Örvényes áramlásban a folyadékrészek forgómozgást is végeznek. Súrlódó folyadékok mozgása során *lamináris (réteges)* és *turbulens (kavargó) áramlás* valósulhat meg. Az előzőektől függetlenül az áramlás lehet *stacionárius* vagy *nem-stacionárius.*

Stacionárius az áramlás, ha a sebességtér független az időtől, azaz ha adott helyen a sebesség állandó. Másként fogalmazva: ha a $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$ függvények csak a helytől függenek, vagyis ha a független változók között nem szerepel az idő. Ilyen áramlás esetén a pályavonalak megegyeznek az áramvonalakkal.

A következőkben csak az összenyomhatatlan folyadék stacionárius és örvénymentes áramlásával foglalkozunk.

2. Kontinuitási egyenlet

Stacionárius áramlásban bármely áramlási cső tetszőleges keresztmetszetén adott idő alatt egyenlő tömegű és az összenyomhatatlanság miatt egyben egyenlő térfogatú folyadék áramlik át. Ahhoz, hogy ezt a megállapítást mennyiségileg is leírhassuk, válasszunk ki az áramlási cső két tetszőleges helyén az áramlási sebességre merőleges A_1 és A_2 keresztmetszetet. A választott helyeken legyen a sebesség v_1, illetve v_2. A megfigyelés időtartama legyen Δt (**35.3. ábra**).



35.3. ábra

Az előbb mondottak szerint

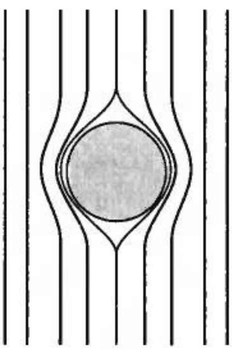
$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t, \tag{35.1}$$

illetve

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}, \tag{35.2}$$

ahonnan

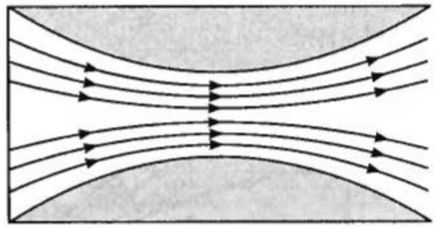
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}. \tag{35.3}$$



35.4. ábra

Eredményünk szerint tehát az áramlási cső különböző keresztmetszeteiben az áramlási sebességek fordítottan arányosak a keresztmetszetekkel. A (35.2) összefüggés a ***folytonossági*** vagy ***kontinuitási egyenlet,*** amelyből kiolvasható az összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására vonatkozóan, hogy szűkületben a sebesség nagyobb. Nagyobb sebességű helyekhez a kísérletek tanúsága szerint sűrűbb áramvonalrendszer tartozik. A **35.4. ábrán** a Pohl-készülékben kapott olyan áramlási kép látható, amikor az üveglemezek közötti áramlási térben akadály van.

A **35.5. ábra** a Levius-féle univerzális áramlási készülékkel megvalósított áramlás sematikus képét mutatja, ahol az áramvonalképpel egyidejűleg az áramlás sebessége is megfigyelhető. A szélesebb tartományból a szűkületbe érkező folyadék felgyorsul, majd ismét az



35.5. ábra

eredeti sebességre lassul le. Az áramvonalak számával a sebesség nagyságát is megadhatjuk úgy, hogy az áramlásra merőleges egységnyi felületen annyi áramvonalat veszünk fel, amennyi azon a helyen a sebesség számértéke. Az áramlásokat az ***áramerősséggel*** (áramintenzitással) jellemezzük. Megállapodás szerint az áramlási cső keresztmetszetén átfolyó ΔV folyadéktérfogat és a Δt áthaladási idő

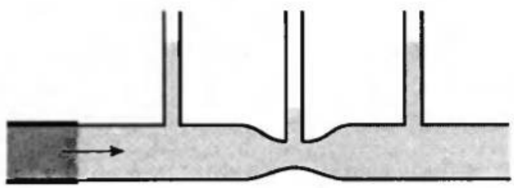
$$\boxed{I = \frac{\Delta V}{\Delta t}} \qquad (35.4)$$

hányadosát ***áramerősségnek*** nevezzük. Mivel Δt idő alatt az áramlási cső kiszemelt keresztmetszetén Δs hosszúságú, ill. $\Delta V = A\Delta s = A\,v\,\Delta t$ térfogatú folyadék áramlik át, így

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A\,v\,\Delta t}{\Delta t} = A\,v\,. \qquad (35.5)$$

A (35.4) alapján az áramerősség dimenziója a térfogat dimenziójának (L^3) és az idő dimenziójának (T) a hányadosa, vagyis L^3/T. SI-egysége: m^3/s.

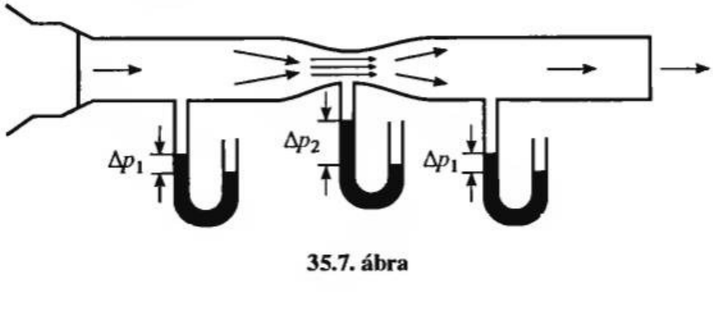
3. A Bernoulli-egyenlet



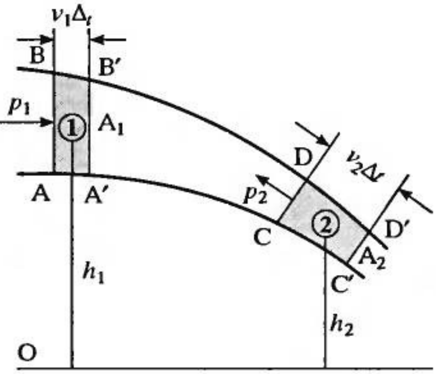
35.6. ábra

Manométerekkel (légnyomásmérőkkel) ellátott üvegcsőben áramló víz (**35.6. ábra**), szélcsatornában áramló levegő (**35.7. ábra**) nyomása a kisebb keresztmetszetű helyeken kisebb, amint ez a manométereken leolvasható.

Az előző pontban láttuk, hogy szűkületben a közeg nagyobb sebességgel áramlik,



35.7. ábra



35.8. ábra

mint a nagyobb keresztmetszetű helyeken. Kísérleti tapasztalatunk szerint tehát az áramlási csőben nagyobb sebességű helyen a nyomás kisebb. Az adott helyen mérhető nyomás és sebesség közötti mennyiségi kapcsolat meghatározására válasszunk ki az áramcsőben egy ABCD folyadékrészt (**35.8. ábra**), amely Δt idő múlva az $A'B'C'D'$ térfogatot foglalja el. Mivel az áramlás stacionárius, az ábrán fehéren hagyott térben semmilyen változás nincs az áramlásban, annak ellenére, hogy ebbe a tartományba más folyadék érkezett. Az egész folyadékrész elmozdulását úgy tárgyalhatjuk, mintha az $ABA'B'$ folyadék, melynek tömege $\Delta m = \rho A_1 v_1 \Delta t$, a $CDC'D'$ térfogatba jutott volna. A munkatétel szerint e folyadékrész mozgási energiájának megváltozása egyenlő a rá ható erők munkájának összegével. Mivel az áramlás súrlódásmentes, a belső erők munkája nulla, ezért csak a nehézségi erő és a p_1, p_2 nyomásokból származó nyomóerők munkáját kell figyelembe vennünk. A nehézségi erő munkája az ábra jelöléseivel:

$$W_1 = \Delta m g(h_1 - h_2) = \rho A_1 v_1 \Delta t\, g(h_1 - h_2), \qquad (35.6)$$

a nyomóerőé pedig

$$W_2 = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t. \qquad (35.7)$$

Figyelembe véve a (35.2) kontinuitási egyenletet, amely szerint az (1) és (2) térfogat egyenlő, azaz $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$, a munkatétel alapján

$$\frac{1}{2}\Delta V \rho v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta V \rho v_1^2 = \Delta V \rho g(h_1 - h_2) + \Delta V(p_1 - p_2). \qquad (35.8)$$

Egyszerűsítés és rendezés után

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (35.9)$$

alakban írható fel. Ezt az összefüggést ***Bernoulli-egyenletnek*** nevezzük. Eszerint összenyomhatatlan folyadék súrlódásmentes, stacionárius áramlása közben bármely áramfonal (vékony áramcső) mentén a

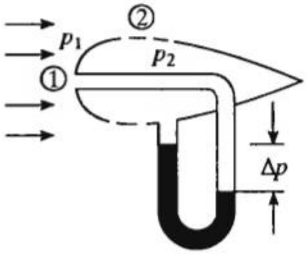
$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{állandó}}\,. \qquad (35.10)$$

(Daniel BERNOULLI [bernuli] svájci matematikus, fizikus, orvos, 1700–1782.)

4. A Bernoulli-törvény alapján működő eszközök

a) A Pitot–Prandtl-cső

Áramló gáz sebességét vagy a benne mozgó test sebességét például a Pitot–Prandtl-csővel mérhetjük meg (**35.9. ábra**). (Henri PITOT [pito] francia vízépítő mérnök, 1695–1771; Ludwig PRANDTL német fizikus, 1875–1953.) Az áramlási térbe helyezett cső ábrán jelzett 1. helyén a sebesség $v_1 = 0$ a torlódás miatt, a nyomás p_1; a 2. helyen v az áramlási sebesség, p_2 az ehhez a sebességhez tartozó nyomás. A manométer bal oldali szára a „cső" üreges részébe nyílik, az üreg pedig a falon levő nyílások miatt kapcsolatban van az áramlási térrel. Bernoulli egyenlete alapján



35.9. ábra

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2, \tag{35.11}$$

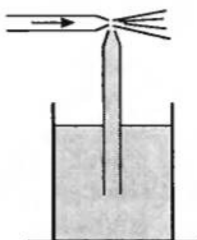
ahonnan a sebesség

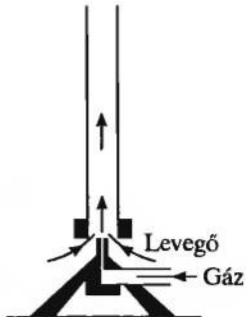
$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}. \tag{35.12}$$

Itt ρ a gáz sűrűsége, $p_1 - p_2 = \Delta p$ a nyomáskülönbség, ami a csőhöz csatlakozó manométeren olvasható le. (A csövet csepp alakúra készítik, hogy a mérőtest az áramlási viszonyokat lehetőleg ne változtassa meg.)

b) Az illatszerszóró és a Bunsen-égő

Sokféle eszköz működik a gyors áramlások környezetében fellépő „szívóhatás" kihasználásával. Az áramló folyadékban (gázban) a nyomás kisebb, mint a környező kisebb sebességű vagy nyugvó közegben, ezért az a kisebb nyomású hely felé áramlik. Ez a hatás érvényesül az illatszerszóróban (**35.10. ábra**) és a Bunsen-égőben (**35.11. ábra**). Az illatszerszóróban a szívóhatás miatt felemelkedő folyadékot a befújt légáram magával ragadja és porlasztja is. A gázégőben áramló gáz a környező levegőt „szívja" be, s viszi magával. A gázzal keveredő levegő a gáz sebességével szabályozhatóan alkot különböző fűtőértékű keveréket.


35.10. ábra



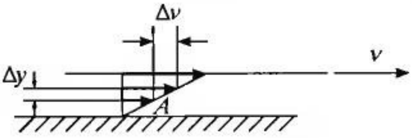
35.11. ábra

36. § Súrlódó folyadékok áramlása

1. Belső súrlódás, a Newton-féle súrlódási törvény

Már szóltunk arról, hogy sűrűn folyó, mézszerű folyadékban sem ébrednek nyíróerők, ha a folyadékrészek egymáshoz viszonyítva nem mozdulnak el. Amikor azonban relatív sebességük nem nulla, a részek közötti belső súrlódási erő sok esetben már nem elhanyagolható.

Párhuzamos lemezek közötti folyadék áramlása során, ha az egyik lemez rögzített, a másik pedig állandó sebességgel mozog (**36.1. ábra**), a folyadékrészek hozzátapadnak az üveglapokhoz, így a felső laphoz tapadó folyadékréteg sebessége a legnagyobb, és az alsó lemez felé haladva a lapokkal párhuzamos folyadékrétegek sebessége csökken. Az alsó lapon levő réteg sebessége nulla. Azt mondjuk, hogy az áramlásra merőleges irányban a sebességnek gradiense van (a sebesség változik a keresztmetszet mentén). Ha az előbbi kísérletben a felső laphoz dinamométert iktatunk, megmérhetjük a belső súrlódási erőt. Praktikusabban megvalósított kísérletek mérési eredményei szerint a belső súrlódási erő egyenesen arányos az egymáson csúszó folyadékrétegek felületének nagyságával és az áramlásra merőleges keresztmetszetben vett egységnyi távolságra eső sebességváltozással:

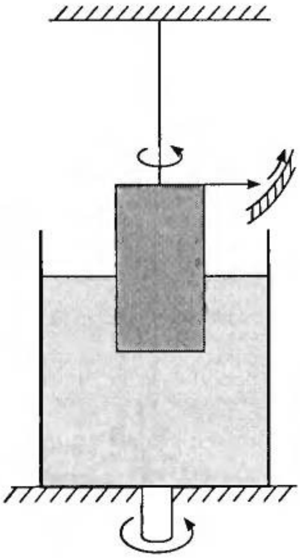


36.1. ábra

$$\boxed{F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y}}. \qquad (36.1)$$

Ezt az összefüggést ***Newton-féle súrlódási törvénynek*** nevezzük. A (36.1) összefüggésben η a folyadék *belső súrlódására*, viszkozitására jellemző *dinamikai viszkozitás*. SI-egysége Pa · s. A formulában $\Delta v/\Delta y$ a sebességgradiens (**36.1. ábra**), A az egymáson elcsúszva áramló rétegek felszínének nagysága.

A viszkozitás mérése pl. *torziós viszkoziméterrel* történhet (**36.2. ábra**). A műszer hengeres edényébe töltik a mérendő folyadékot, s a folyadékba torziós szálon az edénnyel azonos tengelyű hengert lógatnak. A külső hengert gyors forgásba hozzák, emiatt az edénybe töltött folyadék rétegei is forgásba jönnek. A fellépő nyíróerők a belső hengerre is forgatónyomatékot gyakorolnak, s a torziós szál elcsavarodásából kiszámítható a folyadék dinamikai viszkozitása.



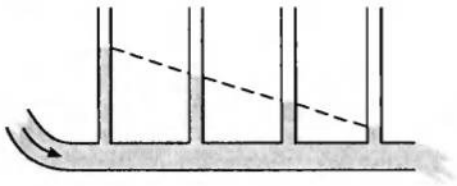
36.2. ábra

2. Sebességeloszlás vékony csőben megvalósított lamináris áramlásban

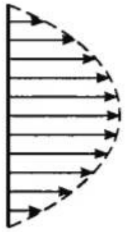
A belső súrlódás miatt a hengeres csőben áramló folyadék rétegei is különböző sebességgel mozognak. A csőfallal érintkező réteg sebessége nulla, a cső közepén mozgóké pedig maximális. Egyszerű kísérlettel megmutatható az is, hogy a vízcsaphoz kötött, manométerekkel ellátott, egyenletes keresztmetszetű üvegcsőben áramló víz nyomása a cső mentén lineárisan csökken a távolsággal (**36.3. ábra**). Ez a jelenség nem magyarázható Bernoulli törvényével, amely szerint az áramlási cső kisebb nyomású helyén a sebesség nagyobb. A nyomáscsökkenés oka a belső súrlódási erő. A cső l hossza menti $p_1 - p_2$ nyomáscsökkenésből származó erő egyensúlyt tart a Newton-féle belső súrlódási erővel. Az eredő erő tehát nulla, a folyadék stacionárius, lamináris áramlást végez. Ezt az erőtani megfontolást felhasználhatjuk arra, hogy meghatározzuk az R sugarú csőben áramló, η dinamikai viszkozitású folyadék sebességeloszlását. A részletes számítások azt adják, hogy a cső szimmetriatengelyétől r távolságban az áramlási sebesség:

$$\boxed{v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2)}. \tag{36.2}$$

Az eredmény mutatja, hogy a stacionárius, lamináris áramlás sebessége a cső középpontjától mért távolsággal négyzetesen csökken a cső fala felé, azaz a sebességprofil parabolikus (**36.4. ábra**).



36.3. ábra



36.4. ábra

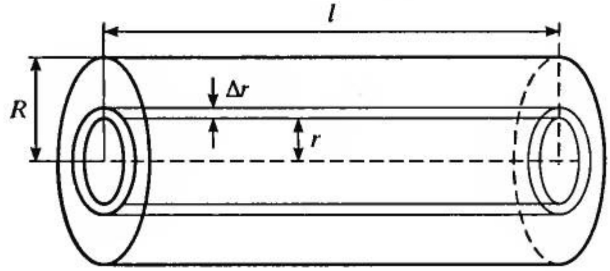
3. A Hagen—Poiseuille-törvény

A (36.2) sebességeloszlás felhasználásával meghatározhatjuk az áramlás erősségét. Az R sugarú csőben a középvonaltól r távolságban jelöljünk ki Δr szélességű csőgyűrűt (**36.5. ábra**). Ezen a gyűrűszerű keresztmetszeten a (35.5) alapján átfolyó folyadékáram erőssége:

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = v(r)\Delta A. \tag{36.3}$$

A (36.2) sebességeloszlást felhasználva ez az áramerősség az

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2)2\pi r\Delta r \tag{36.4}$$



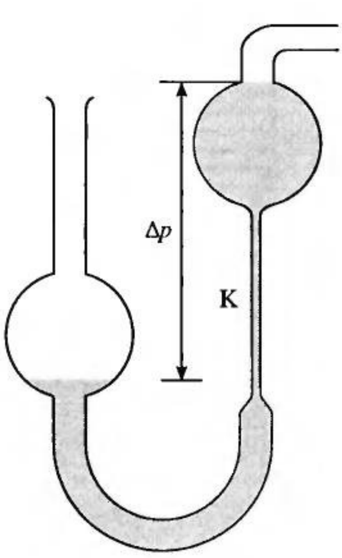
36.5. ábra

alakot ölti. A cső teljes keresztmetszetén átáramló folyadék áramerősségét úgy kapjuk meg, hogy az elemi térfogatok összegét vesszük a teljes keresztmetszetre, tehát

$$I = \frac{V}{t} = \frac{p_1 - p_2}{\eta l} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr. \qquad (36.5)$$

Az integrálást elvégezve

$$\boxed{I = \frac{V}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4} . \qquad (36.6)$$



36.6. ábra

A (36.6) *összefüggést **Hagen–Poiseuille-*** [ejtsd: hágenpoászöj] ***törvénynek** nevezzük.* Eszerint stacionárius, lamináris áramlás során a cső keresztmetszetén áthaladó folyadékáram (pl. véráram) erőssége egyenesen arányos a cső végei közötti nyomáskülönbséggel, a cső sugarának negyedik hatványával és fordítottan arányos a cső hosszával, valamint a folyadék dinamikai viszkozitásával. (Gottlieb HAGEN német vízmérnök, 1797–1884; Jean POISEUILLE [poaszöj] francia orvos és fizikus, 1799–1869.)

A Hagen–Poiseuille-törvényen alapszik az *Ostwald-féle viszkoziméter* (**36.6. ábra**). (Wilhelm OSTWALD német vegyész, 1853–1932.) Az U alakú edény jobb szárában levő gömbből adott térfogatú folyadék áramlik át a K kapillárison a bal oldali gömbbe. Ha ismerjük a térfogatot, a kapilláris sugarát, a $p_1 - p_2 = \rho g h$ átlagos nyomáskülönbséget és mérjük az átáramlási időt, akkor (36.6) alapján az η dinamikai viszkozitás meghatározható. A dinamikai viszkozitások arányának meghatározásához nem kell ismernünk az edény méreteit, csak a vizsgált két folyadék sűrűségét és az átáramlási időket.

4. Stokes törvénye

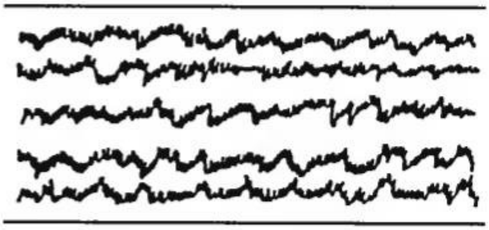
Áramlási térbe helyezett golyó közelében réteges áramlás alakulhat ki. A belső súrlódás miatt a közeg a golyóra erőt fejt ki, ami a számítások szerint egyenesen arányos a közeg és a golyó relatív sebességével, a golyó sugarával és a közeg dinamikai viszkozitásával:

$$\boxed{F = 6\pi\eta r v}. \tag{36.7}$$

Ez a Stokes-féle súrlódási törvény. (George STOKES [sztoksz] ír fizikus, 1819–1903.) A Stokes-törvény sokféle kísérlet kiértékelésében játszik fontos szerepet. A kisméretű golyók esése súrlódó folyadékban gyorsan egyenletessé válik. A golyó sebességét megmérve következtethetünk a folyadék, vagy a golyóra ható erők tulajdonságaira.

5. Turbulens áramlás

Áramlási készülékben megvalósított lamináris áramlás sebességét fokozatosan növelve azt tapasztaljuk, hogy *meghatározott sebességnél a réteges áramlás kavargó, turbulens áramlásba csap át.* Az áramvonalkép már nem állandó, a különböző színű folyadékrészek összekeverednek (**36.7. ábra**). Adott sebesség mellett ugyancsak turbulens áramlás jön létre, ha az „áramlási cső" méretét (pl. a Levius-féle áramlási készülékben a folyadékréteg vastagságát) növeljük. Osborn REYNOLDS (angol fizikus, 1842–1912) vizsgálatai szerint a lamináris áramlás turbulenssé válása a v áramlási sebességtől, az áramlási cső r harántméretétől, a közeg ρ sűrűségétől és az η dinamikai viszkozitástól függ. Az átmenet akkor következik be, amikor az



36.7. ábra

$$\boxed{R = \frac{\rho r v}{\eta}}, \tag{36.8}$$

az ún. Reynolds-szám elér egy R_k kritikus értéket. (Hengeres cső esetén $R = R_k = 1160$.)

6. Közegellenállás

Az áramló közegben levő testre ható erők is helyettesíthetők egyetlen eredő erővel és egy erőpárral (25. § 3). Az eredő erőt felbonthatjuk az áramlás irányába eső és arra merőleges összetevőre. *Az áramlásirányú összetevőt közegellenállási erőnek nevezzük.*

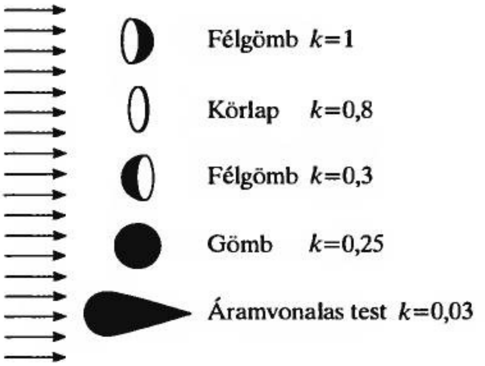
Ha az áramlási térbe szimmetrikus testet helyezünk úgy, hogy szimmetriatengelye párhuzamos az áramlás irányával, akkor a tapasztalat szerint a testre ható erők eredője is áramlásirányú. (Fenti megállapításaink akkor is érvényesek, ha nem a közeg, hanem a test mozog, általánosabban: ha relatív sebességük nem nulla.)

A közegellenállási erőre már láttunk példát a lamináris áramlás tárgyalásakor. A golyó esésére vonatkozó Stokes-féle ellenállástörvény által leírt erő a folyadék és a test közötti súrlódás eredménye. Turbulens áramlásban, a különböző alakú és keresztmetszetű testekkel végzett kísérletek eredménye szerint az F_k közegellenállási erő egyenesen arányos a test áramlás irányára merőleges A keresztmetszetével, a közeg ρ sűrűségével, a test és a közeg v relatív sebességének négyzetével és függ a test alakjától:

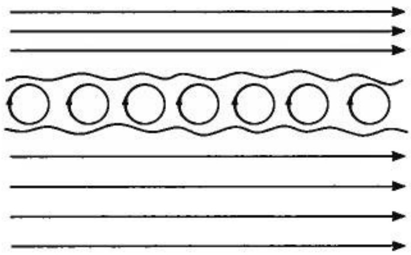
$$F_k = kA\rho v^2. \tag{36.9}$$

A (36.9) összefüggésben szereplő k-t *alakellenállási tényezőnek* nevezzük (**36.8. ábra**). Táblázatokban gyakran a $c = 2k$ érték szerepel alakellenállási tényezőként, mert a (36.9) képletet gyakran az $\frac{1}{2}mv^2/V = \frac{1}{2}\rho v^2$ mozgási energiasűrűséggel a következő alakban adjuk meg:

$$\boxed{F_k = \frac{1}{2}cA\rho v^2}. \tag{36.10}$$



36.8. ábra



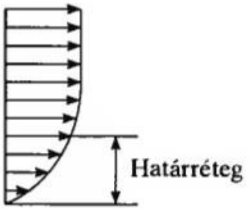
36.9. ábra

7. Örvények. Határréteg

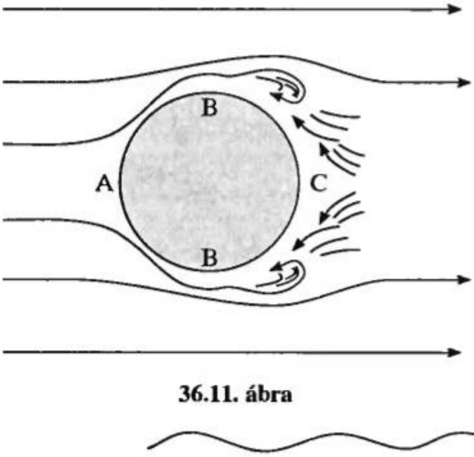
Különböző sebességű áramlások határfelülete mentén az áramlás útjába tett akadály mögött *örvények* keletkeznek; a folyadék, gáz forgómozgást végez. A folyókban ilyen örvénylés figyelhető meg például két folyóág találkozásánál, hídpillérek közelében, hajók, csónakok mögött stb.

Két, nem azonos sebességű lamináris áramlás határfelületén a nyíróerők vékony sávban forgásba hozzák a folyadékot, örvények jönnek létre, s ezeken mint görgőkön siklik tovább a két különböző sebességű folyadék (**36.9. ábra**).

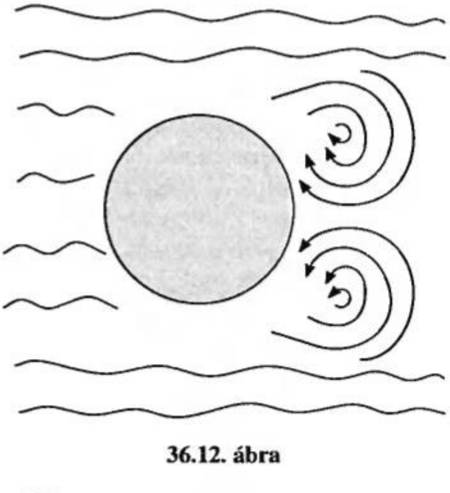
Akadály mögött kialakuló örvények képződését részleteiben is megfigyelhetjük a Levius-féle áramlási készülékben. Lamináris áramlásba helyezett test körül, attól távolabb az áramlás továbbra is lamináris, a folyadékrészek sebessége gyakorlatilag állandó. A test közvetlen közelében, kis szélességű rétegben, az úgynevezett *Prandtl-féle határrétegben* az áramlásra merőleges irányban nagy a sebességesés, a sebességgradiens (**36.10. ábra**). Ez annak a következménye, hogy a test felületén levő folyadékrészek sebessége nulla, a határréteg másik szélén pedig már maximális. Az akadály fölött és alatt áramló folyadékrészek a belső súrlódás miatt mozgási energiát veszítenek, s ezért B-ből nem tudnak eljutni az akadály mögötti nagy nyomású helyre, C-be, hanem már korábban lefékeződnek, és visszakanyarodva a kisebb nyomású B hely felé mozognak (akadály mögötti visszaáramlás; **36.11. ábra**). Itt a nagy sebességű áramlás magával ragadja a visszaáramló folyadékot és ez a folyadékrész forgásba jön. Az örvény egyre nagyobb tartományra



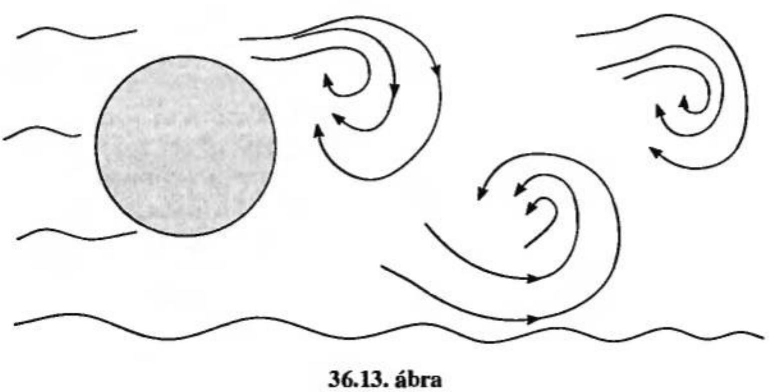
36.10. ábra



36.11. ábra



36.12. ábra



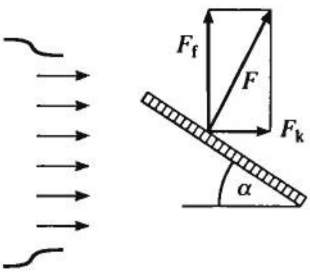
36.13. ábra

terjed ki, és az akadály mögött leválik a testről. A jelenség periodikusan ismétlődik úgy, hogy a test mögött ellentetten forgó *örvénypárok* képződnek (**36.12. ábra**). *Nagy sebességű áramlásban egymás után váltakozva válnak le az örvények, és az akadály mögött örvénysort alkotnak. Ez a Kármán-féle örvényút* (**36.13. ábra**). (KÁRMÁN Tódor magyar származású amerikai gépészmérnök, 1881–1963.)

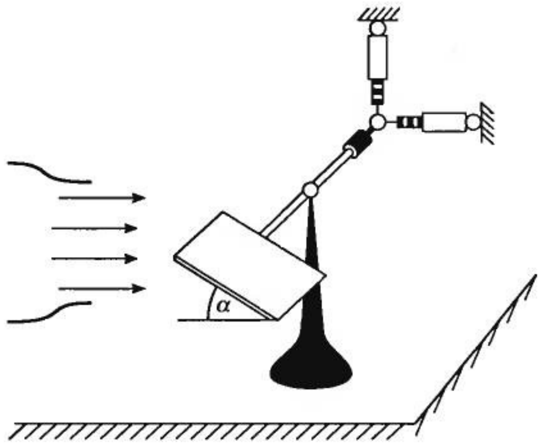
Az örvények impulzusnyomatékkal rendelkező stabil képződmények, s az, hogy ellentett forgásiránnyal válnak le az akadály egyik, illetve másik oldalán, az impulzusmomentum megmaradásának következménye.

8. Hidrodinamikai felhajtóerő

Párhuzamos áramlásba aszimmetrikusan elhelyezett síklapra a közeg a **36.14. ábrán** jelzett erővel hat. *Ennek az úgynevezett légerőnek az áramlásra merőleges vetületét hidrodinamikai felhajtóerőnek nevezzük.* A légerő két összetevőjét, a közegellenállási erőt és a dinamikai felhajtóerőt kétkarú mérleggel egyidejűleg mérhetjük (**36.15. ábra**). A kísérlet szerint mindkét erőkomponens függ a síklapnak az áramlás irányával bezárt szögétől, az ábrán α-val jelölt állásszögtől. A két erő függése az adatoktól a következő formulákkal adható meg:



36.14. ábra



36.15. ábra

$$\boxed{F_k = C_x \frac{1}{2} \rho v^2 A} \tag{36.11}$$

és

$$\boxed{F_f = C_y \frac{1}{2} \rho v^2 A}\ , \tag{36.12}$$

ahol A a síklap területe, C_x és C_y az állásszögtől függő tényezők. A repüléshez az a kedvező feltétel, ha a dinamikai felhajtóerő többszöröse a közegellenállási erőnek, azaz ha a C_y/C_x hányados minél nagyobb. Kísérleti tapasztalatok és elméleti számítások szerint kis állásszögekre a C_y/C_x hányados a Zsukovszkij-féle profil alkalmazásakor a legnagyobb (**36.16. ábra**). (Nyikolaj ZSUKOVSZKIJ orosz orvos, aerodinamikus, 1847–1921.)

Szélcsatornával végzett kísérletek azt bizonyítják, hogy ekkor még néhány fokos negatív állásszögnél is van dinamikai felhajtóerő.

36.16. ábra

37. § A folyadékok és óriásmolekulájú anyagok szerkezete

A folyadékállapot átmenetet képez az anyag szilárd- és gázhalmazállapota között. A folyadékok makroszkopikus fizikai tulajdonságai részben a gázok, részben a kristályos anyagok sajátosságaira emlékeztetnek. A folyadékok, miként a gázok, mindig felveszik az edény alakját, térfogatuk megváltoztatásához viszont nagy erők szükségesek, ebben tehát a szilárd anyagokra hasonlítanak. A folyadékok sűrűsége gyakorlatilag megegyezik kristályos fázisuk sűrűségével (általában annál 5–20%-kal kisebb). A folyadékokban a diffúzió (45. § 1) sebessége lényegesen nagyobb, mint a kristályokban, de kisebb, mint gázállapotban. A kristályok olvadáshője sokkal kisebb, mint a folyadékok forráshője (62. §). Az olvadáshő és forráshő különbsége alapján (leszámítva a forrásnál jelentős térfogati munkát) következtethetünk az anyag belső energiájának változásaira. Eszerint a folyadékok energetikai szempontból közelebb állnak a kristályos anyagokhoz, mint a gázokhoz. Ezen általános érvényű megállapításokon túl, a különböző folyadékok tulajdonságaiban lényeges különbségek is mutatkoznak. A fizikai tulajdonságokban jelentkező különbségek szerkezeti okokra vezethetők vissza.

1. Egyszerű folyadékok

A folyadékszerkezet általános vonásai legegyszerűbben a fémolvadékok tulajdonságaiból indulva érthetők meg. Az olvadásponthoz közeli hőmérsékleten a fémolvadékok sűrűsége, összenyomhatósága a kristályállapotú fémekével közel azonos. A tiszta fémek szerkezeti szempontból a legegyszerűbb anyagok közé tartoznak. Azonos atomokból épülnek fel, kristályszerkezetük legtöbb esetben maximális sűrűséggel egymásra helyezett golyókkal modellezhető. E tényből indulva John BERNAL (brit fizikus, 1901–1971) a 20. század harmincas éveiben a fémolvadékok szerkezetét is golyósokasággal modellezte. BERNAL egy rugalmas hálót sok (kb. 400) egyforma golyóval töltött meg. A golyókat nem rendezte el, csak egyszerűen egymásra dobálta, végül a hálót szorosra húzta. Azt tapasztalta, hogy az így egymásra dobált golyósokaság térfogata kb. 15–20%-kal nagyobb annál a térfogatnál, amelyet a szoros, kristályos rendbe rakott golyók sokasága tölt be. Ez a térfogatváltozás jól egyezik a fémek olvadásakor mérhető térfogat-növekedéssel.

Fel kell azonban hívnunk a figyelmet a golyómodell és a folyadékok valódi szerkezete közti lényeges különbségre! A Bernal-modellben a golyók mozdulatlanok, a folyadékban viszont az atomok állandó mozgásban vannak. A golyósokaság elrendeződését a folyadék szerkezetét jellemző „kimerevített" pillanatfelvételnek kell tekintenünk. A folyadékban a hőmozgás pillanatról pillanatra (másodpercenként kb. 100-szor) felbomlasztja, majd kis változtatással újra létrehozza a modellben megfigyelt jellegzetes atomcsoportosulásokat. Az atomok illeszkedése tehát egy-egy tartományon belül folyamatosan változik, de a folyadék egészét tekintve a kép változatlan. BERNAL sztatikus modellje ezt az átlagos szerkezetet érzékelteti.

A röntgendiffrakciós szerkezetvizsgálatok azonban egyértelműen megmutatták azt is, hogy az egyszerű folyadékok csoportjába a folyadékoknak csak elenyészően kis hányada sorolható be. A víz, a szerves molekulájú folyadékok, a sóolvadékok nem tartoznak az egyszerű folyadékok közé. Szerkezetük nem modellezhető véletlenszerűen egymásra dobált golyók sokaságával.

2. A víz szerkezete

A Föld leggyakoribb folyadéka, a víz különleges sajátosságokat mutat. Sűrűsége sajátos módon változik a hőmérséklet függvényében. Legnagyobb a +4 °C-os víz sűrűsége: 1000 kg/m^3. A 4 °C-nál alacsonyabb, ill. magasabb hőmérsékleten ennél kisebb a sűrűség (42. § 2). Felületi feszültsége és dinamikai viszkozitása pedig – más folyadékokéhoz viszonyítva – feltűnően nagy. A víz melegítéséhez viszonylag sok hő szükséges. A víz fajlagos hőkapacitása 4,2 kJ/(kg·°C), kétszerese a jég fajlagos hőkapacitásának, közel tízszerese a vas, és harmincszorosa a platina fajlagos hőkapacitásának (52. §). Forráshője szintén figyelemre méltóan magas (62. §).

A víz szerkezetéről, molekuláinak elrendeződéséről röntgendiffrakciós szerkezetvizsgálatok adnak közvetlen információt. A víz szerkezetét a jég szerkezetéhez hasonló, rövid távú rendben kell elképzelnünk. A vízben a molekulák viszonylag nagy méretű (20 °C-on kb. 80–90 molekulát tartalmazó) csoportokba szerveződnek. Ilyen csoportokhoz tartozik a molekulák mintegy 70%-a. A csoportokban a molekulákat hidrogénhídkötések kapcsolják össze (146. §).

A víz szerkezetét azonban nem szabad statikusnak képzelnünk. A hidrogénhídkötés ugyanis 0 °C fölött – a molekulák hőmozgása miatt – csak igen rövid élettartamú. Egy-egy kötés másodpercenként átlagosan 10-szer felbomlik, majd újjáalakul. A molekulacsoportok ennek megfelelően állandó változásban vannak, részlegesen vagy teljesen felbomlanak, átszerveződnek. A víz szerkezete tehát a folytonos átalakulás révén kialakuló, dinamikus egyensúlyi szerkezet.

3. Az óriásmolekulájú anyagok (műanyagok) tulajdonságai

A kristályos anyagok és folyadékok szerkezeti alapegységeit atomok vagy néhány atom összekapcsolódásával kialakult molekulák képezik. Az ilyen szerkezetű anyagoktól lényegesen eltérő fizikai tulajdonságúak az ún. óriásmolekulájú (makromolekulájú) anyagok. Ezek alapegységei, molekulái több tízezer atom összekapcsolódásával jönnek létre. Az óriásmolekulájú anyagok közé sok természetes anyag (pl. a természetes gumi, a növényi rostok anyagát adó cellulóz, a gyapjú és a hernyóselyem anyaga stb.) és szinte megszámlálhatatlanul sok mesterségesen előállított, ún. műanyag tartozik. Valamennyi óriásmolekula közös sajátossága, hogy egyszerűbb szerkezeti egységek, ún. monomer molekulák összekapcsolódásával jönnek létre. A makromolekulák kialakulására utalva nevezik az ilyen anyagokat gyakran polimer anyagoknak.

Ezen anyagok érdekes sajátsága, hogy mechanikai tulajdonságaikat (de a többi fizikai tulajdonságukat is) nem annyira a kémiai összetétel, mint inkább a molekulák geometriai alakja és összekapcsolódásának módja határozza meg. Gyakran kémiailag igen különböző anyagok mutatnak azonos tulajdonságokat, így például a természetes gumi és a szilikongumi, a selyem és a különböző műselymek stb.

Az óriásmolekulák morfológiai (alaktani) szempontból két nagy csoportba sorolhatók. Megkülönböztethetünk láncmolekulájú anyagokat és térhálós szerkezetű polimereket. Itt csak a láncmolekulájú anyagokkal foglalkozunk, amelyek hosszú sorban – láncszerűen – összekapcsolódó monomer egységekből épülnek fel.

A gumiszerűen rugalmas polimerek a makromolekulájú folyadékokhoz hasonlóan felgombolyodott és egymásba kuszálódott láncmolekulákból épülnek fel. A láncmolekulák azonban egy-egy ponton erős kémiai kötéssel kapcsolódnak egymáshoz. Ezek a kötések nem befolyásolják a közéjük eső láncszakaszok szabad hőmozgását, a molekulák egymástól való elszakadását azonban meggátolják. A mikroszerkezeti kép alapján könnyen megérthető a gumi rugalmas viselkedése. Egyszerű befőttes gumi nyújtásával is tapasztalhatjuk, hogy a gumiszál aránylag könnyen, eredeti hosszának többszörösére nyújtható. Ezután azonban a további nyújtáshoz szükséges erő ugrásszerűen megnő, és a szál hamarosan elszakad. A kezdeti (kis mechanikai feszültség hatására bekövetkező) nagy relatív alakváltozásnak az az oka, hogy a hőmozgás miatt felgombolyodott molekulák a húzás hatására könnyen kiegyenesednek. Az erőhatás megszűntével a hőmozgás újra összekuszálja a láncokat. Ha a molekulaláncok már kiegyenesedtek, további alakváltozás már csak akkor lehetséges, ha a szénatomok közötti kötéstávolságot növeljük. Ekkor a gumiszál „felkeményedik".

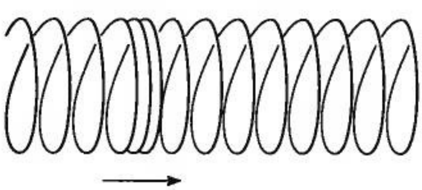
I. D) 4. A HULLÁMMOZGÁS

38. § A hullámok leírása

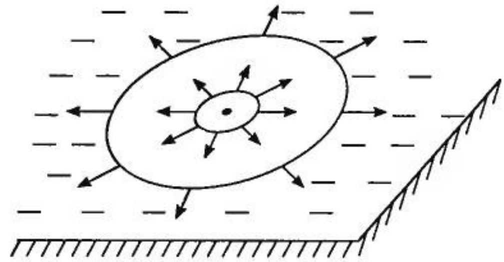
1. A hullám általános jellemzése

Rugalmas közeg valamely pontjában keltett deformáció a tapasztalat szerint átterjed a közeg többi részére. Például ha a kifeszített gumikötél egyik végét kézéllel megütjük, az így létrehozott „hullámvölgy" végigszalad a kötélen (**38.1. ábra**).

38.1. ábra



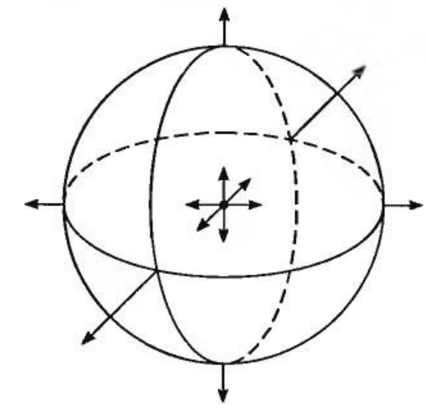
38.2. ábra



38.3. ábra

Ha a kifeszített spirálrugó végét periodikusan mozgatjuk, az alakváltozás sűrűsödés formájában terjed végig a rugón (**38.2. ábra**).

Vízbe ejtett kő hullámot kelt a víz felszínén, és ez a hullám a keletkezés helyétől mint középponttól növekvő sugarú kör mentén terjed tova (**38.3. ábra**).

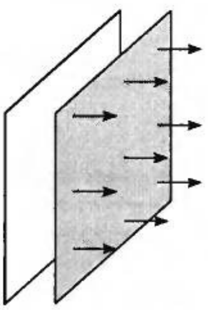


38.4. ábra

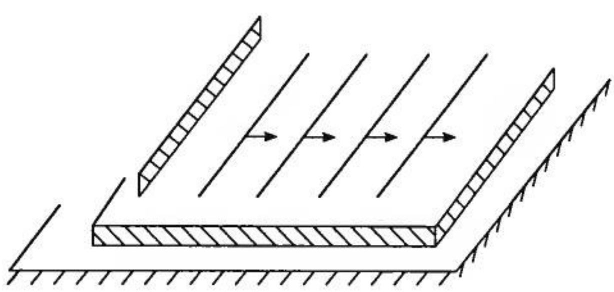
Levegőben gerjesztett hullámra jellemző példa a hang, amely kisméretű hangforrás esetén gömbfelület mentén távolodik a forrástól. *Általában rugalmas hullámnak nevezzük a rugalmas közegben keltett zavar térbeli terjedését. Aszerint, hogy a deformáció gömb vagy sík mentén terjed, gömb-, illetve síkhullámokról beszélünk* (**38.4.** és **38.5. ábra**). A gömbhullám síkmetszete a *körhullám* (**38.3. ábra**), a síkhullámé az *egyenes hullám* (**38.6. ábra**). Ez utóbbit vízen például úgy kelthetjük, hogy a vonalzó teljes élével megérintjük a vízfelszínt.

Az előbb felsorolt jelenségek közös sajátossága, hogy a deformáció véges sebességgel terjed a közegben. Ha a közeg homogén és izotrop (mint például a fémrúd, levegő stb.), akkor a sebesség az adott közegre jellemző állandó.

Szilárd anyagban, amelyben nyíró- és nyomófeszültségek egyaránt ébredhetnek, az alakváltozás és a zavar terjedési iránya szerint kétféle hullámot különböztetünk meg. *Ha a ré-*



38.5. ábra



38.6. ábra

szecskék elmozdulása merőleges a terjedési irányra, ***transzverzális*** *vagy haránt irányú hullámról beszélünk* **(38.1. ábra)**. *Amikor a kitérés és a terjedés iránya megegyezik, a hullámot* ***longitudinális*** *vagy hossz menti hullámnak nevezzük* **(38.2. ábra)**.

Folyadékban, gázban, ahol a nyíróerők elhanyagolhatók, csak térfogati rugalmasság van, a deformáció nyomásváltozás formájában terjed. Ezekben az anyagokban csak longitudinális hullámok kelthetők. (A víz felszínén megfigyelhető felületi hullámok nem ebbe a kategóriába tartoznak.)

A gyakorlatban legtöbbször nem egyszeri, hanem periodikus deformációval keltünk hullámokat. Ily módon a hullámokat mint térben és időben periodikus jelenségeket tanulmányozzuk. Ennek a jelenségkörnek jellemző, speciális részét képezik az úgynevezett *szinuszos hullámok*, amelyekkel a következőkben részletesebben is foglalkozunk.

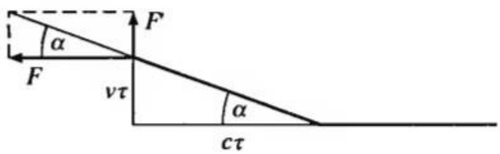
Először arra a kérdésre keresünk választ, mitől függ a longitudinális és a transzverzális hullám terjedési sebessége szilárd rugalmas anyagban.

2. A hullám terjedési sebessége

a) A transzverzális hullámok terjedési sebessége

Kifeszített, q keresztmetszetű, ρ sűrűségű rugalmas kötélben transzverzális hullámot keltettünk **(38.7. ábra)**.

38.7. ábra



38.8. ábra

A sebesség meghatározásához transzverzális irányban rántsuk meg F' erővel a kötél végét, amelyet eredetileg F erővel feszítettünk ki **(38.8. ábra)**. A kötélvég τ idő alatt $v\tau$ kitérést ér el, miközben a deformáció c sebességgel $c\tau$ távolságba jut. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F'}{F} = \frac{v\tau}{c\tau}, \tag{38.1}$$

ahonnan

$$F' = F\frac{v}{c}. \tag{38.2}$$

Az F' erőtől származó erőlökés τ idő alatt $F'\tau$, s ez a kötélben

$$F'\tau = \Delta p = qc\tau\rho v \tag{38.3}$$

impulzusváltozást eredményez. A (38.2) és a (38.3) képletek egybevetésével, egyszerűsítés és gyökvonás után a *transzverzális deformáció (hullám) terjedési sebességére*

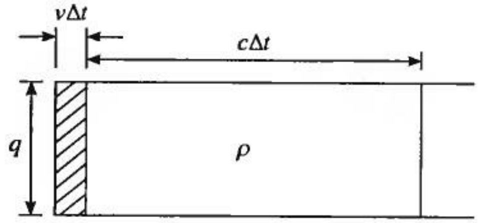
$$\boxed{c_t = \sqrt{\frac{F}{q\rho}}} \tag{38.4}$$

adódik. A formula ellenőrzéseként konkrét mérés nélkül is meggyőződhetünk arról, hogy az erősebben megfeszített kötélen a hullámok terjedési sebessége nagyobb.

b) A longitudinális hullámok sebessége

A **38.2. ábra** longitudinális hullámot demonstráló kísérletet mutat. A lemezrugón végigfutó sűrűsödés sebességét könnyen mérhetjük. Ha 2–3 m hosszú, befogott acélrúd végére a rúd egyenesében kalapáccsal ráütünk, a másik véggel érintkező, fonálon függő pingponglabda rövid időkéséssel elpattan a rúdtól (**38.9. ábra**). A jelenség magyarázata az, hogy az egyik végen létrehozott deformáció eredményeként a rúd rétegei sorra elmozdulnak, és a másik végen levő réteg bizonyos idő múlva ellöki a labdát.

38.9. ábra



38.10. ábra

Határozzuk meg a longitudinális deformáció sebességét! Hasson a rúdra (pl. a kalapácsütés miatt) $F\Delta t$ erőlökés. Emiatt a rúd vége torlódik a tőle jobbra eső rétegekkel és az erőhatás ideje alatt v sebességre gyorsul fel, miközben a rúd egymás utáni rétegei is v sebességre gyorsulnak. A Δt időtartam alatt a deformáció $c\Delta t$ távolságra terjedt. Az erőlökéssel egyenlő impulzusváltozás tehát abban nyilvánul meg, hogy a rúdon újabb és újabb, végeredményben a $c\Delta t$ hosszon levő rétegek érik el a v sebességet. A **38.10. ábra** jelöléseivel az impulzustétel az

$$F\Delta t = qc\Delta t\rho v \tag{38.5}$$

alakban írható fel, ahol q a rúd keresztmetszete, c a deformáció terjedési sebessége, ρ a sűrűség, v a rétegek végsebessége. A Δt idő alatt a rúd bal oldali vége $v\Delta t$-t mozdult el, tehát a rugalmas rúd $c\Delta t$ hosszú részének hosszváltozása $v\Delta t$, és a rugalmas összenyomásra vonatkozó törvény szerint

$$v\Delta t = \frac{1}{E}\cdot\frac{Fc\Delta t}{q}. \tag{38.6}$$

Fejezzük ki a (38.6) összefüggésből F-et és helyettesítsük be a (38.5)-be. Egyszerűsítés után a longitudinális hullám terjedési sebességére a

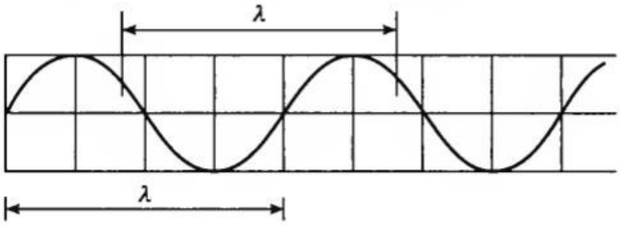
$$\boxed{c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \tag{38.7}$$

összefüggés adódik, ahol E a rúd anyagának Young-modulusa.

Előbbi gondolatmenetünkből az is következik, hogy rövid ideig tartó erő hatására az impulzusváltozás nem terjed ki az egész rúdra, azaz a rúd $c\Delta t$-nél távolabbi részeiben az erőlökésnek nincs hatása. A gyakorlatban például fémtömbök alakításakor a munkadarabot üllőre helyezik. Az üllő a megmunkálandó testtel együtt részt vesz a kalapácstól származó impulzusváltozásban. Az üllő méretét úgy célszerű megszabni, hogy hossza $c\Delta t$-nél ne legyen nagyobb, mert a többi része az alakítás szempontjából úgyis hatástalan lenne.

3. Szinuszos hullámok, hullámfüggvény

Rugalmas kötél egyik végén periodikusan keltett hullám folytonos hullámvonulatként szalad végig a kötélen (**38.11. ábra**). A rugalmas pontsor tetszőlegesen kiválasztott pontja a kötél egyenesére merőleges harmonikus rezgőmozgást végez a hullámkeltőével egyenlő frekvenciával és a hullámforrásétól általában eltérő fázisban.

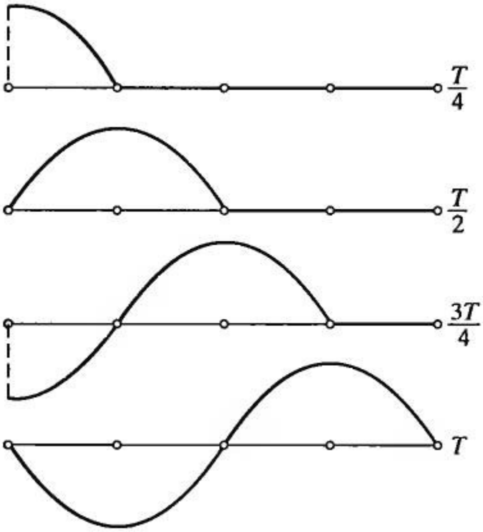


38.11. ábra

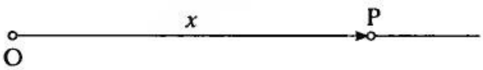
Vizsgáljuk részleteiben is a hullám kialakulását! Amíg a kötél rezgetett vége T periódusidejű teljes rezgést végez, addig a deformáció c sebességgel

$$\boxed{\lambda = cT} \tag{38.8}$$

távolságra jut el a kötélen, miközben a kötél végétől egyre távolabb levő pontok fáziskéséssel kezdik a rezgést. A λ távolságban levő pont azonos fázisban rezeg a hullámforrással. A **38.12. ábra** néhány „pillanatfelvételt" rögzít a hullám kialakulásáról. Kapcsoljuk össze a kötél végpontjának és a tőle x távolságra levő P pontnak a rezgését (**38.13. ábra**). Az O pont rezgését nulla kezdőfázissal az



38.12. ábra



38.13. ábra

$$y(t) = A \sin \omega t \tag{38.9}$$

képlet írja le, ahol y a kötél egyenesére merőleges kitérés, A a rezgés amplitúdója, ω a körfrekvencia. A P pont, amely a rezgéskeltés helyétől x távolságra van, ugyanilyen rezgést végez, csak $t' = x/c$ időkéséssel. Ily módon a P pont rezgését az alábbi függvénnyel adhatjuk meg:

$$y(x,t) = A \sin \omega(t - t') = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{38.10}$$

A (38.10) *kifejezést* ***hullámfüggvénynek*** *nevezzük. Az* $y(x,t)$ *hullámfüggvény kétváltozós, a kitérés az időnek és a rezgéskeltés helyétől mért távolságnak a függvénye.*

A hullámfüggvény egyszerű átalakítással az alábbi alakba írható át, ha a periódusidőt bevisszük a zárójeles kifejezésbe:

$$\boxed{y(x,t) = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}\,. \tag{38.11}$$

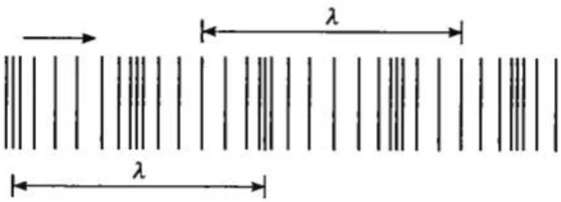
A hullámfüggvénynek ebből az alakjából nyilvánvalóan látszik, hogy a hullám időbeli periódusa T, térbeli periódusa λ. Adott helyen, vagyis x = állandó esetén a kötél megfelelő pontja harmonikus rezgőmozgást végez, rögzített időpillanatban pedig a kötél pontjai λ periódusú hullámsort alkotnak (**38.11. ábra**). A hullámra jellemző λ távolságot *hullámhossznak* nevezzük. A hullámhossz definíciója lehet a (38.8) összefüggés, amely szerint λ az a távolság, amelyre a deformáció egy periódusidő alatt eljut; másrészt λ az azonos fázisban rezgő szomszédos pontok egymástól mért távolsága. Ha a (38.11) formulában 2π-vel megszorozzuk a zárójelben szereplő tagokat, akkor másodikként a

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \tag{38.12}$$

kifejezést kapjuk. Ezt *hullámszámnak* nevezzük, s felhasználásával a hullámfüggvényt az

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx) \tag{38.13}$$

alakban írhatjuk fel. További átalakítást is végrehajthatunk a hullámfüggvényen, például az $f = 1/T$ frekvencia behelyettesítésével, de ezek az újabb alakok már nem adnak tartalmi többletet.

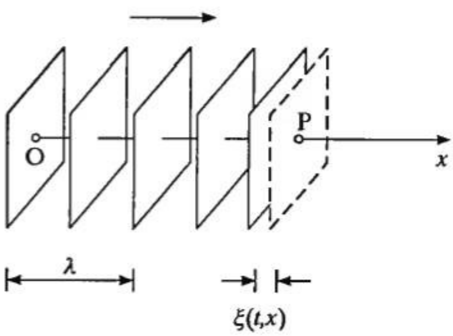


38.14. ábra

A rugalmas kötélen végigfutó transzverzális hullámhoz hasonlóan írhatjuk le a **38.14. ábrán** látható, longitudinális szinuszos hullámot is, amelyet kifeszített lemezrugóban keltettünk. Itt sűrűsödések és ritkulások periodikus változása figyelhető meg; a rugó egyes pontjai a rugó hossza mentén végeznek harmonikus rezgőmozgást. A kitérést az idő és a hely periodikus függvényeként például a

$$\xi(t,x) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{38.14}$$

képlet írja le. Térben terjedő hullámok esetén ez a kifejezés egyben az x irányban terjedő longitudinális síkhullám függvénye is, ahol ξ (kszi) egy-egy rezgési sík pillanatnyi kitérése (**38.15. ábra**). Az elnevezés onnan származik, hogy az azonos fázisban rezgő pontok síkot alkotnak; más szavakkal a *fázisfelületek* síkok.

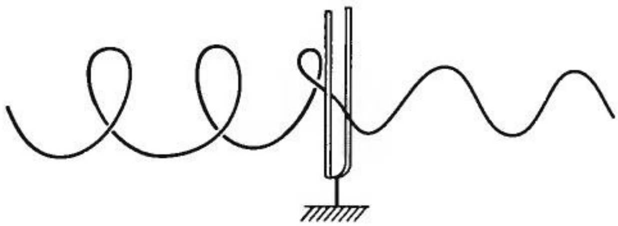


38.15. ábra

Mind a transzverzális, mind a longitudinális hullámok fentebb leírt fajtáját ***haladó hullámnak*** nevezzük, mert a rugalmas közeg bármely pontja ugyanazokon a rezgésállapotokon megy át, mint a hullámforrásként vett kötélpont vagy rezgési sík. Azt mondjuk, hogy a rezgésállapot a deformáció terjedési sebességével végighalad a közegen.

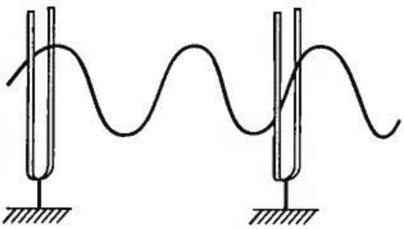
4. Polarizáció

A transzverzális kötélhullámokat eddig úgy keltettük, hogy a kötél minden pontja a hullámkeltő rezgés és a kötél egyenese által meghatározott síkban rezgett. Ha a kötél végét például kör vagy ellipszis mentén mozgatjuk, akkor a **38.16. ábrán** látható térbeli hullámok alakulnak ki.

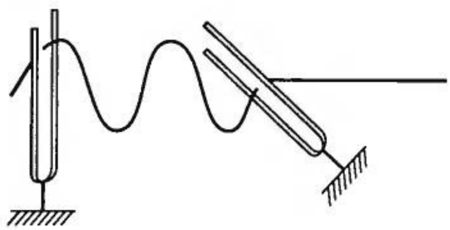


38.16. ábra

Hangvilla alakú réssel elérhetjük azt, hogy az akadály után a kötélhullámban részt vevő részek ismét egy síkban rezegnek (**38.17. ábra**). *Azt mondjuk, hogy a térbeli hullámot polarizáltuk. Ennek megfelelően a rést polarizátornak nevezzük. Az akadály kioltja a résre merőleges rezgéseket, és csak a résirányúakat engedi át. Egy másik réssel, az úgynevezett analizátorral a már polarizált hullámokat elemezhetjük.* Ha a két rés párhuzamos, akkor a hullám zavartalanul terjed; egymásra merőleges rések, ún. *keresztezett polarizátorok* esetén viszont a kötél analizátor utáni részében már nincs hullám (**38.18. ábra**).



38.17. ábra



38.18. ábra

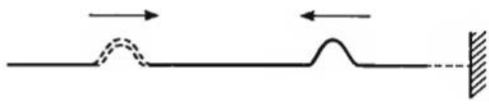
A transzverzális hullámok polarizálhatósága alapján a különböző hullámjelenségekről eldönthetjük, hogy transzverzális vagy longitudinális hullámokról van-e szó. Longitudinális hullámok ugyanis nem polarizálhatók, mert a deformációterjedés és a rezgés iránya ugyanabba az egyenesbe esik, így a terjedésre merőleges síkban nincs kitüntetett irány.

5. Egyenes mentén terjedő hullámok tulajdonságai

a) Visszaverődés

Kísérleti tapasztalat, hogy a kötélen keltett hullám akadályhoz érkezve visszaverődik. Ha a kötél másik vége rögzített, a visszavert hullám ellentett fázisban halad visszafelé. A rögzített végről történő visszaverődést a **38.19. ábra** mutatja. Ha a kötél végét vékony gumival

38.19. ábra



38.20. ábra

vagy zsineggel kötjük a falhoz (szabad vég), akkor a hullám azonos fázisban verődik vissza (**38.20. ábra**).

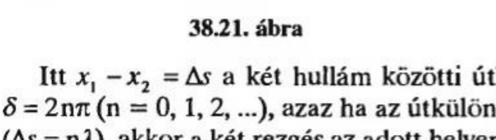
b) Interferencia

Keltsünk folyamatosan hullámokat. Ezek és a visszavert hullámok találkoznak. *A hullámtalálkozás jelenségét interferenciának* nevezzük. Az interferencia eredményét, azaz adott helyen *az eredő rezgést a két hullámbeli rezgésállapot szuperpozíciója, összege adja meg.*

Egy egyenesbe eső rezgések összetételénél láttuk, hogy azonos frekvenciájú rezgések összege ugyanolyan frekvenciájú rezgés, amelynek az amplitúdóját az összetevő rezgések amplitúdója és fáziskülönbsége határozza meg. Két hullám adott helyhez tartozó két rezgésének fáziskülönbségét a hullámok útkülönbségéből számíthatjuk ki. Tegyük fel, hogy a két hullámforrás azonos fázisban és azonos frekvenciával bocsát ki hullámokat. A két hullámot leíró függvény:

$$y_1(x_1,t) = A_1 \sin\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right), \qquad (38.15)$$

$$y_2(x_2,t) = A_2 \sin\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_2}{\lambda}\right), \qquad (38.16)$$



38.21. ábra

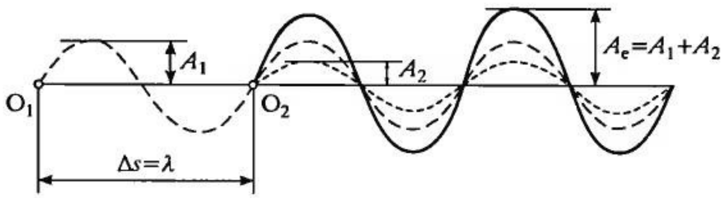
ahol x_1 és x_2 a két hullámforrásnak a vizsgált ponttól mért távolsága (**38.21. ábra**).

A (38.15) és a (38.16) összefüggés alapján a két rezgés fáziskülönbsége:

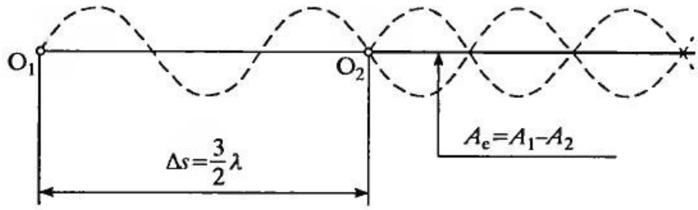
$$\delta = 2\pi\frac{x_1 - x_2}{\lambda}. \qquad (38.17)$$

Itt $x_1 - x_2 = \Delta s$ a két hullám közötti útkülönbség. Ha $\delta = 0$, vagy általánosabban, ha $\delta = 2n\pi$ (n = 0, 1, 2, ...), azaz ha az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse ($\Delta s = n\lambda$), akkor a két rezgés az adott helyen maximálisan erősíti egymást (**38.22. ábra**).

Ha $\delta = \pi + 2n\pi$ (n = 0, 1, 2, ...), vagyis ha $\Delta x = (2n+1)\lambda/2$, akkor maximális gyengítés, azonos amplitúdók esetén pedig teljes kioltás jön létre (**38.23. ábra**).



38.22. ábra



38.23. ábra

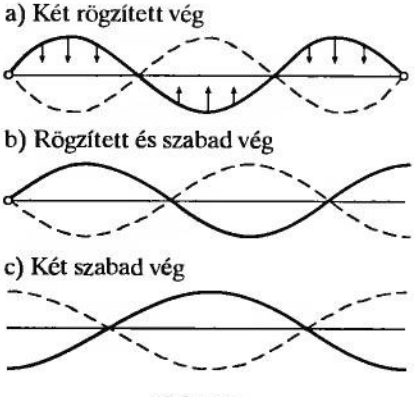
6. Állóhullámok

Ha a mindkét végén szabad, ill. mindkét végén rögzített kötél esetén a hullámhossz és a kötélhossz között fennáll az

$$l=2k\frac{\lambda}{4} \tag{38.18}$$

összefüggés, egyik végén szabad, másik végén rögzített kötél esetén pedig az

$$l=(2k+1)\frac{\lambda}{4} \tag{38.19}$$



38.24. ábra

összefüggés, akkor az indított és visszavert hullám interferenciájának eredményeként tartósan ***állóhullámok*** jönnek létre. (Mindkét végén szabad például a középen befogott fűrészlap.) A kötélen tartósan lesznek nulla amplitúdójú helyek, ezek a *csomópontok*, amelyek fél hullámhosszanként követik egymást, és ugyancsak fél hullámhossznyi távolságonként követik egymást a maximális amplitúdójú pontok, a *duzzadóhelyek.* Haladó hullámban minden pont azonos amplitúdóval és egy hullámhosszon belül különböző fázisban rezeg, állóhullámban viszont az amplitúdó csak a helytől függ és fél hullámhosszon belül minden pont fázisa azonos. Az állóhullámok különböző eseteit a **38.24. ábra** mutatja.

A rugalmas közegekhez úgynevezett *sajátfrekvenciát* rendelhetünk hozzá. Minden olyan frekvenciát, amely mellett a közegben állóhullámok alakulhatnak ki, az illető közeg sajátfrekvenciájának nevezzük. Az előbbiekből nyilvánvaló, hogy a sajátfrekvencia nem változhat folytonosan, hanem vagy az egész számok szerint (két rögzített és két szabad vég), vagy a páratlan számok szerint (rögzített és szabad vég esetén).

A kapott eredmények érvényesek a longitudinális hullámokra is. Állóhullámot valósíthatunk meg például a csavarrugón, ha megfelelő frekvenciával rezgetjük. A rugó mentén helyben maradó sűrűsödések és ritkulások figyelhetők meg.

Az állóhullámok kialakulása jellegzetes rezonanciajelenség. Ha a hullámforrás frekvenciája megegyezik a közeg valamelyik sajátfrekvenciájával, állóhullám jön létre. Kis csillapodás esetén a többszörös visszaverődés és az eredeti hullámforrás rezgető hatásának eredményeként egyre nagyobb amplitúdójú állóhullámokat kapunk. A rezgő közeg tetemes energiát halmozhat fel, és bekövetkezhet a „rezonanciakatasztrófa" is; például úgy, hogy a spirálrugó elszakad, ami balesethez vezethet.

7. Felületi hullámok

A víz és más kis viszkozitású folyadék felszínén keltett hullámokat ***felületi hullámoknak*** nevezzük. Kialakulásukban fontos szerepet játszik a nehézségi erő és a felületi feszültség. Elméleti megfontolás szerint terjedési sebességük függ a nehézségi gyorsulástól, a felületi feszültségtől és a hullámhossztól. Amennyiben a folyadék mélysége sokkal nagyobb a hullámhossznál, akkor

$$\boxed{c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}}\,. \tag{38.20}$$

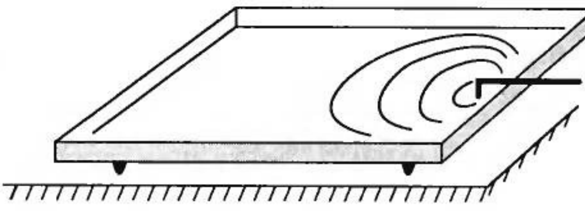
Kis hullámhosszúságú, néhány mm-es hullámokra a négyzetgyök alatti kifejezés első tagja elhanyagolható a második mellett. Ezek a kis hullámhosszú hullámok az úgynevezett *kapilláris hullámok*. Terjedési sebességük az előbb mondottak alapján

$$c_k=\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}\,. \tag{38.21}$$

Amikor a hullámhossz néhány cm-es vagy annál nagyobb, *nehézségi vagy gravitációs hullámokról* beszélünk. A (38.20) összefüggésben a négyzetgyök alatt csak az első tagot vesszük figyelembe, így a nehézségi hullámok terjedési sebessége

$$c_n=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\,. \tag{38.22}$$

A sebességformulákból látható, hogy a terjedési sebesség a hullámhossz függvénye. Ezt a jelenséget *diszperziónak* nevezzük. Kísérleti vizsgálatok szerint a felületi hullámban a folyadékrészek haladva–forgó mozgást végeznek. A felületi hullám a transzverzális és a longitudinális hullám keverékeként fogható fel.

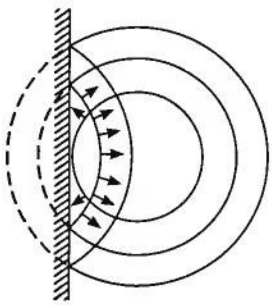


38.25. ábra

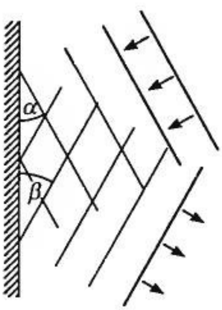
Kétdimenziós hullámjelenségek tanulmányozására, folyamatos hullámkeltésre alkalmas kísérleti eszköz a *hullámkád* (**38.25. ábra**). Motorral excentrikusan rezegtetett csúccsal, illetve egyenes szélű lemezzel körhullámokat, illetve egyenes hullámokat kelthetünk a víz felszínén. A kád alja átlátszó üveg vagy tükröző felület. Ily módon a felszíni jelenségek átmenő vagy visszavert fénnyel kivetíthetők. Felületi hullámokkal könnyen tanulmányozhatjuk a jellemző hullámtani jelenségeket, mint amilyen a visszaverődés, a törés, az interferencia és az elhajlás.

a) Visszaverődés (reflexió)

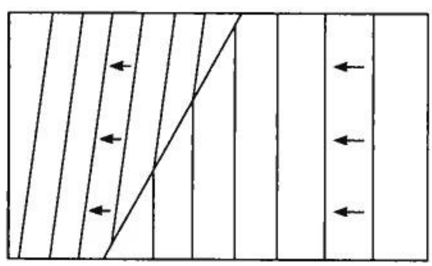
Pontszerű csúccsal keltett körhullámok sík akadályon körhullámként verődnek vissza (**38.26. ábra**). Az egyenes hullámok visszaverődés után is egyenes hullámok maradnak (**38.27. ábra**). Az akadályhoz érkező és a visszavert hullám frontja az akadállyal ugyanakkora szöget zár be, $\alpha = \beta$.



38.26. ábra



38.27. ábra



38.28. ábra

b) Törés (refrakció)

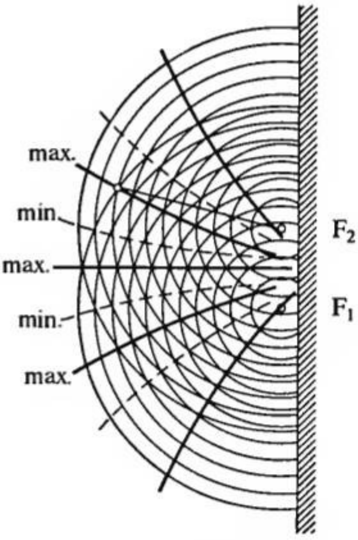
Vízhullámok számára különböző közegnek számít a különböző mélységű víz. Ha a hullámkád egy részét üveglemezzel sekélyebbé tesszük, akkor a kád alján levő lemez határán hullámtörés figyelhető meg (**38.28. ábra**). A mélyebb vízben keltett, adott hullámhosszúságú egyenes hullámok a határfelületen irányváltozást és hullámhossz-rövidülést szenvednek.

c) Interferencia

Két pontszerű, azonos frekvenciájú hullámkeltővel gerjesszük a víz felszínét egymástól 1–2 cm távolságban. Mindkét forrás azonos fázisban körhullámokat bocsát ki; a víz felszínén *időben állandó interferenciakép* alakul ki. A hullámtalálkozás eredményeként görbe vonalak mentén erősítést, más görbék mentén pedig hullámkioltást figyelhetünk meg. A két hullámforrásból kiinduló, adott útkülönbséggel találkozó hullámok maximum-, illetve minimumhelyei egy-egy hiperbolasereget alkotnak (**38.29. ábra**).

A felületi hullámok interferenciájának jellegzetes képe (a hiperbolasereg) azért figyelhető meg, mert a két forrásból kiinduló azonos frekvenciájú hullámok időben állandó fáziskülönbséggel találkoznak. Az ilyen hullámokat, amelyek a tér adott pontjaiban időben állandó fáziskülönbséggel (δ = állandó) találkoznak, *koherens hullámoknak* nevezzük.

Időben rendszertelenül változó fáziskülönbség esetén nincs észlelhető interferencia.

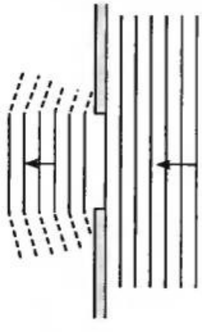


38.29. ábra

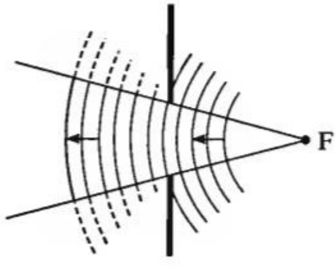
d) Elhajlás (diffrakció)

Hullámvonulat útjába helyezzünk olyan akadályt, amelyen rést hagytunk, hogy a hullámok áthaladhassanak rajta. A **38.30. ábra** egyenes hullámvonulat, a **38.31. ábra** körhullámok résen való áthaladását mutatja. Nagyméretű nyíláson át az első esetben gyakorlatilag rés szélességű egyenes hullámok haladnak tova, a pontszerű hullámforrásból pedig olyan körhullám ívek, amelyeket a forrásból, mint kiindulópontból a rés szélein át húzott sugarak „látószöge" határoz meg. A hullámvonulat széle alig észrevehetően benyúlik a sugarak szabta hullámtéren kívüli „árnyéktérbe". (Az ábrákon ezt szaggatott vonaldarabok jelzik.)

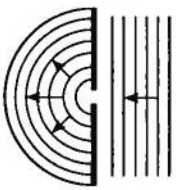
Ha a rés méretét csökkentjük úgy, hogy a nyílás szélessége közel essék a hullámok λ hullámhosszához, akkor mindkét előző kísérletünkben a hullámok behatolnak az akadály



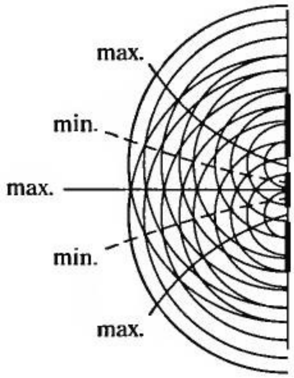
38.30. ábra



38.31. ábra



38.32. ábra



38.33. ábra

mögötti térbe, hullámelhajlás lép fel. λ szélességű vagy annál kisebb nyíláson át már gyakorlatilag körhullámok haladnak az akadály mögött, függetlenül attól, hogy egyenes vagy körhullámok érkeznek-e a résre (**38.32. ábra**). A hullámok elhajlása azzal az érdekes jelenséggel is párosul, hogy az akadály mögött periodikusan váltakozó, hullámot vivő és hullám nélküli tartományok követik egymást. Különösen jól látszik ez két vagy több rés alkalmazásakor (**38.33. ábra**). Ez utóbbi jelenség az interferenciaképre emlékeztet. Értelmezése és egységes magyarázata HUYGENS és FRESNEL nevéhez fűződik. A visszaverődés és törés törvényszerűségeit a Huygens-elvvel, az elhajlás jelenségét a FRESNEL által módosított Huygens–Fresnel-elvvel magyarázhatjuk meg (121. §).

39. § A hullámok energiaviszonyai

1. A rugalmas hullám energiája

A rugalmas hullám mechanikai energiája mozgási és rugalmas energiából tevődik össze. Az energiaösszeg:

$$E_m = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\Delta V. \tag{39.1}$$

Látható, hogy a térfogatelem energiája mind az időnek, mind a helynek periodikus függvénye.

A (39.1) összefüggés az alábbi módon vezethető le. Alakítsuk át a rugalmas nyújtás során végzett munkát a következőképpen:

$$W = \frac{1}{2}\cdot\frac{Eq}{l}x_0^2 = \frac{1}{2}E\left(\frac{x_0}{l}\right)^2 ql = \frac{1}{2}E\varepsilon^2\Delta V. \tag{39.2}$$

A keresztmetszetet most azért jelöljük q-val, hogy megkülönböztessük a szintén A-val jelölt amplitúdótól. A képletben $x_0/l = \varepsilon$ a relatív megnyúlás, $ql = \Delta V$ pedig a rúd térfogata. A nyújtás tárgyalásakor már említettük, hogy a W rugalmas munka a rúdban potenciális energiaként halmozódik fel. Eszerint a ΔV térfogatban tárolt potenciális energia:

$$E_p = \frac{1}{2}E\varepsilon^2\Delta V. \tag{39.3}$$

Ezt a formulát használjuk fel a hullámtér energiájának meghatározásakor. Számítsuk ki, hogy mekkora a rugalmas rúd elemi ΔV térfogatában az energia, amikor a rúdban haladó síkhullámot keltünk. A teljes mechanikai energia egyenlő a deformációból származó potenciális és a részecskék mozgásából adódó mozgási energia összegével, vagyis

$$E_m = E_p + E_k. \tag{39.4}$$

Legyen a közeg sűrűsége ρ, és vegyük figyelembe, hogy a relatív megnyúlás

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\xi(x+\Delta x,t)-\xi(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{39.5}$$

valamint azt, hogy a kis térfogatelem sebessége a kitérésfüggvény idő szerinti deriváltja:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{39.6}$$

Ezzel a mechanikai energia az

$$E_m = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V + \frac{1}{2}\rho \Delta V \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \tag{39.7}$$

alakban írható fel. Képezzük a $\xi = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$ hullámfüggvény hely, valamint idő szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -A\frac{\omega}{c}\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right), \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = A\omega\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right), \tag{39.8,9}$$

és helyettesítsük be őket a (39.7) energiaképletbe. Emellett használjuk fel a deformáció terjedési sebességéből adódó $E/c^2 = \rho$ egyenlőséget. Behelyettesítés és összevonás után a ΔV térfogatban tárolt mechanikai energiára az

$$E_m = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\Delta V \tag{39.10}$$

kifejezést kapjuk.

A mechanikai energia tehát mind az időnek, mind a helynek periodikus függvénye. Azt is megállapíthatjuk, hogy adott helyen és időben a helyzeti és a mozgási energia azonos fázisban van, azaz mindkét tag egyszerre éri el a nulla értéket, illetve a maximumot. (Vegyük észre, hogy a rugóra akasztott rezgő test helyzeti és mozgási energiájának fázisa között ettől eltérően $\pi/2$ a fáziskülönbség.) Az, hogy a potenciális és a mozgási energia a hullámtérben azonos fázisban változik, egyszerűen annak a következménye, hogy a legnagyobb deformációjú helyeken egyidejűleg a részecskék sebessége is maximális és megfordítva. Megjegyezzük még, hogy az energia-kifejezésnek a longitudinális hullámra kapott (39.10) alakja változatlanul érvényes a transzverzális síkhullámra is.

2. A hullám energiasűrűsége

Az energiasűrűséget az

$$u = \frac{E_m}{\Delta V} \tag{39.11}$$

hányadossal definiáljuk. SI-egysége a J/m³, számértéke megegyezik az egységnyi térfogatban tárolt energia számértékével. Ha a fenti definíciós egyenletbe behelyettesítjük a (39.10) összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\boxed{u = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}\,. \tag{39.12}$$

A hullámtér energiasűrűsége is periodikus függvénye az időnek és a helynek. A változó energiasűrűség helyett gyakrabban használjuk az energiasűrűség időátlagát. Mivel a $\cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$ függvény időbeli átlaga 1/2, ezért az energiasűrűség időbeli átlaga

$$\boxed{\bar{u} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2}\,. \tag{39.13}$$

A síkhullámot vivő közeg energiasűrűségének időbeli átlaga egyenesen arányos a közeg sűrűségével, valamint a hullám amplitúdójának és körfrekvenciájának négyzetével. Az energiasűrűségre és átlagára kapott (39.12) és (39.13) képlet más típusú hullámokra, például a gömbhullámokra is érvényes.

3. A hullám energia-fluxussűrűsége (energiaáram-sűrűsége)

Az eddigiekből kiderült, hogy a rugalmas közegben terjedő hullám energiát szállít, amelynek forrása a hullámforrás.

Ha a hullámterjedés irányára merőleges Δq felületelemen Δt idő alatt ΔE energia áramlik át, akkor az energia-fluxussűrűséget a

$$\boxed{\psi = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta q}} \tag{39.14}$$

hányadossal definiáljuk. A Ψ számértéke egyenlő az energiaáramlás irányára merőleges, egységnyi felületen, egységnyi idő alatt átáramlott energia számértékével. Mivel a hullám és ezzel együtt az energia terjedési sebessége c, a Δq felületen $\Delta \tau$ idő alatt annyi energia áramlik át, amennyi a $\Delta q c \Delta t$ térfogatú hengerben volt. Ezért

$$\Delta E = u \Delta q c \Delta t\,, \tag{39.15}$$

amivel a (39.14) összefüggés alapján

$$\psi = \frac{u\Delta qc\Delta t}{\Delta t\Delta q}, \tag{39.16}$$

egyszerűsítés után pedig

$$\psi = uc. \tag{39.17}$$

Az energia-fluxussűrűség SI-egysége: W/m^2, vagyis ugyanaz, mint a hangtanban a hangintenzitásé (40. § 6.).

40. § Hangtan

1. Hangforrások, a hang szubjektív és objektív jellemzői

A hangtan a hullámtannak egyik speciális fejezete, amely szoros kapcsolatban van az emberi hangérzékeléssel, a hallás érzékszervével, a füllel.

Mindennapos tapasztalat, hogy hangot akkor hallunk, ha valamely rezgő test (hangforrás) megfelelő intenzitású és frekvenciájú hullámai a közvetítő közeg révén hangingert, majd hangérzetet váltanak ki bennünk. Hangforrás például a rezgő hangvilla, a rezgő húr, a rezgő lemez, a síp stb.

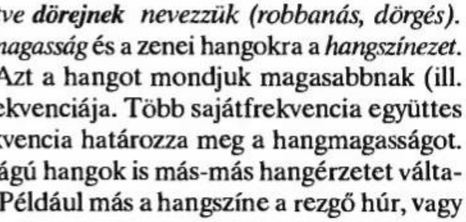
*Ha a hullámforrás periodikus rezgést bocsát ki, **zenei hangról** beszélünk, más esetben (pl. fékcsikorgás, ajtónyikorgás) a hangot **zörejnek**, illetve **dörejnek** nevezzük (robbanás, dörgés).*

A hang jellemzői a *hangerősség* (40. § 6.), *a hangmagasság* és a zenei hangokra a *hangszínezet*.

A *hang magasságát* a frekvencia szabja meg. Azt a hangot mondjuk magasabbnak (ill. mélyebbnek), amelynek nagyobb (ill. kisebb) a frekvenciája. Több sajátfrekvencia együttes jelenléte esetén a legnagyobb intenzitású sajátfrekvencia határozza meg a hangmagasságot.

Hangszínezeten azt értjük, hogy azonos magasságú hangok is más-más hangérzetet váltanak ki attól függően, hogy milyen hangforrás szól. Például más a hangszíne a rezgő húr, vagy a rezgő hangvilla hangjának. A hangszínnek a fizikai alapja az, hogy minden hangforrásnak több sajátfrekvenciája van, amelyek közül a legkisebb frekvenciájút alaphangnak, ennek egész számú többszöröseit pedig felhangoknak nevezzük. Az alap- és a felhangok együttes hangzása adja a hangforrás sajátos hangszínét.

Kifeszített rezgő húron, az úgynevezett monokordon az alaphang elfojtása után tanulmányozhatjuk a felhangokat (**40.1. ábra**). Ha a rezgő húrt például libatollal vagy más puha tárggyal középen megérintjük, akkor az alaphang elhal, de az első felharmonikus, a kétszer akkora frekvenciájú hang jól hallhatóan tovább szól.



40.1. ábra

Az emberi fül számára *hallható hangok* frekvenciája körülbelül a 20 Hz–16 kHz tartományba esik. Erről nagyszámú hallgatósággal elvégezhető kísérlettel is meggyőződhetünk, amikor a hanggenerátor keltette hang rezgésszámával „végigpásztázzuk" a fent említett frekvenciatartományt. *A 20 Hz-nél kisebb rezgésszámú hangot infrahangnak, a 16 kHz-nél magasabbat ultrahangnak nevezzük.* (Némely állat, például a denevér, a kutya, a delfin az ultrahang tartományban is hall, a bálnák pedig hallják az infrahangot.)

2. Húrok, lemezek, sípok rezgései; rezgő levegőoszlopok

a) Húrok

Kifeszített rezgő húron állóhullámok alakulnak ki, a húr hangot ad. A lehetséges állóhullámok hullámhossza és a húr hossza közötti kapcsolat szerint

$$l = 2\mathrm{k}\frac{\lambda_\mathrm{k}}{4}, \qquad \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \tag{40.1}$$

ahonnan

$$\lambda_\mathrm{k} = \frac{2l}{\mathrm{k}}, \tag{40.2}$$

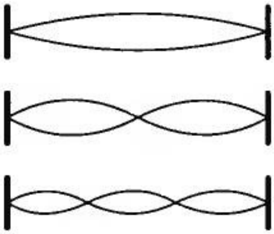
és a húr keltette hang lehetséges frekvenciái az $f = c/\lambda$ képlet alapján

$$f_\mathrm{k} = \frac{c\mathrm{k}}{2l}, \tag{40.3}$$

ahol c a transzverzális hullám terjedési sebessége.

Ily módon a rezgő húr és az általa kibocsátott hang frekvenciáit a következő összefüggéssel adhatjuk meg:

$$\boxed{f_\mathrm{k} = \frac{\mathrm{k}}{2l}\sqrt{\frac{F}{q\rho}}}, \tag{40.4}$$

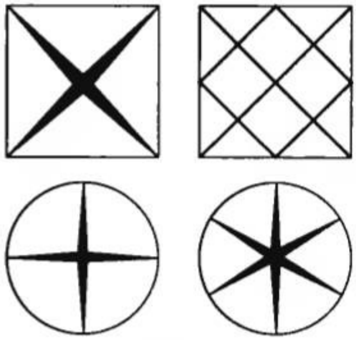


40.2. ábra

ahol F a húrt feszítő erő, ρ a húr anyagának sűrűsége, q a keresztmetszete. (Húros hangszereken a hangolást a feszítés változtatásával érik el.) Rezgő húron kialakuló állóhullámok néhány esetét rögzítettük a **40.2. ábrán**. A húr mint hangforrás kis intenzitással sugároz energiát a levegőbe, mert kis felületen rezegteti meg a levegőt. Ezért a hangerősség növelésére a húrt úgynevezett rezonátordobozra erősítik. Húros hangszereknél a rezonátordoboz szerepét a hangszer teste tölti be.

b) Rezgő lemezek

Rezgő lemezek is használhatók hangforrásként (dob, cintányér stb.). Kísérleti tapasztalat szerint a lemezeken szintén állóhullámok alakulnak ki; a rögzítési helyektől és attól függően, hogy a vonóval hol keltjük a hullámot, a lemezre hintett homokszemcsék változatos formákat alkotó csomóvonalak (nyugalmi helyek) mentén rendeződnek. Ilyen, ún. Chladni-féle porábrákat mutat a **40.3. ábra**. (Ernst CHLADNI német fizikus, 1756–1827.)



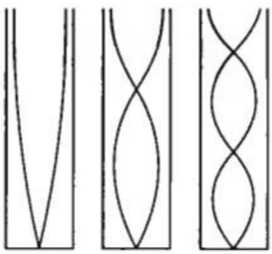
40.3. ábra

c) Sípok

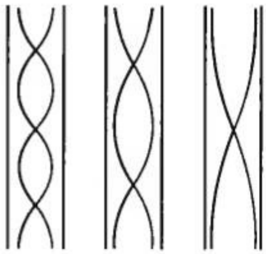
Sípok, rezgő levegőoszlopok ugyancsak lehetnek hangforrások. A síp hangját vagy rezgő lemez, vagy a síp nyílásánál periodikusan leváló légörvény kelti (nyelvsíp és ajaksíp, **40.4.** és **40.5. ábra**). Mindkét esetben a síp levegőoszlopában jönnek létre állóhullámok. A nyitott síp mindkét végén nyitott, a zárt síp egyik végén zárt, a másikon nyitott rezgő levegőoszlopnak tekinthető. A lehetséges állóhullámok néhány típusát zárt, illetve nyitott síp esetén a **40.6.** és a **40.7. ábra** mutatja.

40.4. ábra

40.5. ábra



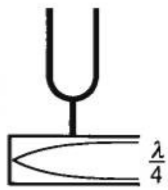
40.6. ábra



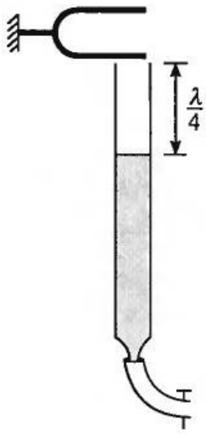
40.7. ábra

3. Levegőoszlopok

A húrhoz hasonlóan a hangvillát is nyílással ellátott dobozra szokták felerősíteni abból a célból, hogy az így egyesített hangforrás nagyobb intenzitással sugározza ki a hangenergiát (**40.8. ábra**). A dobozt és a benne levő levegőt a hangvilla rezgése gerjeszti. Ha a doboz hossza a hangvilla által kibocsátott hang hullámhosszának negyedrészével, $\lambda/4$-gyel, vagy ennek páratlan számú többszörösével egyenlő, akkor a levegőoszlop rezonál az őt gerjesztő hullámforrással, és ilyenkor az egyesített hangforrás a legnagyobb intenzitással szól. Ezt a jelenséget többek között a **40.9. ábra** szerinti kísérlettel demonstrálhatjuk. Az üvegcső fölé erősített rezgő hangvilla



40.8. ábra



40.9. ábra

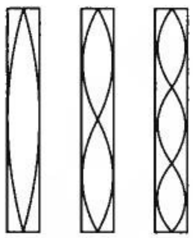
hangja mindannyiszor felerősödik, valahányszor a csőben levő levegőoszlop hossza $\lambda/4$ páratlan számú többszörösével egyenlő. Valóban, ha a csőben levő vizet folyamatosan engedjük ki, a megfelelő hosszaknál periodikusan felerősödő hangot hallunk.

A hangvilla rezonátordobozát a lehető legpontosabban „ráhangolják" a primer hangforrás alaphangjára. A hangszerek testét viszont úgy készítik, hogy egyetlen rezgésszámra se következzék be rezonancia, mert a sok hang közül a rezonáló hang sokkal nagyobb hangerővel szólna. (Néha előfordul, hogy a rádió-, illetve a TV-készülék mély zenei hangokra „berezeg", amitől a zene élvezhetetlenné válik.)

Rezgő levegőoszlopok lehetséges állóhullámtípusaira a **40.6.** és a **40.7. ábra** mutat példát. Ha a cső mindkét végén zárt, mint amilyen például a Kundt-cső, olyan állóhullámok jöhetnek létre, amilyeneket a **40.10. ábra** mutat. (August KUNDT német fizikus, 1839–1894.)

Figyelembe véve minden lehetőséget, a rezgő gázoszlopok lehetséges hullámhosszai, illetve frekvenciái a következő feltételeknek tesznek eleget:

$$\lambda_k = \frac{2l}{k}, \qquad f_k = \frac{ck}{2l}, \qquad k = 1,\ 2, \ldots, \tag{40.5,6}$$



40.10. ábra

ha a levegőoszlop mindkét végén zárt, illetve mindkét végén nyitott, és

$$\lambda_k = \frac{4l}{2k+1}, \qquad f_k = \frac{c(2k+1)}{4l}, \qquad k = 1,\ 2, \ldots, \tag{40.7,8}$$

amikor a gázoszlop egyik végén zárt és a másik végén nyitott. A (40.5,6) és a (40.7,8) formulákban l a gázoszlop hossza, c a hang terjedési sebessége a levegőben.

4. A hang terjedési sebessége gázokban

A levegőben terjedő hang sebességét régen úgy határozták meg, hogy megmérték valamely távoli hangforrás (ágyú, favágó) távolságát az észlelőtől és azt az időt, amely alatt a hang a megfigyelőhöz eljutott. A hang „indulását" a torkolattűz, illetve a favágó fejszecsapása jelentette, az érkezését pedig az észlelés pillanata. Kisebb távolságon, például tanteremben a sebesség megméréséhez mindössze nagyobb érzékenységű, hanggal vezérelhető órára van szükség. Hangszóró által kibocsátott hang indítja az órát, majd az adott távolságban elhelyezett mikrofon felfogja a hangot és az órát megállítja. Szobahőmérsékleten a hang levegőben mért sebessége $c \approx 340$ m/s. (A c ismeretében jól becsülhető a „látható" hangforrás távolsága. Ha pl. a villám fényének megpillantása után a dörgést 3 másodperc múlva halljuk, akkor a villám kb. 1 km távolságban csapott be.)

A hang terjedési sebessége elméletileg meghatározható:

$$\boxed{c=\sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}}, \tag{40.9}$$

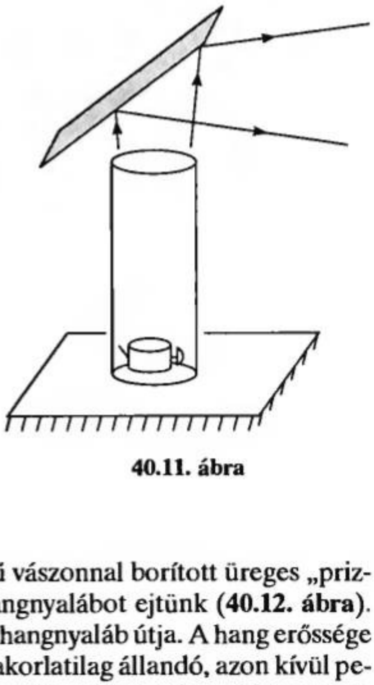
ahol p a gáz nyomása, ρ a sűrűsége, γ pedig az állandó nyomáshoz tartozó fajlagos hőkapacitás (c_p) és az állandó térfogaton vett fajlagos hőkapacitás (c_V) hányadosa (52. §).

5. A hangterjedés sajátosságai

a) Hangvisszaverődés

Üveghengerbe tett óra ketyegése alig hallatszik a teremben (**40.11. ábra**). Ha a henger fölé megfelelő szögben fémlapot helyezünk, akkor a lapról a hallgatóság irányában visszavert hang a terem távoli helyein is jól hallható.

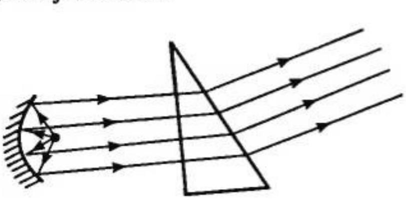
Hangvisszaverődésen alapul a *visszhang*. Két hanghatást akkor észlelünk kettősnek, ha köztük legalább $t = 0{,}1$ s telik el, amely levegőben $s = ct \approx 34$ m hangútnak felel meg. Ebből következik, hogy a visszaverő felületnek a hangforrástól legalább 17 m távolságra kell lennie. Meredek tópartról, távoli épületfalakról, erdőszélről érkező visszhangot több másodperces késéssel is jól lehet hallani. Termekben a visszhang zavarólag hat a beszédre, zenére. Ezért falikárpittal, valamint a falak megfelelő kiképzésével igyekeznek kialakítani a termek jó akusztikáját.



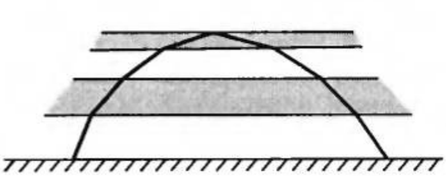
40.11. ábra

b) Hangtörés

Hangtörést kísérletileg úgy mutathatunk be, hogy sűrű vászonnal borított üreges „prizmába" világítógázt töltünk és a prizmára párhuzamos hangnyalábot ejtünk (**40.12. ábra**). A prizma mögött elhelyezett mikrofonnal kitapogatható a hangnyaláb útja. A hang erőssége a megtört párhuzamos nyaláb keresztmetszete mentén gyakorlatilag állandó, azon kívül pedig rohamosan csökken, amint ez a mikrofonnal összekapcsolt oszcilloszkópon a jel nagyságából jól látható.



40.12. ábra

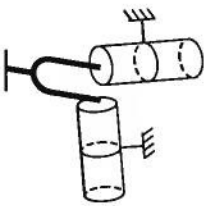


40.13. ábra

Hangtörés következik be a különböző sűrűségű levegőrétegeken is (**40.13. ábra**). Ezért néha előfordul, hogy a több kilométerre haladó vonat füttye, a távoli harangszó stb. a közben levő hangelnyelő hegyek, erdők ellenére is jól hallható.

c) Hanginterferencia

Egymásra merőlegesen elhelyezett $\lambda/4$ hosszúságú rezonátorhengereket hangvillával megszólaltatunk (**40.14. ábra**). Ha az egyiket kartonlappal lezárjuk, a másik – meglepő módon – egyedül erősebben szól, mint a kettő együtt. A szokatlan jelenséget azzal magyarázhatjuk, hogy a hangvilla a két másodlagos hangforrást $\pi/2$ fáziskülönbséggel szólaltatja meg (az egyikben a nyomás növekedésekor a másikban nyomáscsökkenés lép fel és fordítva), ily módon a két rezonátor koherens hangforrásnak tekinthető, amelyek $\pi/2$ fáziskülönbséggel bocsátanak ki hanghullámokat. A hang erősségének ez a megfelelő irányokban észlelhető csökkenése a hanginterferencia eredménye.



40.14. ábra

Jellegzetes interferenciajelenség a *hanglebegés* is. Ha két közeli rezgésszámú (néhány hertz különbségű) hangvillát egyszerre szólaltatunk meg, akkor a hang erőssége időben periodikusan változik, lebeg.

d) Hangelhajlás

Néhány száz hertz rezgésszámú hangok (ilyen frekvenciájú az emberi beszéd is) hullámhossza méter nagyságrendű, tehát az ajtó, ablak nyílásméretével összemérhető. A 38. § 7-ben mondottak szerint, a tapasztalattal egyezően ilyen „réseken", akadályokon hangelhajlás figyelhető meg. (A hang behatol a rés, akadály mögötti „árnyéktérbe", amint ez a mindennapi életből közismert.) Ha fémlemezekből, lécekből néhány cm rácsállandójú rácsot állítunk össze, és rá pl. hanggenerátorral keltett megfelelő frekvenciájú párhuzamos hangnyalábot ejtünk, akkor az oszcilloszkóphoz kapcsolt mikrofonnal a rács mögötti térben periodikusan váltakozó intenzitáseloszlást, maximumokat és minimumokat mérhetünk ki.

6. A hangerősség

a) Ha a P teljesítményű hang a terjedés irányára merőleges A felületen halad át, akkor az *I hangerősség (hangintenzitás):*

$$\boxed{I=\frac{P}{A}}. \tag{40.10}$$

SI-egysége: W/m^2.

b) A hangérzet mértékét a ***hangintenzitásszint*** jellemzi. Ha I a hangintenzitás, I_0 pedig a hangintenzitás alapértéke – amely megállapodás szerint $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 = 1 pW/m^2 –, akkor a dimenzió nélküli, decibel (jele: dB) mértékegységben megadott L_f hangintenzitásszint:

$$\boxed{L_f=\left(10\ \lg\frac{I}{I_0}\right)\mathrm{dB}}. \tag{40.11}$$

A hangintezitásszint tehát egyenesen arányos az I/I_0 relatív inger erősségének a logaritmusával, vagyis érzékszerveink logaritmikus skálabeosztásban dolgoznak ***(Weber–Fechner-féle pszichofizikai törvény).***

c) A ***hangnyomást*** (jele: p) a pillanatnyi és a sztatikus nyomás különbségeként definiáljuk. Mértékegységei megegyeznek a nyomás egységeivel.

d) A hangnyomástól megkülönböztetjük a ***hangnyomásszintet*** (jele: L_p), amely dimenzió nélküli, decibelben megadott, logaritmikus jellegű egyezményes skála alapján értelmezett mennyiség:

$$\boxed{L_p = \left(20\ \lg \frac{p}{p_0}\right) \mathrm{dB}}\ ; \quad p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa} = 20\ \mu\mathrm{Pa}. \tag{40.12}$$

(A 20-as szorzótényező onnan adódik, hogy az I hangintenzitás a p hangnyomás négyzetével arányos: $I \sim p^2$.)

e) A ***hangosságszint*** (jele: L_N) élettani hangosságmérték, amely 1 kHz (= 1000 Hz) frekvencián a decibelben kifejezett hangnyomásszinttel egyenlő. Dimenzió nélküli logaritmikus mennyiség, amelyet SI-n kívüli phon (kiejtése: fon) mértékegységben fejeznek ki:

$$L_N = 20\ \lg \left(\frac{p_{\mathrm{eff}}}{p_{0,\mathrm{eff}}}\right)_{1\,\mathrm{kHz}} \mathrm{phon}\ ; \quad p_{0,\mathrm{eff}} = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa} = 20\ \mu\mathrm{Pa}. \tag{40.13}$$

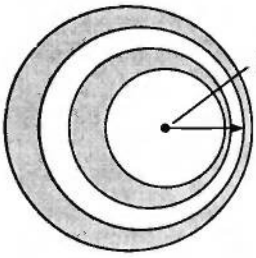
A (40.12,13) definíciók szerint tehát az 1 kHz-es hang phonban mért hangosságszintje és a decibelben mért hangnyomásszintje számértékileg megegyezik, más frekvenciájú hangokra azonban ez már nem áll fenn.

A (40.13)-ban p_{eff} annak az 1 kHz frekvenciájú hangnak a nyomása, amelyet sok, ép hallású személy ugyanolyan hangosnak ítél, mint a vizsgált hangot.

Fülünk a 3000 Hz körüli hangokra a legérzékenyebb. Az emberi fül tapasztalat szerint a 0–130 phon tartományt fogja át. 130 phon hangosságszintű zajnál a hang már fájdalmat okoz, elviselhetetlenné válik, ezért ezt a hangosságszintet fájdalomküszöbnek nevezzük. Hallószervünk tartós igénybevétel esetén már a 90–100 phon hangosságszintű zajtól károsodik. Ezért a zajos gépek (szövőgép, légkalapács, kovácsolóműhely) mellett dolgozó munkások egészségvédelméről különböző fülvédő eszközökkel gondoskodnak. Napjainkban a nagyváros utcazaja is elérte azt a szintet, amely a hallás tartós károsodásához vezethet.

7. Hullámjelenségek mozgó hullámforrás esetén. Doppler-effektus

Amikor a hullámforrás mozog a közeghez képest, a közegben terjedő hullámok azonos fázisú felületei vagy görbéi a hullámforrás haladási irányában sűrűbben, az azzal ellentétes irányban ritkábban követik egymást. Nagyon jól megfigyelhető ez a jelenség például a hullámkádban keltett hullámoknál. Ha a pontszerű hullámkeltőt állandó sebességgel végighúzzuk a kád hosszában, látható, hogy a forrás mozgásakor előtte hullámhossz-rövidülés, mögötte hullámhossz-növekedés jön létre (**40.15. ábra**). A fázisgörbék most nem koncentrikus



40.15. ábra

körök, mint a nyugvó hullámforrás esetén, hanem olyan körök, amelyeknek középpontjai a mozgás irányában eltolódnak. Mozgó hullámforrásnál az észlelt frekvencia eltér a kibocsátottól. Ezt a jelenséget ***Doppler-effektusnak*** nevezzük. Igaz, hogy ez a hatás az előbbi feltétel mellett minden hullámjelenségnél megfigyelhető, mégis a hangtanban tárgyaljuk, mert hanghullámok esetén különösen szembetűnő. A közeledő vonat füttyét magasabbnak halljuk, mint amikor már távolodik tőlünk. Ha a gumicsövön keresztül megszólaltatott sípot vízszintes síkban körbeforgatjuk, a hallott hang magassága a fordulatszám periódusában változik. (Christian DOPPLER osztrák fizikus, 1803–1853.)

Elemi számolással igazolható, hogy az álló megfigyelő a hozzá közeledő (ill. távolodó) f frekvenciájú hullámforrás jelét

$$\boxed{f' = f\frac{c}{c-v}, \quad \left(\text{ill.} \quad f' = f\frac{c}{c+v}\right)} \tag{40.14}$$

frekvenciaként észleli (c az adott közegben a hullám terjedési sebessége).

Álló hullámforráshoz u sebességgel közeledő (ill. távolodó) megfigyelő számára a mért frekvencia az

$$\boxed{f'' = f\frac{c+u}{c}, \quad \left(\text{ill.} \quad f'' = f\frac{c-u}{c}\right)} \tag{40.15}$$

összefüggéssel adható meg.

II. rész

TERMODINAMIKA ÉS MOLEKULÁRIS FIZIKA

Írta: DR. LITZ JÓZSEF

A ***termodinamika*** a fizikatudománynak a hőről szóló fejezeteként alakult ki azzal a gyakorlati igénnyel, hogy a hőerőgépek működésének elvi alapjait megtalálják. Tárgyköre az elmúlt két évszázad során jelentősen kibővült. Ma a termodinamika mindazokat a jelenségeket vizsgálja, amelyekben belső energiával kapcsolatos folyamatok mennek végbe (hőerőgépek, hűtőgépek, kémiai reakciók, biológiai folyamatok stb.). Tárgyalásmódja fenomenologikus: a makroszkopikus (szabad szemmel vagy más érzékszervünkkel közvetlenül észlelhető, ill. érzékelhető) anyagot folytonosnak tekintve állapítja meg általános érvényű főtételeit, ill. ezekből von le következtetéseket. Ezzel szemben a ***molekuláris fizika*** a makroszkopikus anyagot felépítő nagyszámú részecske mozgásával, kölcsönhatásával és eloszlásával értelmezi az anyagi tulajdonságokat.

A következőkben a termodinamikát és a molekuláris fizikát az alábbi felosztás szerint tárgyaljuk:

II. A) ***Hőmérséklet és hőtágulás***
II. B) ***Molekuláris fizika***
II. C) ***A termodinamika első főtétele és néhány következménye***
II. D) ***A termodinamika második főtétele és az entrópia***
II. E) ***Fázisátalakulások és fázisegyensúlyok***

II. A) HŐMÉRSÉKLET ÉS HŐTÁGULÁS

41. § A hőmérséklet

Amíg a mechanikában elegendő három alapmennyiség (hosszúság, tömeg, idő) felvétele, addig a hőjelenségek leírására újabb alapmennyiség, a hőmérséklet bevezetése vált szükségessé.

1. A hőmérséklet fogalma és a termodinamika nulladik főtétele

Az anyagok hőállapotát (melegedettségi fokát) bőrünk egyes idegsejtjei (termoreceptorai) érzékelik, amit a hideg, langyos, meleg, forró szavakkal fejezünk ki. A melegebb anyagokat magasabb, a hidegebbeket alacsonyabb hőmérsékletűnek mondjuk. Ez a szubjektív (érzés szerinti) hőmérséklet-fogalom azonban alkalmatlan a hőállapot mennyiségi (számszerű) jellemzésére. Három fontos tapasztalat viszont lehetőséget ad az érzékszerveinktől független hőmérséklet értelmezésére és mérésére.

a) Felmelegedéskor vagy lehűléskor megváltozik az anyagok fizikai tulajdonságait jellemző legtöbb mennyiség. Pl. megváltozik az anyagok térfogata, nyomása, elektromos ellenállása, optikai törésmutatója, és ezek a változások a hőállapot-változást jellemző hőmérséklet-változással arányosak.

b) Ha két különböző hőmérsékletű anyag egymással közvetlenül érintkezik, akkor a melegebb anyag lehűl, a hidegebb pedig felmelegszik, végül hőmérsékleti (termikus) egyensúly jön létre, beáll a közös hőmérséklet. Ezt a fontos tapasztalatot fejezi ki a ***termodinamika nulladik főtétele***, amelyet Constantin CARATHÉODORY [kárátéodori] (1873–1950) görög származású német fizikus ismert fel (1909).

c) Előállíthatók jól reprodukálható (újra előállítható) hőállapotok, illetve hőmérsékletek, mint pl. adott nyomás mellett a jég olvadáspontja vagy a forrásban levő víz gőzének hőmérséklete.

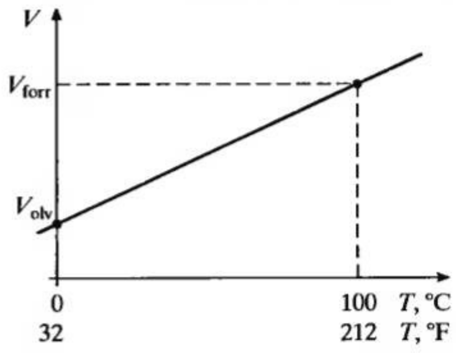
E három tapasztalat alapján készíthetők hőmérsékletmérő eszközök (hőmérők), és építhetők ki különböző fizikai mennyiségekkel definiált, anyagi minőségtől függő ***empirikus (ta-***

pasztalati) hőmérsékleti skálák, mint amilyen a Celsius-skála, az ideálisgáz-skála és a nemzetközi gyakorlati hőmérsékleti skála.[1]

2. Empirikus hőmérsékleti skálák

a) A Celsius-féle empirikus hőmérsékleti skála; a Celsius-fok bevezetése

A leggyakrabban használt *folyadékhőmérőkben* a folyadék (általában higany vagy színezett alkohol) egy kis tartályt tölt meg, amely vékony üvegcsőben folytatódik. A hőmérséklet változásakor a hőmérő munkaközegének V térfogata – feltételezésünk szerint – lineárisan változik a T hőmérséklettel, és a térfogatváltozást az üvegcső jól látható hosszúságváltozássá alakítja át. A hőmérő hitelesítésére (kalibrálására) alappont gyanánt a normális légköri nyomáson (p_0 = 101,325 kPa) olvadó jég hőmérsékletét (normális olvadáspontját) és a forrásban levő víz gőzének hőmérsékletét (normális forráspontját) választották. E két alappont hőmérséklete az általánosan használt *Celsius-féle skálán* T_{olv} = 0 °C és T_{forr} = 100 °C,[2] a Nagy-Britanniában és az Egyesült Államokban gyakran használt *Fahrenheit-féle skálán* pedig 32 °F és 212 °F (**41.1. ábra**).[3,4] Ennek megfelelően a két alappont hőmérséklet-különbsége 100 °C, ill. 212 °F – 32 °F = 180 °F. Az alappontokhoz rendelt különböző hőmérsékletértékek folytán a T_C Celsius- és a T_F Fahrenheit-hőmérsékletek között a



41.1. ábra

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32°, \qquad \text{ill.} \qquad T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) \qquad (41.1,2)$$

összefüggés áll fenn. Így pl. az emberi test 37 °C-os hőmérsékletének 98,6 °F felel meg. [Anders CELSIUS [celziusz] (1701–1744) svéd csillagász. Daniel FAHRENHEIT [fárenhejt] (1686–1736) német fizikus.]

Megjegyzések:

– A hőmérséklet – hasonlóan pl. a nyomáshoz – *intenzív fizikai mennyiség*, mert értéke független az anyag tömegétől és térfogatától. (Ezzel szemben az *extenzív mennyiségek* az

[1] Az 54. § 5-ben ismertetésre kerülő termodinamikai hőmérsékleti skála általános érvényű, független a hőmérő anyagi minőségétől.

[2] °C-ot olvasd: Celsius- [celziusz-] fok.

[3] °F-ot olvasd: Fahrenheit- [fárenhejt-] fok.

[4] A Celsius- és a Fahrenheit-skálán a hőmérséklet jele: t. Mi ettől eltérünk, a hőmérsékletet – a hőmérsékleti skálától függetlenül – egységesen T-vel jelöljük.

anyag különböző részeire vonatkozó értékek összegeként adódnak, pl. térfogat, tömeg, energia.)

– A hőmérséklet mérésére minden olyan fizikai mennyiség alkalmas, amelynek változása többé-kevésbé egyenesen arányos a hőmérséklet-változással. Jól felhasználhatók a következő változásokon alapuló hőmérők: *a)* szilárd anyagok és folyadékok hőtágulása (42. § 1,2.); *b)* gáz nyomásának és térfogatának változása (43. § 2.); *c)* az elektromos ellenállás változása (77. § 4.); *d)* termoáram erősségének változása (85. § 1.); *e)* hevített fémszálakban bekövetkező színváltozások (133. §); *f)* testek hőmérsékleti sugárzása (133. § 4.).

– A folyadékhőmérők folyadékszála mellé helyezett skálán jelölik ki a folyadékszál hosszával arányos hőmérsékleti alappontokat, és az alappontok között meghatározott számú, egyenlő hosszúságú közökkel jelzett hőmérsékleteket.

– A folyadékhőmérő folyadékának térfogata, ill. a folyadékszál hossza nem pontosan lineáris függvénye a hőmérsékletnek. Ez az oka annak, hogy a különböző folyadékot tartalmazó folyadékhőmérők csak az alappontokban mutatnak azonos hőmérsékletet, minden más esetben a mért hőmérsékletek 1–2 °C eltérést is mutathatnak.

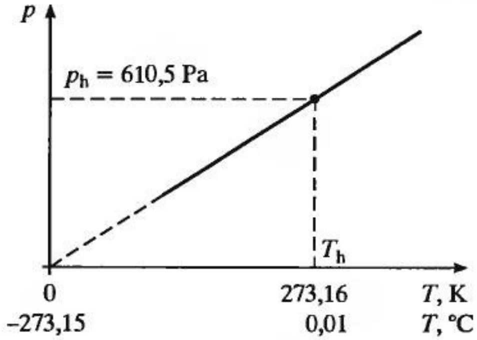
– A higanyos hőmérő mérési tartománya –30 °C és +280 °C, a színezett etil-alkoholos hőmérőé –110 °C és +50 °C között van.

– A közismert lázmérő is higanyos hőmérő.

– A hőmérők csak olyan hőmérséklet-tartományban használhatók, ahol a mérőközeg nem szenved ún. fázisátalakulást, pl. halmazállapot-változást (61., 62. §).

– A hőmérők a mérendő anyag hőmérsékletét gyakorlatilag csak akkor nem változtatják meg, ha hőkapacitásuk elhanyagolható a mérendő anyag hőkapacitásához képest (50. § 3.).

b) Az ideálisgáz-skála; a kelvin hőmérsékletegység bevezetése



41.2. ábra

Az állandó térfogatú edényben, az ún. *gázhőmérőben* levő ideális gáz[5] p nyomása egyenesen arányos a gáz T hőmérsékletével. Diagramja a p–T koordináta-rendszerben (más szóval: p–T állapotsíkon) olyan egyenes, amely $T_0 =$ $= -273{,}15$ °C-ra mint univerzálisan (egyetemesen) legalacsonyabb hőmérsékletre extrapolálható (**41.2. ábra**). Lord KELVIN (William THOMSON [tomszon], 1824–1907) skót fizikus nyomán ezt a legalacsonyabb hőmérsékletet az ideálisgáz-skála egyik alappontjának választjuk (1852). Választás szerint a másik alappont az

[5] *Ideálisnak* (a kémiában szokásos elnevezéssel: tökéletesnek) akkor tekintjük a gázt, ha részecskéi – eltekintve az egymással való ütközéskor fellépő, nagyon rövid ideig ható erőktől – egymásra erőt nem fejtenek ki, és térfogatuk a rendelkezésükre álló edény térfogatához képest elhanyagolható. Azokat a gázokat pedig, amelyeknek részecskéi egymásra erőt fejtenek ki és saját térfogatuk nem hanyagolható el, *reális* (valódi) *gázoknak* nevezzük. A legtöbb gáz a szobahőmérséklet (25 °C) környezetében és kb. 10^5 Pa nyomáson igen jó közelítéssel ideális gázként viselkedik.

egyensúlyban levő víz, vízgőz és jég jól reprodukálható, ún. hármaspontjához tartozó 0,01 °C hőmérséklet, amelyhez p_h = 610,5 Pa hármasponti nyomás tartozik (62. § 1.). KELVIN a T_0 = –273,15 °C-ot 0 K-nek (olvasd: nulla kelvinnek) választotta, s így a víz hármaspontjának hőmérsékletére T_h = 0,01 °C = (273,15 + 0,01) K = 273,16 K adódott. Mivel a két alappont hőmérsékletének különbsége $T_h - T_0$ = 273,16 K, ezért a hőmérséklet (pontosabb kifejezéssel: termodinamikai hőmérséklet) SI-egysége, vagyis a kelvin (jele: K) a víz hármaspontja termodinamikai hőmérsékletének 1/273,16-szorosa.

Az ideálisgáz-skála fokbeosztása megegyezik a Celsius-skála fokbeosztásával. A két hőmérsékleti skála között csak alappont-eltolódás van. A kelvinben (K) kifejezett T hőmérséklet és a Celsius-fokban (°C) megadott T_C hőmérséklet között

$$\boxed{T = \left(\{T_C\} + 273{,}15\right)\mathrm{K} \approx \left(\{T_C\} + 273\right)\mathrm{K}} \qquad (41.3)$$

összefüggés áll fenn. (Kapcsos zárójellel a mennyiség számértékét jelöltük). Pl. 25 °C hőmérsékletnek (25 + 273) K = 298 K felel meg. A Celsius-fokban és a kelvinben megadott hőmérsékletek különbségének számértéke azonban mindig megegyezik, pl. 27 °C és 7 °C különbsége 20 °C, a nekik megfelelő 300 K és 280 K különbsége 20 K.

c) A nemzetközi gyakorlati hőmérsékleti skála

A termodinamikai hőmérsékleti skála (54. § 5.) és az ideálisgáz-skála méréstechnikai célokra nehezen alkalmazható. Ezért vezették be a hozzájuk jól illeszkedő ***nemzetközi gyakorlati hőmérsékleti skálát***, amelyhez a víz hármaspontján és forráspontján kívül még 9 hőmérsékleti alappontot rendeltek (1968).[6]

Végül a hőmérséklettel kapcsolatban megemlítünk néhány hőmérsékletértéket. Az előállított legalacsonyabb hőmérséklet 10^{-8} K körül van. Normális légköri nyomáson a hélium forráspontja 4,2 K, a hidrogéné 20 K, a nitrogéné 77 K, a vízé 373 K. A jég olvadáspontja 273 K. Földünkön a mért legalacsonyabb hőmérséklet –89,2 °C (Antarktisz), a legmagasabb hőmérséklet pedig 57,8 °C (Líbia). A Nap fotoszférájának (légköre legalsó rétegének) hőmérséklete mintegy 5800 K. A csillagok belsejében $10^7 - 10^8$ K hőmérséklet uralkodik.

42. § Szilárd testek és folyadékok hőtágulása

1. Anyagukban homogén (egynemű) és izotrop szilárd testek hőtágulása

Izotropnak mondjuk azokat a szilárd testeket, amelyeknek fizikai jellemzői a tér bármely irányában azonosak. A következőkben csak az ilyen szilárd testek hőtágulását vizsgáljuk, és megkülönböztetünk vonalas, felületi és térfogati hőtágulást.

---

[6] L. pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 2. § 5. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

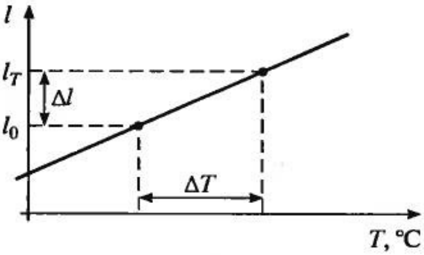
a) Szilárd testek lineáris (vonalas) hőtágulása

A hosszukhoz képest kis átmérőjű szilárd testeket vonalas testeknek (lineáris testeknek, huzaloknak, rudaknak) nevezzük. Ha egy ilyen vonalas test hossza T_0 kiindulási hőmérsékleten (általában 0 °C-on vagy 20 °C-on) l_0, T hőmérsékleten pedig l_T, akkor a tapasztalat szerint az $(l_T - l_0)/l_0 = \Delta l/l_0$ relatív hosszváltozás egyenesen arányos a $T - T_0 = \Delta T$ hőmérséklet-változással. Az ezt kifejező ***lineáris hőtágulási törvény:***

$$\boxed{\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha\,\Delta T}\,, \qquad (42.1)$$

ahol α a test anyagi minőségére jellemző mértékegységes szám, az ún. közepes *lineáris (vonalas) hőtágulási együttható.*[7]

A lineáris hőtágulási együttható megmutatja az egységnyi hőmérséklet-változáshoz tartozó $\Delta l/l_0$ relatív hosszváltozást; – SI-egysége az egy per kelvin, jele: 1/K, SI-n kívüli törvényes egysége: 1/°C; – értéke kb. $10^{-5} - 10^{-6}$ 1/K, ill. $10^{-5} - 10^{-6}$ 1/°C; – melegítéskor táguló anyagok (pl. fémek) esetén $\alpha > 0$, összehúzódó anyagokra (kaucsuk, láva, legtöbb kőzet) pedig $\alpha < 0$.



42.1. ábra

A (42.1) lineáris hőtágulási törvény a $\Delta l = l_T - l_0$ figyelembevételével

$$\boxed{l_T = l_0(1+\alpha\Delta T)} \qquad (42.2)$$

alakban is írható, amely matematikailag egy egyenes egyenlete és az l–T koordináta-rendszerben egyenessel szemléltethető **(42.1. ábra)**.

b) Szilárd testek felületi hőtágulása

Ha T_0 kiindulási hőmérsékleten pl. egy a_0, b_0 oldalhosszúságú téglalap felülete $A_0 = a_0 b_0$, T hőmérsékleten pedig $A_T = a_T b_T$, akkor – a (42.2) lineáris hőtágulási törvényt felhasználva – a ***felületi hőtágulási törvény:***

$$A_T = a_T b_T = a_0(1+\alpha\Delta T)b_0(1+\alpha\Delta T) = a_0 b_0(1+\alpha\Delta T)^2 =$$
$$= A_0[1+2\alpha\Delta T + (\alpha\Delta T)^2]. \qquad (42.3)$$

Mivel α nagyon kicsi, ezért a négyzetes tag elhagyható, s így

$$\boxed{A_T = A_0(1+2\alpha\Delta T)}\,, \qquad (42.4)$$

ahol 2α a közepes *felületi hőtágulási együttható.*

[7] A lineáris hőtágulási törvény $|\Delta T| = |T - T_0| > 100$ °C esetén módosításra szorul.

c) Szilárd testek térfogati (köbös) hőtágulása

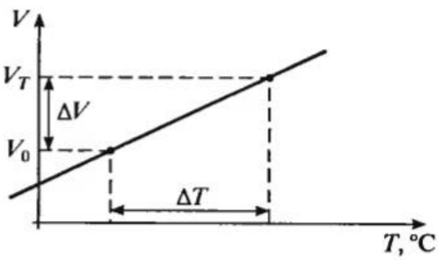
A felületi hőtáguláshoz hasonlóan tárgyalható a térfogati hőtágulás is. Ha pl. T_0 hőmérsékleten egy a_0, b_0, c_0 élhosszúságú téglatest térfogata $V_0 = a_0 b_0 c_0$, akkor az egyes élek vonalas hőtágulása folytán T hőmérsékleten a téglatest térfogata:

$$V_T = a_T b_T c_T = a_0(1+\alpha\Delta T)b_0(1+\alpha\Delta T)c_0(1+\alpha\Delta T) = a_0 b_0 c_0 (1+\alpha\Delta T)^3 =$$
$$= V_0[1+3\alpha\Delta T + 3(\alpha\Delta T)^2 + (\alpha\Delta T)^3]. \tag{42.5}$$

Mivel α nagyon kicsi, ezért a négyzetes és a köbös tag elhagyható, s így

$$\boxed{V_T = V_0(1+3\alpha\Delta T)}, \tag{42.6}$$

ahol $3\alpha = \alpha_V$ (régebbi jele: β) a *térfogati hőtágulási együttható*. Ez a (42.6) térfogati hőtágulási törvény a V–T koordináta-rendszerben egyenessel szemléltethető (**42.2. ábra**).



42.2. ábra

A szilárd testek hőtágulásának számos gyakorlati vonatkozása van. – Régebben a vasúti és a villamos sínszakaszok között hézagokat vagy hosszanti (kissé ívelt) hasítékokat hagytak a szabad tágulás biztosítására. Újabban a síneket összehegesztik és betontalpakhoz rögzítik. Ez utóbbiak képesek ellenállni a sínek hosszváltozásakor fellépő erőknek. – A vashidak egyik vége görgőkön nyugszik, hogy a híd alakja hőtágulás közben ne változzon. – Üvegekbe (pl. vákuumcsövekbe) és betonba csak együtt táguló, vagyis azonos hőtágulási együtthatójú fémek ágyazhatók (pl. vasbeton). – Úgyszintén a lakk- és zománcrétegek, valamint a velük bevont tárgyak, továbbá a fog és a fogzománc azonos hőmérsékleti együtthatójúak. – Távhővezetékekbe görbületeket iktatnak, és ezzel lehetőséget biztosítanak a hőtágulásra. – A két különböző vonalas hőtágulási együtthatójú fémszalag (bimetall, kettős fém, ikerfém) a hőmérséklet-változással arányos mértékben meggörbül. Ez alapján működnek a hőmérsékletet regisztráló (feljegyző) termográfok és az elektromos áramköröket be- vagy kikapcsoló hőrelék (jelfogók). – Az igen kis hőtágulási együtthatójú anyagok ($\alpha \approx 10^{-6}$ 1/K) méretváltozása többnyire elhanyagolható (kerámiaanyagok, tűzálló üvegek, 36% Ni + 64% Fe összetételű invar ötvözet).

2. Folyadékok hőtágulása

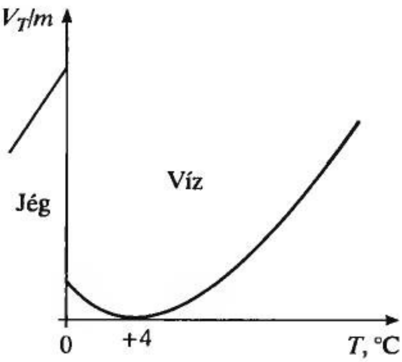
Folyadékok hőtágulására általában a szilárd testek térfogati hőtágulásával megegyező alakú törvény érvényes:

$$\boxed{V_T = V_0(1+\alpha_V\Delta T)}, \tag{42.7}$$

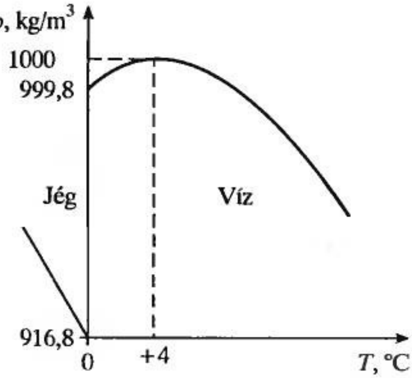
ahol $\alpha_V \approx 10^{-3} - 10^{-4}$ 1/K, ill. $10^{-3} - 10^{-4}$ 1/°C a folyadék *térfogati hőtágulási együtthatója*.

3. A víz különleges viselkedése

A víz nem követi a folyadékokra általában érvényes (42.7) térfogati hőtágulási törvényt. V_T térfogata és egységnyi tömegre vonatkoztatott V_T/m fajlagos térfogata nem lineárisan változik a T hőmérséklettel (**42.3. ábra**). Fajlagos térfogata +4 °C-on a legkisebb, (tömeg-) sűrűsége pedig a legnagyobb (**42.4. ábra**). Ennek igen nagy jelentősége van a természetben. Az őszi lehűlés során, +4 °C-ig a tavak felszínének (tömeg-) sűrűsége növekszik és a vízréteg lesüllyed. Ez mindaddig tart, amíg a teljes vízmennyiség el nem éri a +4 °C-os hőmérsékletet, ill. a maximális (tömeg-) sűrűséget. A további lehűlés során, 0 °C-ig csak a felszíni vízréteg (tömeg-) sűrűsége csökken, nem süllyed le, majd megfagy. A keletkező jég – rossz hővezető lévén – megakadályozza a nagyobb tavak és folyók teljes befagyását, s így a vízi élőlények nem pusztulnak el.



42.3. ábra



42.4. ábra

A fagyáskor táguló (növekvő térfogatú) víz szétrepeszti a vele töltött edényt, a vízvezetéket és a sejtmembránt. – A víznek fagyáskor bekövetkező térfogat-növekedése igen nagy jelentőségű a földfelszín alakulásában: a kőzetek repedéseiben és pórusaiban tárolt víz megfagyva szétfeszíti a sziklákat. – A talajban a váltakozó olvadás–fagyás egyrészt a lejtés irányában talajfolyást okoz, másrészt széttépi a növények gyengébb gyökérzetét. – A tavasszal melegedő jég térfogat-növekedése folytán romboló hatású, és a tavak jege a partra tolul.

A vízhez hasonlóan viselkedik a lehűlő öntöttvas is, és ezért jól kitölti az öntőformát.

43. § Gázok hőtágulása

A gáztörvények tárgyalása előtt áttekintjük azokat a fizikai-kémiai alapismereteket, amelyekkel a termodinamikában és a molekuláris fizikában gyakran találkozunk.

– Az ***anyagmennyiség*** (jele: n) a Nemzetközi Mértékegységrendszer (SI) alapmennyisége; – SI-egysége a mól (hosszú ó-val ejtendő), jele: mol (rövid o-val). Meghatározása: 1 mol annak az anyagnak az anyagmennyisége, amely annyi elemi egységet (atomot, molekulát, iont, elektront stb. vagy ilyeneknek speciálisan meghatározott csoportját, pl. NaCl-ot, C–C kémiai kötést) tartalmaz, mint ahány atom van a 0,012 kg (= 12 g) tömegű 12-es tömegszámú szénizotópban. Ajánlott prefixált SI-egységei: kmol, mmol, μmol (1 kmol = 10^3 mol, 1 mmol = 10^{-3} mol, 1 μmol = 10^{-6} mol).

– Az ***Avogadro-állandó*** (jele: N_A) az anyagot felépítő részecskék N számának és az n anyagmennyiségnek a hányadosa:

$$\boxed{N_A = \frac{N}{n}}. \tag{43.1}$$

Az Avogadro-állandó megmutatja az egységnyi anyagmennyiségű anyagban található részecskék számát; – SI-egysége az egy per mól, jele: 1/mol; – értéke bármely anyagra:

$$\boxed{N_A = 6{,}022\,045 \cdot 10^{23}\ 1/\text{mol} \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}\ 1/\text{mol}}. \tag{43.2}$$

– Az Avogadro-állandó számértékét, vagyis a $6{,}02 \cdot 10^{23}$ számot ***Avogadro-számnak*** nevezik. [Amadeo AVOGADRO (1776–1856) olasz fizikus.]

– ***Moláris tömegen*** (jele: M) értjük az anyag m tömegének és n anyagmennyiségének a hányadosát:

$$\boxed{M = \frac{m}{n}}. \tag{43.3}$$

A moláris tömeg megmutatja az egységnyi anyagmennyiségű anyag tömegét; – SI-egysége a kilogramm per mól, jele: kg/mol. Meghatározása: 1 kg/mol a moláris tömege az 1 mol anyagmennyiségű és 1 kg tömegű anyagnak. Ajánlott SI-egysége: g/mol. – Pl. a kétatomos molekulákból álló oxigén moláris tömege $M = 32 \cdot 10^{-3}$ kg/mol = 32 g/mol, és azt mutatja meg, hogy 1 mol molekuláris (kétatomos) oxigén tömege $32 \cdot 10^{-3}$ kg = 32 g.

– ***Moláris térfogat*** (jele: V_m) az adott anyag V térfogatának és n anyagmennyiségének a hányadosa:

$$\boxed{V_m = \frac{V}{n}}. \tag{43.4}$$

A moláris térfogat megmutatja az egységnyi anyagmennyiségű anyag térfogatát; – SI-egysége a köbméter per mól, jele: m³/mol. Meghatározása: 1 m³/mol a moláris térfogata az 1 mol anyagmennyiségű és 1 m³ térfogatú anyagnak. Ajánlott prefixált SI-egysége: m³/kmol. Megengedett prefixált SI-egységei: dm³/mol, cm³/mol.

– A fizikában igen gyakran használjuk a ***normálállapot*** fogalmát. Egy fizikai rendszert általában akkor tekintünk normálállapotúnak, ha hőmérséklete T_0 = 273,15 K (= 0 °C) és nyomása p_0 = 101 325 Pa (= 101,325 kPa), vagyis megegyezik a normális légköri nyomással (az ún. fizikai atmoszférával). Ekkor a gázok térfogatát V_0 ***normáltérfogatnak***, a V_0 normáltérfogatnak és az n anyagmennyiségnek a $V_{m,0}$ hányadosát pedig ***normál moláris térfogatnak*** nevezzük. Értéke ideális gázokra:

$$\boxed{V_{m,0} = \frac{V_0}{n} = (22{,}413\,83 \pm 0{,}000\,70) \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{mol} \approx 22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{mol}}. \tag{43.5}$$

Ez azt jelenti, hogy az $n = 1$ mol anyagmennyiségű ideális gázok térfogata normálállapotban mindig $V_0 = 22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 22{,}41\ \text{dm}^3$.

– ***Részecskeszám-sűrűségen*** (jele: n_r) értjük az anyagot alkotó részecskék N számának és a rendelkezésükre álló V térfogatnak a hányadosát:

$$\boxed{n_r = \frac{N}{V}}\,. \tag{43.6}$$

A részecskeszám-sűrűség (pontatlanabb kifejezéssel: részecskesűrűség) rendszerint a részecske jellegére utaló alakban használatos, pl. molekulaszám-sűrűség, elektronszám-sűrűség (pontatlanabbul: molekulasűrűség, elektronsűrűség); – megmutatja az egységnyi térfogatban található részecskék (atomok, molekulák, ionok, elektronok stb.) számát; – SI-egysége az egy per köbméter, jele: $1/\text{m}^3$. Megengedett prefixált SI-egységei: $1/\text{dm}^3$, $1/\text{cm}^3$.

– ***Egyetlen részecske tömege*** (jele: μ) az anyag m tömegének és az anyagot felépítő részecskék N számának a hányadosa:

$$\boxed{\mu = \frac{m}{N}}\,. \tag{43.7}$$

– A felsorolt fizikai mennyiségek között fontos ***összefüggések*** még az alábbiak:

$$\boxed{m = nM = \mu N = \mu n N_A = \mu n_r V = \rho V}\,, \tag{43.8–12}$$

ahol ρ az adott anyag (tömeg-) sűrűsége.

1. Az ideális gáz állapothatározói és állapotegyenletei

a) Az állandó anyagmennyiségű (ill. tömegű) ideális gáz állapotát a p nyomás, a V térfogat, a T hőmérséklet és az n anyagmennyiség jellemzi. *Ezeket termodinamikai paramétereknek (állapothatározóknak, állapotjelzőknek)* nevezzük.

b) A tapasztalat szerint az n anyagmennyiségű, ideálisnak tekinthető gáz állapothatározói között

$$\boxed{pV = nRT} \tag{43.13}$$

összefüggés áll fenn, amely az ***ideális gázok termikus állapotegyenlete***. Azt fejezi ki, hogy bármely ideális gáz összetartozó p nyomásának és V térfogatának a szorzata egyenesen arányos a gáz n anyagmennyiségével és kelvin egységben megadott T hőmérsékletével, R pedig a *moláris gázállandó* (régebbi neve: egyetemes gázállandó). Ez utóbbi kiszámítható azon tapasztalat alapján, hogy az $n = 1$ mol anyagmennyiségű, $p = p_0 = 101\,325$ Pa nyomású és $T = T_0 = 273{,}15$ K hőmérsékletű, vagyis normálállapotú ideális gáz térfogata $V = V_0 = 22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$. Ekkor a (43.13) termikus állapotegyenlet alapján

$$\boxed{R = \frac{p_0 V_0}{nT_0} = \frac{101325\,\text{Pa} \cdot 22{,}41 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{1\,\text{mol} \cdot 273{,}15\,\text{K}} = 8{,}31\,\text{J/(mol} \cdot \text{K)}}, \tag{43.14}$$

és azt mutatja meg, hogy 1 mol ideális gáz 1 K hőmérséklet-változásához 8,31 J energia szükséges.

Gyakran használjuk az R moláris gázállandó és az N_A Avogadro-állandó hányadosát, a

$$\boxed{k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}31\,\text{J/(mol} \cdot \text{K)}}{6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{1/mol}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}} \tag{43.15}$$

Boltzmann-állandót is. [Ludwig BOLTZMANN [bolcman] (1844–1906) osztrák fizikus.]

c) A (43.8–12)-ben megadott összefüggésekkel és a Boltzmann-állandóval az ideális gázok termikus állapotegyenlete többféle alakban is írható:

$$\boxed{pV = nRT = \frac{m}{M} RT}, \quad \boxed{pV = nRT = \frac{N}{N_A} RT = NkT}, \tag{43.16,17}$$

$$\boxed{p = \frac{m}{VM} RT = \frac{\rho}{M} RT}, \quad \boxed{p = \frac{N}{V} kT = n_r kT}. \tag{43.18,19}$$

Példaként megemlítjük, hogy – a (43.18) alapján – a gázoknak a hőmérséklettel fordítva arányos (tömeg-) sűrűségével magyarázható a *hőlégballon* mozgása. Melegítéskor a ballonban levő levegő (tömeg-) sűrűsége csökken, a környezet (tömeg-) sűrűsége viszont változatlan marad. A hőlégballont a környezet és a ballon (tömeg-) sűrűségének különbségével arányos felhajtóerő emeli a magasba (34. §).

Úgyszintén a (43.18) állapotegyenletből adódik, hogy az ideális gázok $M = \rho RT/p$ moláris tömegének meghatározása visszavezethető ρ (tömeg-) sűrűség-, T hőmérséklet- és p nyomásmérésre.

d) Ha egy adott ideális gáz két különböző egyensúlyi állapotban fordul elő, akkor a (43.13) termikus állapotegyenlet szerint

$$p_1 V_1 = n_1 RT_1, \quad \text{ill.} \quad p_2 V_2 = n_2 RT_2. \qquad 43.20,21)$$

Ezek hányadosa:

$$\boxed{\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{n_1 T_1}{n_2 T_2}}. \tag{43.22}$$

Ennek az állapotegyenletnek a többivel szemben az az előnye, hogy nem kell ismerni sem az R moláris gázállandót, sem a k Boltzmann-állandót.

2. Az ideális gázok speciális állapotegyenletei

Ha egy adott ideális gáz két különböző, de változatlan anyagmennyiségű ($n_1 = n_2$) állapotban fordul elő, akkor a (43.22) alapján

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \text{ill.} \quad \boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}}. \tag{43.23,24}$$

Ezen belül háromféle állapotváltozás különböztethető meg.

a) Izotermikus állapotváltozás

Állandó hőmérsékleten ($T_1 = T_2$) az állapotváltozást izotermikusnak mondjuk. Termikus egyensúlyban a (43.24)-ből adódó

$$\boxed{p_1 V_1 = p_2 V_2}, \text{ ha } T \text{ és } n \text{ állandó} \tag{43.25}$$

állapotegyenletet, röviden a pV = állandó összefüggést ***Boyle–Mariotte-törvénynek*** nevezzük. Szemléltetésére a p–V állapotsíkon hiperbolák, ún. *izotermák* szolgálnak (**43.1. ábra**). [Robert BOYLE [bojl] (1627–1691) angol vegyész. Edme MARIOTTE [mariot] (1620 k.–1684) francia fizikus.]

b) Izobár állapotváltozás

Izobár az állapotváltozás, ha a gáz nyomása nem változik ($p_1 = p_2$). Termikus egyensúlyban a (43.24)-ből nyerhető

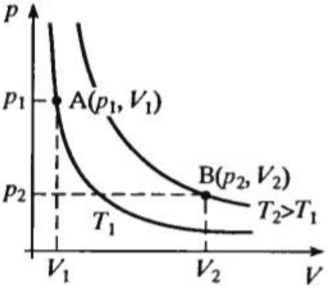
$$\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}, \text{ ha } p \text{ és } n \text{ állandó} \tag{43.26}$$

állapotegyenletet, röviden a V/T = állandó összefüggést ***Gay-Lussac I. törvényének*** nevezzük. A V–T állapotsíkon egyenesekkel, ún. *izobárák*kal szemléltethető, amelyek 0 K hőmérsékletre extrapolálhatók (**43.2. ábra**). A valóságban azonban a gázokkal a 0 K hőmérséklet nem érhető el, már előbb cseppfolyósodnak. [Joseph-Louis GAY-LUSSAC [gélüszák] (1778–1850) francia fizikokémikus.]

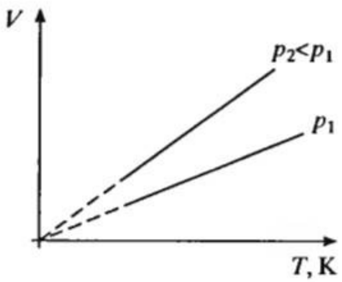
c) Izochor állapotváltozás

Az állandó térfogaton ($V_1 = V_2$) végbemenő, ún. izochor állapotváltozás termikus egyensúlyban érvényes állapotegyenlete szintén következik a (43.24)-ből és ***Gay-Lussac II. törvényének*** nevezzük:

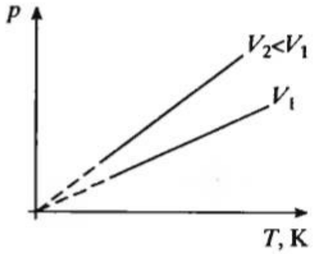
$$\boxed{\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}}, \text{ ha } V \text{ és } n \text{ állandó.} \tag{43.27}$$



43.1. ábra



43.2. ábra



43.3. ábra

Röviden: p/T = állandó, és a p–T állapotsíkon 0 K hőmérsékletre extrapolálható egyenesekkel, az *izochorák*kal szemléltethető (**43.3. ábra**).

Izochor állapotváltozáson alapszik a 41. § 2.-ben ismertetett *gázhőmérő* is.

3. Az Avogadro-törvény

Ha az N_1 részecskeszámú ideális gáz állapothatározói p_1,V_1,T_1, az N_2 részecskeszámú gázé p_2,V_2,T_2, ..., az N_n részecskeszámúé pedig p_n,V_n,T_n, akkor (43.17) alakú állapotegyenleteik:

$$p_1V_1 = N_1kT_1, \quad p_2V_2 = N_2kT_2, \ldots, \quad p_nV_n = N_nkT_n. \qquad (43.28\text{–}30)$$

Vegyük észre, hogy $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, $V_1 = V_2 = \ldots = V_n$ és $T_1 = T_2 = \ldots = T_n$ esetén $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$. Szavakban: *az azonos nyomású, térfogatú és hőmérsékletű ideális gázokban mindig ugyanannyi gázrészecske található* (***Avogadro-törvény***, 1811).

Az Avogadro-törvénnyel értelmezhető a ***vegyülő gázok térfogati törvénye*** (GAY-LUSSAC, 1808): *a kémiailag reagáló gázok részecskéinek számával egyenesen arányos gáztérfogatok* – állandó nyomáson és hőmérsékleten – *úgy aránylanak egymáshoz, mint a kis egész számok.* Pl. az $N_2 + 3\,H_2 = 2\,NH_3$ reakció esetén a térfogatok aránya 1:3:2, megegyezésben a részecskeszámok arányával.

4. A Dalton-törvény és az ideális gázelegyek termikus állapotegyenlete

a) Az ideális gázokból álló gázelegyek részecskéi sem fejtenek ki egymásra erőt és saját térfogatuk is elhanyagolható. A gázelegy egyes komponensei (összetevői) úgy viselkednek, mintha a többi összetevő jelen sem volna. Az egyes összetevők nyomása, az ún. *parciális* (részleges) *nyomás* ugyanakkora, mint amekkora lenne a gáznyomásuk, ha egyedül töltenék be a rendelkezésükre álló teret.

John DALTON (1766–1844) angol fizikokémikus állapította meg, hogy az ideális gázelegy p nyomása az egyes gázkomponensek $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *parciális nyomásainak* összegével egyenlő:

$$\boxed{p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \ . \tag{43.31}$$

Ezt nevezik ***Dalton-törvénynek*** (1803).

b) Ha V térfogatú és T hőmérsékletű gázelegyben n_1, n_2, ..., n_n anyagmennyiségű és $p_1, p_2, \ldots, p_n$ parciális nyomású ideális gázkomponensek vannak, akkor a Dalton-törvény és a (43.13) állapotegyenlet alapján az ideális gázelegy nyomása:

$$\begin{aligned} p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n &= \frac{n_1 RT}{V} + \frac{n_2 RT}{V} + \ldots + \frac{n_n RT}{V} = \\ &= \boxed{(n_1 + n_2 + \ldots + n_n)\frac{RT}{V}} \ . \end{aligned} \tag{43.32}$$

Ez az ***ideális gázelegyek termikus állapotegyenlete***, s kiolvasható belőle, hogy az ideális gázelegyek nyomása független az anyagi minőségtől.

c) A Dalton-törvény alapján értelmezhető a nagy magasságban jelentkező oxigénhiánnyal kapcsolatos magassági betegség és a keszonmunkásoknál fellépő keszonbetegség.

Nagy magasságban a légnyomás és vele együtt az oxigén parciális nyomása kisebb, mint a Föld felszínén. A lecsökkent parciális nyomású oxigénből a szükségesnél kevesebb oldódik a vérben. Ennek következtében oxigénhiány, ún. ***magassági betegség*** lép fel.

A légköri nyomásnál nagyobb nyomású környezetben (búvárharangban, keszonban) dolgozók (búvárok, keszonmunkások) vérében a levegő alkotórészeinek (nitrogén, oxigén) parciális nyomása a légkörbeli értékeknél nagyobb. A keszon gyors felemelésekor, a hirtelen nyomáscsökkenés folytán a vérben és a testszövetekben a felesleges gázok (főként a nitrogén) buborékokat képeznek. Ennek hatására a szövetek roncsolódnak, esetleg légembólia (légbuborék okozta hirtelen verőér-elzáródás) is kialakulhat. Ez az ún. ***keszonbetegség*** a keszon lassú felemelésével elkerülhető.

5. Az ideális gázelegyek átlagos moláris tömege

Az $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tömegű, $n_1, n_2, \ldots, n_n$ anyagmennyiségű és $M_1, M_2, \ldots, M_n$ moláris tömegű *ideális gázelegyek átlagos moláris tömege* – a moláris tömeg (43.3) definíciója alapján –

$$M_{\text{elegy}} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n_1 + n_2 + \ldots + n_n} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2} + \ldots + \dfrac{m_n}{M_n}} \ . \tag{43.33}$$

Pl. az m össztömegű, $m_1 \approx 0{,}2m$ tömegű, $M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ kg/mol moláris tömegű oxigént és $m_2 \approx 0{,}8m$ tömegű, $M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ kg/mol moláris tömegű nitrogént tartalmazó levegő átlagos moláris tömege $M_{\text{lev}} \approx 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mol.

6. A reális gázok állapotegyenlete

A reális (valódi) gázok nem követik pontosan az ideális gázok állapotegyenletét. Az ettől való eltérés különösen akkor jelentős, ha nagy a nyomás és alacsony a hőmérséklet, de különösképpen, ha a gáz közel van a cseppfolyósodáshoz. Széles hőmérséklet- és nyomásintervallumban a rájuk vonatkozó számos állapotegyenlet közül legismertebb a Johannes VAN DER WAALS [van de valsz] (1837–1923; Nobel-díj 1910-ben) holland fizikus által felismert és róla elnevezett ***van der Waals-féle állapotegyenlet*** (1873), amely a és b együtthatók bevezetésével veszi figyelembe a gázrészecskék kölcsönhatásából származó kohéziós nyomást, valamint a gázrészecskék saját térfogatát:

$$\boxed{\left(p+\frac{n^2 a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT}\,. \tag{43.34}$$

II. B) MOLEKULÁRIS FIZIKA

44. § Az anyagok atomos szerkezete

LEUKIPPOSZ (i. e. 5. sz.) és DEMOKRITOSZ (i. e. 460–370) ókori görög filozófusok szerint az anyagok nagyon kis méretű, tovább már nem osztható építőelemekből, ún. atomokból állnak. Először azonban csak a francia Joseph-Louis PROUST [pruszt] (1754–1826) és az angol DALTON vizsgálatai utaltak arra, hogy ***az anyagok valóban atomos szerkezetűek***. A kémiai vegyületek összetételére vonatkozó vizsgálataik eredményét két törvényben foglalták össze (1799, 1803).

Az ***állandó tömegviszonyok törvénye*** szerint a vegyületekben az alkotórészek (elemek) tömegaránya szigorúan állandó és jellemző az adott vegyületre. Pl. 54 g alumíniumból és 48 g oxigénből 102 g alumínium-oxid keletkezik, s ezek tömegaránya 54:48:102 (ill. 9:8:17).

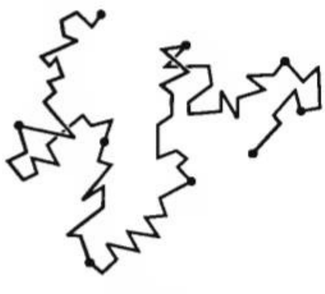
A ***többszörös tömegviszonyok törvénye*** kimondja, hogy ha két elem egymással többféle vegyületet is alkothat, akkor tömegarányuk szintén egész számokkal fejezhető ki. Pl. 2 g hidrogénből és 16 g oxigénből 18 g víz, 2 g hidrogénből és 32 g oxigénből 34 g hidrogén-peroxid keletkezik. Tömegarányuk víz esetén 2:16:18 (ill. 1:8:9), hidrogén-peroxidban 2:32:34 (ill. 1:16:17).

Ezek a Proust–Dalton-féle törvények egyszerűen magyarázhatók azzal a feltevéssel, hogy a ***kémiai elemek*** mindegyike az elem tulajdonságaival rendelkező, oszthatatlan és változatlan részecskékből, *atomokból* áll (DALTON, 1808). Egy adott elem atomjai azonos tömegűek, a különböző elemek atomjai viszont különböző tömegűek. A ***vegyületek*** legkisebb egységei az egész számú atomból felépülő *molekulák*.

A fizikai mezőkhöz (pl. elektromos mezőhöz) nem tartozó kondenzált anyagok (szilárd és cseppfolyós anyagok), valamint a gázok atomokból, molekulákból, elektromos töltésű ionokból, vagy ezek meghatározott csoportjaiból, ún. ***korpuszkulákból*** állnak. Létezésüket a Brown-mozgás (1827) és a diffúzió igazolta.

Robert BROWN [braun] (1773–1858) angol botanikus fénymikroszkóppal megfigyelte, hogy a virágtalan növények szaporító sejtjei, az ún. növényi spórák szabálytalan, zegzugos mozgást végeznek (**44.1. ábra**). Ugyanilyen rendezetlen mozgást végeznek a vízben nem oldódó porszemek és a cigarettafüst koromszemcséi is. Ezt a rendezetlen mozgást ***Brown-mozgásnak*** nevezzük (1827).

A folyadékok és a gázok kényszer nélküli, szabad keveredése a ***diffúzió***. A jelenség arra vezethető vissza, hogy a diffundáló anyag részecskéi egymás közé hatolnak (45. § 1.).



44.1. ábra

A Brown-mozgás és a diffúzió azt bizonyítja, hogy a makroszkopikus anyagot folyton mozgó részecskék (korpuszkulák) halmazának kell tekintenünk. A tapasztalat szerint a részecskék magasabb hőmérsékleten gyorsabban, alacsonyabb hőmérsékleten lassabban mozognak, mozgásuk tehát függ a hőmérséklettől. A részecskéknek ezt a hőmérséklettől függő mozgását ***hőmozgásnak*** nevezzük.

A makroszkopikus anyagot felépítő nagyszámú részecske mozgásának leírására a Galilei–Newton-féle klasszikus mechanika törvényei nem használhatók. A sok részecske együttes (kollektív) hatása által meghatározott makroszkopikus jelenségeknek és anyagi tulajdonságoknak az értelmezésére alakult ki a fizika egyik ága, a ***molekuláris fizika***. A molekuláris fizika többek között magában foglalja a gázok tulajdonságait értelmező és leíró *kinetikus gázelméletet* (47. §) és a termodinamikai jelenségek statisztikus elméletét, a *statisztikus termodinamikát* (59. §).

45. § Kémiai (korpuszkuláris) anyagtranszport

Transzportfolyamatról akkor beszélünk, ha a nagyszámú részecskéből álló makroszkopikus anyag egyik helyéről egy másik helyre energia vagy anyagi részecskék (korpuszkulák) mennek át. Ha a transzportfolyamat irányára merőleges A felületen Δt idő alatt ΔY extenzív fizikai mennyiség (tömeg, anyagmennyiség, energia, elektromos töltés) halad át, akkor a folyamatot jellemző *I áramerősségen* az $I = \Delta Y/\Delta t$ hányadost (számértékileg az egységnyi idő alatt áthaladó extenzív mennyiséget), *J áramsűrűségen* pedig a $J = I/A = \Delta Y/(A\Delta t)$ hányadost (számértékileg az egységnyi felületen és egységnyi idő alatt áthaladó extenzív fizikai mennyiséget) értjük.

Lars ONSAGER [onzáger] (1903–1976; Nobel-díj 1968-ban) norvég származású amerikai vegyész ismerte fel, hogy a transzportfolyamatot jellemző áramerősség, ill. áramsűrűség egyenesen arányos a rendszer két helyéhez tartozó intenzív állapotjelzők (hőmérséklet, nyomás, anyagmennyiség-koncentráció,[8] kémiai potenciál[9]) különbségével.

[8] *Anyagmennyiség-koncentráción* (röviden: koncentráción; jele: c; régebbi neve: molaritás) értjük a több kémiai anyagfajtából álló egynemű anyagban (elegyben) levő adott anyag n anyagmennyiségének és az elegy V térfogatának a hányadosát: $c = n/V$. SI-egysége a mól per köbméter, jele: mol/m^3.

[9] Ha egy részecskékből álló rendszer határfelületén n anyagmennyiség áramlik át, akkor az illető anyag *μ kémiai potenciálján* értjük az anyagtranszporthoz tartozó W kémiai (anyagátmeneti) munkának és az áthaladt n anyagmennyiségnek a hányadosát: $\mu = W/n$. Az így definiált kémiai potenciál azt mutatja meg, hogy az egységnyi anyagmennyiségű anyagnak a határfelületen történő áthaladásakor mekkora a végzett kémiai munka. SI-egysége a joule per mól, jele: J/mol.

A természetben többféle anyagtranszport játszódik le. Közülük igen fontos a kémiai (korpuszkuláris) anyagtranszport (diffúzió, ozmózis) és a termikusenergia-transzport (hővezetés, hőáramlás, hősugárzás; 51. §).

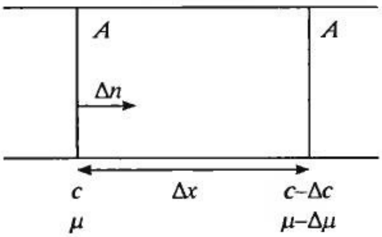
1. A diffúzió

Valamely anyag részecskéinek spontán (kényszer nélküli) keveredése, a ***diffúzió*** többféleképpen is létrejöhet.

a) Diffúzió koncentrációkülönbség esetén

Ha egy folyadék vagy gáz különböző helyein a μ kémiai potenciálok (vagy a velük egyenesen arányos c anyagmennyiség-koncentrációk) nem egyeznek meg, akkor a nagyobb kémiai potenciálú (ill. nagyobb anyagmennyiség-koncentrációjú) hely felől a kisebb kémiai potenciálú (ill. kisebb anyagmennyiség-koncentrációjú) hely felé kémiai anyagáramlás, *diffúzió* jön létre.

A diffúzió törvényének megállapítása céljából tekintsünk olyan áramlási csövet, amelynek A keresztmetszetű helyén a kémiai potenciál μ, az anyagmennyiség-koncentráció c, tőle Δx távolságra pedig $\mu - \Delta\mu$, ill. $c - \Delta c$. Ekkor a cső A keresztmetszetén Δt idő alatt Δn anyagmennyiség áramlik át, amelynek $J = \Delta n/(A\Delta t)$ áramsűrűsége ONSAGER szerint egyenesen arányos a $-\Delta\mu/\Delta x$ kémiai potenciálgradienssel (számértékileg az egységnyi távolságban levő kémiai pontenciálkülönbséggel), ill. a $-\Delta c/\Delta x$ koncentrációgradienssel. Ha az arányossági együtthatókat B-vel és C-vel jelöljük, akkor a diffúziót jellemző áramsűrűség:



45.1. ábra

$$\boxed{\frac{\Delta n}{A\Delta t}} = -B\frac{\Delta\mu}{\Delta x} = -BC\frac{\Delta c}{\Delta x} = \boxed{-D\frac{\Delta c}{\Delta x}}, \tag{45.1–3}$$

ahol $D = BC$ a hőmérséklettől és a diffundáló anyag moláris tömegétől függő *diffúziós együttható* (régebbi neve: diffúziós állandó), a negatív előjel pedig arra utal, hogy a diffúziós folyamat a csökkenő kémiai potenciál, ill. a csökkenő anyagmennyiség-koncentráció irányában megy végbe.

A diffúziónak ezt az alaptörvényét Adolf FICK [fik] (1829–1901) német fizikus ismerte fel (1855). Tiszteletére ***Fick-törvénynek*** nevezik.

A Fick-törvénnyel leírható diffúziós folyamat addig tart, amíg a rendszer két helye között $\Delta\mu$ kémiai potenciálkülönbség, ill. Δc koncentrációkülönbség áll fenn.

b) Diffúzió hőmérséklet-különbség esetén; a termodiffúzió

Termodiffúzió akkor jön létre, ha a rendszer két helye között ΔT hőmérséklet-különbség, ill. $\Delta T/\Delta x$ hőmérséklet-gradiens mérhető. Ekkor a kisebb tömegű (ill. nagyobb tömegű) részecskék többsége a magasabb hőmérsékletű (ill. alacsonyabb hőmérsékletű) hely felé diffundál. Ezen alapszik az izotópok (pl. uránizotópok) szétválasztására szolgáló *termodiffúziós eljárás*.

A termodiffúzió jelentős szerepet játszik az élő szervezetekben. Sugárzás (lézersugárzás, mikrohullámú sugárzás) és meleg vizű gyógyfürdők hatására fokozódik a helyi felmelegedéssel arányos diffúziós áramsűrűség, valamint az anyagcsere (pl. lábszárfekélyek gyógyítása). Ezzel szemben lokális (helyi) lehűlés esetén csökken a diffúziós áramsűrűség és az anyagcsere, aminek következtében pl. a végtagok lefagynak.

c) Öndiffúzió

A rendszert alkotó részecskék hőmozgása akkor sem szűnik meg, ha a rendszerben nincs hőmérséklet- vagy koncentrációkülönbség. Ilyenkor a részecskék átlag azonos sebességgel cserélnek helyet. Ez a jelenség az *öndiffúzió*.

d) Diffúzió szilárdtestekben

Megemlítjük, hogy diffúzió nemcsak folyadékokban és gázokban jön létre, hanem kristályos szerkezetű anyagokban, ún. szilárdtestekben is: termikus gerjesztés hatására a kristályrácsból kilépő tömegpontok diffúzióval jutnak el távoli tartományokba.

2. Az ozmózis

Ozmózisnak nevezzük azt a kémiai anyagtranszportot, amikor a különböző kémiai potenciálú (ill. anyagmennyiség-koncentrációjú) oldat és oldószer (vagy hígabb oldat) között levő féligáteresztő (szemipermeábilis) membrán (növényi sejtfal, állati és emberi sejthártya, művesemembrán) a kisebb méretű oldószer-molekulákat átengedi, de az oldott anyag nagyobb méretű molekuláinak áthaladását megakadályozza. A folyamat során a nagyobb anyagmennyiség-koncentrációjú oldat térfogatát a behatoló oldószer (általában víz) növeli. Az oldatban levő oldott anyag molekulái – hőmozgásuknál fogva – nyomást fejtenek ki a féligáteresztő membránra. Ezt a nyomást *ozmózisnyomásnak* nevezzük, és megegyezik a folyadék membránon történő átáramlásának megakadályozásához szükséges külső nyomással. Értéke híg vizes oldatokban közelítőleg ugyanakkora, mint amekkora a gáznyomás lenne, ha az oldott anyag gázállapotban töltené be az oldatban rendelkezésére álló térfogatot.

Jakobus VAN'T HOFF (1852–1911; Nobel-díj 1901-ben) holland vegyész állapította meg, hogy híg vizes oldatokban az oldott anyag molekulái – az ideális gáz molekuláihoz hasonlóan – egyenletesen töltik ki az oldat térfogatát (1886). Megállapította továbbá, hogy ha a V térfogatú híg oldatban n anyagmennyiségű az oldott anyag, akkor T hőmérsékleten az oldat Π (görög nagybetű, olvasd pí) ozmózisnyomására az ideális gázok $pV = nRT$ állapotegyenletével azonos alakú törvény érvényes:

$$\boxed{\Pi V = nRT}, \tag{45.4}$$

ahol $n/V = c$ az oldat anyagmennyiség-koncentrációja. Pl. a $c = 30\ \mathrm{mol/m^3}$ anyagmennyiség-koncentrációjú répacukor- ($C_{12}H_{22}O_{11}$-) oldat ozmózisnyomása $T = 298$ K (= 25 °C) hőmérsékleten: $\Pi = 74{,}3$ kPa.

Az ozmózisnak kitüntetett szerepe van az élő rendszerekben. – Így pl. esős időjáráskor egyes gyümölcsszemekbe (cseresznye, meggy, szőlő) féligáteresztő héjukon keresztül vízmolekulák diffundálnak, és a térfogat-növekedés miatt a gyümölcsszemek megrepednek. Tömény oldatba (pl. tömény cukoroldatba) tett gyümölcsszemek viszont összetöpörödnek. – Ugyancsak az ozmózissal kapcsolatos, hogy vízben a bab- és borsószemek megduzzadnak. – A növényi sejtnedvek 0,4–2 MPa ozmózisnyomása okozza a növényi szövetek rugalmasságát, s teszi lehetővé a víz és a talajban oldott anyagok felszívódását, valamint eljutását a fák koronáiba is. – Az ember és a magasabb rendű állatok sejtjeiben az ozmózisnyomás 0,8 MPa körül van, s ezt az értéket a szervezet tartja. Ha bármilyen okból változik az ozmózisnyomás, akkor a szervezet a változást kiküszöböli. Pl. sós ételek fogyasztásakor a megnövekedett ozmózisnyomást a szervezet vízfelvétellel csökkenti. Hashajtó sók hatására a belekben megnő az ozmózisnyomás, ennek csökkentésére a bél falán át a környező szövetekből víz jut be, s a béltartalmat felhígítja. – Ha bármely sejt saját ozmózisnyomásánál kisebb ozmózisnyomású oldószerbe (vagy hígabb oldatba) kerül, az oldószer-molekulák behatolnak a sejtbe és a sejtmembrán felszakad (pl. a vörös vérsejtek vízfelvétellel megduzzadnak és a sejthártya felpattan). Ezt megakadályozandó, az intravénás injekciók és az infúziós oldatok ozmózisnyomásának meg kell egyeznie a sejtek ozmózisnyomásával.[10] – Ozmózison alapszik az akut (heveny) veseelégtelenség kezelésére szolgáló *művesekezelés* (hemodialízis): a féligáteresztő hártyán átáramló vérből a salakanyagok eltávolíthatók.

A növényélettanban elterjedt a vízszállítással kapcsolatos ***vízpotenciál*** fogalma. Vízpotenciálon értjük a nagy mennyiségű vizet tartalmazó rendszer membránjának két oldalán, Δx távolságban jelentkező μ_1 és μ_2 kémiai potenciálok különbségét. Ez a $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ vízpotenciál a (45.1) törvénnyel leírható folyadék- (víz-) áramlást hoz létre. Ennek átrendezésével a vízáramlás $\Delta n/\Delta t$ erőssége:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = -\frac{\Delta\mu}{\frac{1}{B}\cdot\frac{\Delta x}{A}}, \tag{45.5}$$

ahol $\frac{1}{B}\cdot\frac{\Delta x}{A} = R$ a vízforgalmi ellenállás. (Az elektromosságtanból ismert $I = U/R$ Ohm-törvénnyel összevetve: $\Delta n/\Delta t$ az áramerősségnek, $\Delta\mu$ pedig az U feszültségnek felel meg.)

[10] Az *infúziós oldatok* alapja 0,9 vegyesszázalékos konyhasóoldat, amely 100 cm^3-enként 0,9 g nátrium-kloridot tartalmaz.

46. § Ülepedési (szedimentációs) jelenségek

A tapasztalat szerint a levegő nitrogén- és oxigénmolekulái, továbbá a kolloid részecskék a nehézségi erő hatására ülepednek.

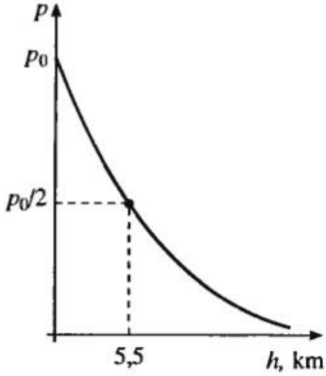
1. A levegőrészecskék ülepedése

A mérések és az elméleti számítások[11] szerint az $M \approx 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mol átlagos moláris tömegű levegő nyomása – a levegőrészecskék ülepedése folytán – h magasságban és T hőmérsékleten:

$$\boxed{p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}}, \qquad (46.1)$$

ahol g a nehézségi gyorsulás, e = 2,718... és $p_0 \approx 100$ kPa a Föld felszínén mérhető légnyomás.

Ez az ún. ***barometrikus magasságképlet***. Azt fejezi ki, hogy az ideális gázként viselkedő levegő nyomása a magassággal exponenciálisan csökken, és 5,5 km magasságban a légnyomás már csak $p_0/2$ (**46.1. ábra**).



46.1. ábra

Mivel az ideális gáz (43.17–19) alatti termikus állapotegyenletei szerint $p \sim \rho \sim n_r \sim N$, ezért h magasságban a levegő ***(tömeg-) sűrűsége:***

$$\boxed{\rho = \rho_0 e^{-Mgh/(RT)}}, \qquad (46.2)$$

részecskeszám-sűrűsége:

$$\boxed{n_r = n_{r,0} e^{-Mgh/(RT)}}, \qquad (46.3)$$

és ***adott ΔV térfogatban levő részecskék N száma:***

$$\boxed{N = n_{r,0} e^{-Mgh/(RT)} \Delta V}. \qquad (46.4)$$

46–1. példa: Számítsuk ki a Csomolungma (Mount Everest) $h = 8850$ méteres csúcsán a légnyomást, s ezen belül az oxigén parciális nyomását, ha a hegy csúcsán a nehézségi gyorsulás $g = 9{,}76$ m/s² és a hőmérséklet $T = 253$ K (= –20 °C)! A levegő átlagos moláris tömege $M_1 = 29 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, a Föld felszínéhez közel a levegő össztömegének 20%-át alkotó oxigén moláris tömege $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ kg/mol és a Föld felszínén a légnyomás $p_0 = 100$ kPa.

[11] L. pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 12. § 1. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

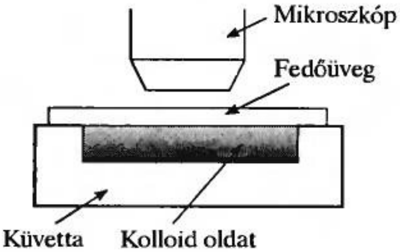
A (46.1) alapján

$$p(\text{lev}) = p_0 \mathrm{e}^{-M_1 gh/(RT)} = 30{,}4 \text{ kPa},$$

$$p(\mathrm{O_2}) = 0{,}2\, p_0 \mathrm{e}^{-M_2 gh/(RT)} = 5{,}9 \text{ kPa}.$$

Az ilyen nagy magasságban tehát a levegő és az oxigén olyan „ritka”, hogy a hegymászóknak oxigénmaszkra van szükségük.

2. Kolloid részecskék ülepedése; az Avogadro-állandó meghatározása



46.2. ábra

Jean PERRIN [perren] (1870–1942; Nobel-díj 1926-ban) francia fizikus kisméretű üvegedényben (küvettában) kolloid részecskék[12] (pl. alkoholban oldott gyantaszemcsék) ülepedését vizsgálta fénymikroszkóppal (**46.2. ábra**). Megállapította, hogy az egyenként μ tömegű kolloid részecskék ülepedésére is érvényes a (46.1) barometrikus magasságképlet (1909). Megszámolta, hogy az üvegedény aljától számított h_1 és h_2 magasságban levő, ΔV térfogatú kolloidoldat-rétegben a részecskék száma:

$$N_1 = n_{\mathrm{r},0} \mathrm{e}^{-Mgh_1/(RT)} \Delta V = n_{\mathrm{r},0} \mathrm{e}^{-N_A \mu g h_1/(RT)} \Delta V, \tag{46.5}$$

illetve

$$N_2 = n_{\mathrm{r},0} \mathrm{e}^{-N_A \mu g h_1/(RT)} \Delta V. \tag{46.6}$$

Ezek hányadosának e = 2,718... alapú logaritmusa:[13]

$$\ln \frac{N_1}{N_2} = N_A \frac{\mu g (h_2 - h_1)}{RT}. \tag{46.7}$$

N_1, N_2, h_1, h_2, μ és T ismeretében az N_A Avogadro-állandó kiszámítható (43. §).

[12] *Kolloidoknak* nevezzük azokat a másodrendű kémiai kötések (van der Waals-kötés, hidrogénhídkötés) által atomokból és molekulákból összekapcsolt halmazokat, amelyeknek mérete 1–500 nm tartományba esik.

[13] $\ln x$ [logaritmusz naturálisz iksz] az e = 2,718... alapú logaritmusfüggvény. $\ln x = 2{,}303 \lg x$.

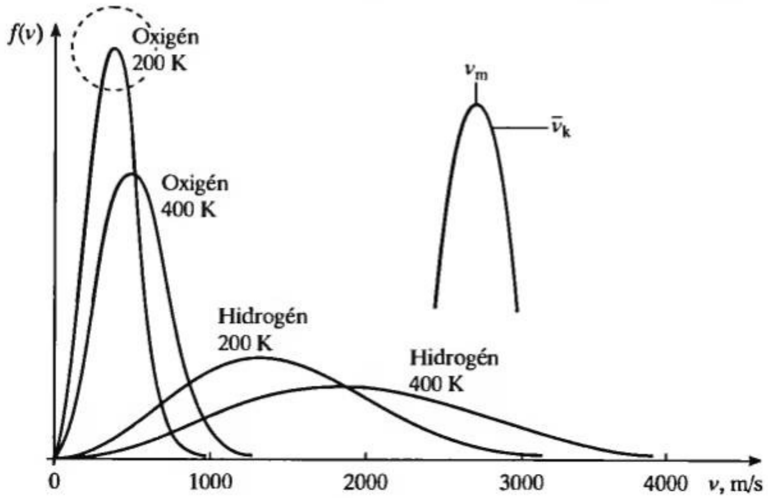
47. § Kinetikus gázelmélet

1. A kinetikus gázelmélet alapfeltevései

A 19. század második felében kialakult kinetikus gázelmélet szerint a gázt alkotó részecskék [atomok (pl. He, Ne, Kr) és/vagy molekulák (pl. H_2, N_2, O_2, NH_3, CH_4)] *a)* a rendelkezésükre álló térfogathoz viszonyítva elhanyagolható térfogatúak; *b)* rendezetlen hőmozgást végeznek; *c)* mozgásienergia-veszteség nélkül (rugalmasan) ütköznek egymással és az edény falával; *d)* ütközésmentesen a gázrészecskék kb. 1 ns ($= 10^{-9}$ s) idő alatt mintegy 100 nm ($= 10^{-7}$ m) utat tesznek meg, amelyet átlagos szabad úthossznak nevezünk; *e)* egyensúlyban egyenletesen töltik ki a rendelkezésükre álló teret.

2. A Maxwell-féle sebességeloszlás

A 19. század kiemelkedő elméleti fizikusa, a skót James Clerk MAXWELL [mekszvel] (1831–1879) számította ki, hogy ha a hőtanilag zárt gáz[14] N számú részecskéjéből ΔN rendelkezik Δv sebességintervallumba eső v pillanatnyi sebességgel, akkor az $f(v) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta v}$ *sebességeloszlási függvény* – amely megmutatja az egységnyi sebességintervallumban található gázrészecskék relatív számát – függ a részecskék tömegétől, sebességétől és a hőmérséklettől. Ábrázolva ezt a sebességeloszlási függvényt a részecskék v pillanatnyi sebességének függvényében, a kapott sebességeloszlási görbe alakja változik a hőmérséklettel, és azonos hőmérséklet esetén különböző tömegű részecskéknél eltérő alakú (**47.1. ábra**). Növekvő



47.1. ábra

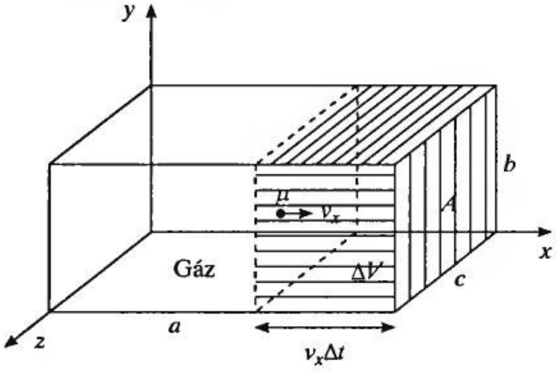
[14] Hőtanilag akkor zárt a gáz, ha környezetével energiát nem cserél.

hőmérséklettel a sebességeloszlási görbe maximuma a nagyobb sebességek felé tolódik el, az eloszlási görbe elnyúló, aszimptotikus lefutásúvá válik. A függvény maximumához tartozó sebesség a v_m *legvalószínűbb (leggyakoribb) sebesség.*

3. Az ideális gáz nyomása

A kinetikus gázelmélet szerint a gázok nyomását az okozza, hogy a hőmozgást végző gázrészecskék az edény falába ütköznek. Mivel az ütközések száma igen nagy, ezért a falra ható nyomás – egy adott hőmérsékleten – gyakorlatilag állandó.

Az ideális gázok nyomásának kiszámítása céljából tekintsünk egy derékszögű, a, b, c oldalélű, $V = abc$ térfogatú, hasáb alakú edényt (**47.2. ábra**), amelyben legyen N számú és egyenként μ tömegű, haladó mozgást végző gázrészecske. Ezek a gázrészecskék rugalmasan ütköznek az edény falába, rá erőt, ill. nyomást gyakorolnak.



47.2. ábra

Ha a **47.2. ábra** szerinti edényben mozgó gázrészecske a jobb oldali, A felületű falba v_x sebességkomponenssel ütközik, onnan – a rugalmas ütközés folytán – változatlan nagyságú, de ellentétes irányú $-v_x$ sebesség-összetevővel pattan vissza, az y és a z irányú sebességkomponensek pedig változatlanul maradnak. Eközben a gázrészecske mozgásmennyiségének x irányú megváltozása $\mu v_x - (-\mu v_x) = 2\mu v_x$, amely – a mozgásmennyiség megmaradásának törvénye szerint – egyúttal megegyezik a falnak átadott mozgásmennyiséggel is.

Δt idő alatt a gázrészecskék közül csak azok ütköznek az A felületű lapba, amelyek jobbra ($x > 0$) haladnak és $t = 0$ időpillanatban a faltól $v_x\Delta t$ távolságra vagy ennél közelebb vannak, s ennek folytán a $\Delta V = Av_x\Delta t$ térfogatú hasábban találhatók. Ha a V térfogatú edényben összesen N részecske van, akkor az $n_r = N/V$ részecskeszám-sűrűség (számértékileg az egységnyi térfogatban levő részecskék száma) folytán a ΔV térfogatelemben $n_r\Delta V = n_r A v_x \Delta t$ számú részecske található. Mivel ezeknek csak a fele mozog jobbra ($x > 0$ irányban), a másik fele pedig balra ($x < 0$ irányban), ezért Δt idő alatt a kiszemelt falba ütköző részecskék száma a ΔV térfogatelemben levő részecskék számának csak a fele, vagyis $\frac{1}{2} n_r A v_x \Delta t$. Mozgásmennyiségük x komponensének megváltozása:

$$\Delta I_x = \frac{1}{2} n_r A v_x \Delta t \cdot 2\mu v_x = n_r \mu A v_x^2 \Delta t. \tag{47.1}$$

Ennek figyelembevételével Newton II. törvénye szerint a falra ható nyomás:

$$p = \frac{F_x}{A} = \frac{\Delta I_x / \Delta t}{A} = n_r \mu v_x^2. \tag{47.2}$$

A gyakorlatban nem mindegyik részecske sebessége azonos, ezért v_x^2 helyett a sebesség x komponense négyzetének átlagával ($\overline{v_x^2}$) kell a nyomást számítani:[15]

$$p = n_r \mu \overline{v_x^2}. \tag{47.3}$$

Mivel a részecskék véletlenszerűen mozognak, ezért a v_x^2, v_y^2, v_z^2 sebességkomponens-négyzetek átlagértékei egyenlőek, és a térbeli mozgás folytán $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \overline{v^2}/3$. Ebből következik, hogy az ideális gáz nyomása:

$$\boxed{p = n_r \mu \frac{\overline{v^2}}{3} = \frac{2}{3} n_r \left(\frac{1}{2}\mu \overline{v^2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V}\left(\frac{1}{2}\mu \overline{v^2}\right)}, \tag{47.4}$$

ahol a $\overline{v^2}$ a haladó mozgást végző részecskék sebességnégyzetének átlaga, $\frac{1}{2}\mu \overline{v^2} = \overline{\varepsilon}_k$ pedig egyetlen részecske átlagos haladó mozgási energiája. Az ideális gáz nyomása tehát egyenesen arányos a részecskeszám-sűrűséggel és 1 részecske átlagos haladó mozgási energiájával.[16]

4. A kinetikus gázelmélet alapegyenlete

Az ideális gáz nyomására kapott (47.4) összefüggés átrendezésével nyerhető

$$\boxed{pV = \frac{2}{3} N\left(\frac{1}{2}\mu \overline{v^2}\right) = \frac{2}{3} N\overline{\varepsilon}_k} \tag{47.5}$$

a *kinetikus gázelmélet alapegyenlete*. Azt fejezi ki, hogy az ideális gáz p nyomásának és V térfogatának a szorzata egyenesen arányos a gáz részecskéinek N számával és 1 részecske $\overline{\varepsilon}_k$ átlagos haladó mozgási energiájával.

---

[15] A betűjel fölé írt vonás az illető mennyiség átlagértékét jelöli.

[16] Megjegyezzük, hogy a pontos számítások is ugyanerre az eredményre vezetnek. L. pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 10. §. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

5. Az ideális gáz hőmérsékletének értelmezése

Ha az ideális gáz (43.17) alatti $pV = NkT$ állapotegyenletét a kinetikus gázelmélet (47.5) alapegyenletébe helyettesítjük, akkor

$$NkT = \frac{2}{3} N\bar{\varepsilon}_k . \tag{47.6}$$

Ebből az ideális gáz hőmérséklete:

$$\boxed{T = \frac{2}{3k}\bar{\varepsilon}_k} . \tag{47.7}$$

Az ideális gáz hőmérséklete tehát egyenesen arányos 1 részecske $\bar{\varepsilon}_k$ átlagos haladó mozgási energiájával és független a gáz minőségétől.

6. A gázrészecskék átlagos haladó mozgási energiája

A (47.5)-ből – a $pV = NkT$ állapotegyenlet figyelembevételével – egyetlen gázrészecske átlagos haladó mozgási energiája:

$$\boxed{\bar{\varepsilon}_k = \frac{3}{2} \cdot \frac{pV}{N} = 3\frac{1}{2}kT} . \tag{47.8}$$

Ez a fontos összefüggés azt fejezi ki, hogy 1 gázrészecskére jutó $\bar{\varepsilon}_k$ átlagos haladó mozgási energia csak a T hőmérséklettől függ, független azonban a nyomástól, a térfogattól és a részecske milyenségétől.

Ha az ideális gáz $N = nN_A$ számú részecskéből áll, akkor átlagos haladó mozgási energiája:

$$\boxed{\bar{E}_k = nN_A\bar{\varepsilon}_k = nN_A 3\frac{1}{2}kT = \frac{3}{2}nRT} . \tag{47.9–11}$$

7. A gázrészecskék négyzetes középsebessége

Ha a (47.9)-be $\bar{\varepsilon}_k$ helyére $\frac{1}{2}\mu\overline{v^2}$-et írunk, akkor

$$nN_A \frac{1}{2}\mu\overline{v^2} = \frac{3}{2}nRT. \tag{47.12}$$

Ebből a *sebességnégyzet átlaga:*

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{N_A \mu} = \frac{3RT}{M}, \tag{47.13}$$

a $\bar{v}_k$ *négyzetes középsebesség* pedig a sebességnégyzet átlagának négyzetgyöke:

$$\boxed{\bar{v}_k = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}.^{17} \tag{47.14}$$

Ez alapján kiszámíthatók a különböző gázok haladó mozgást végző részecskéinek négyzetes középsebességei *(47.1. táblázat)*.

Néhány gáz négyzetes középsebessége 273 K (= 0 °C) hőmérsékleten *47.1. táblázat*

Gáz	M, 10^{-3} kg/mol	$\bar{v}_k$, m/s
Hidrogén (H_2)	2	1845
Hélium (He)	4	1305
Nitrogén (N_2)	28	493
Oxigén (O_2)	32	461

47–1. példa: h = 500 km magasságban a napsugárzás hatására a légkör kb. T = 1500 K hőmérsékletű. Számítsuk ki ebben a magasságban a hidrogénmolekulák $\bar{v}_k$ négyzetes középsebességét, v_{sz} szökési sebességét, és ez utóbbit vessük össze pillanatnyi sebességükkel! A hidrogén moláris tömege $M = 2 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, a gravitációs állandó $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg², a Föld tömege $m_F = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, sugara $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

a) A (47.14) alapján a *négyzetes középsebesség:*

$$\bar{v}_k = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 4{,}32 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

b) A mechanikából ismertek szerint (16. §) a Föld középpontjától $r = R + h$ távolságra a *szökési sebesség:*

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2Gm_F}{R+h}} = 1{,}08 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

[17] Kimutatható, hogy az $f(v)$ sebességeloszlási függvény maximumához tartozó v_m legvalószínűbb (leggyakoribb) sebesség a $\bar{v}_k$ négyzetes középsebesség $\sqrt{3/2}$-szerese. L. pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 9. §. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

Mivel a Maxwell-féle sebességeloszlás folytán a kis moláris tömegű hidrogén v pillanatnyi sebessége jóval nagyobb is lehet a v_{sz} szökési sebességnél, ezért a 4,6 milliárd éves Föld légköréből – a szintén kis moláris tömegű héliummal együtt – gyakorlatilag megszökött, a világűrbe távozott. A hidrogénnél és a héliumnál jóval nagyobb moláris tömegű nitrogén és oxigén viszont a Föld légköréből nem tudott eltávozni. Jelenleg a földi légkör térfogatának 78%-a nitrogén, 21%-a oxigén.

48. § Az ekvipartíciótétel

Ebben a §-ban azt vizsgáljuk, hogy az N részecskéből álló anyagi rendszer energiája miként oszlik szét az egyes atomok, ill. molekulák között. E kérdés megválaszolására először be kell vezetni a szabadsági fok fogalmát.

1. A szabadsági fok

a) Egyatomos gázok szabadsági foka és átlagos energiája

A $\bar{v}_k = \sqrt{\overline{v^2}}$ négyzetes középsebességgel haladó mozgást végző, μ tömegű, pontszerűnek tekinthető egyatomos gázrészecske (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn) $\bar{\varepsilon}_k$ átlagos mozgási energiája:

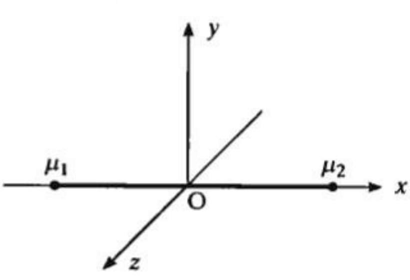
$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{2}\mu\bar{v}_k^2 = \frac{1}{2}\mu\overline{v^2} = \frac{1}{2}\mu\overline{v_x^2} + \frac{1}{2}\mu\overline{v_y^2} + \frac{1}{2}\mu\overline{v_z^2} = 3\frac{1}{2}kT, \tag{48.1}$$

ahol $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$ és $\overline{v_z^2}$ a sebességkomponens-négyzetek átlaga.

Mivel $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, ezért bármelyik gázrészecskének x, y, z tengelyirányonként átlagosan $\frac{1}{2}kT$ energiája van. A gázrészecske $\bar{\varepsilon}_k$ átlagos mozgási energiája pedig az $\frac{1}{2}kT$ energiának annyiszorosa – egyatomos gázoknál háromszorosa –, mint amennyi az energia-kifejezésben szereplő, egymástól független négyzetes tagok ($\overline{v_x^2}, \overline{v_y^2}, \overline{v_z^2}$) száma. Megállapodás szerint a (48.1) energia-kifejezésben szereplő, egymástól független négyzetes tagok számát a részecske *szabadsági fokának* (f) nevezzük. A csak haladó mozgást végző, egyatomos gázrészecskék tehát $f = 3$ szabadsági fokkal rendelkeznek, s így átlagos haladó mozgási energiájuk: $\bar{\varepsilon}_k = 3\frac{1}{2}kT$. Ha az egyatomos gázt N számú részecske alkotja, akkor a rendszer átlagos haladó mozgási energiája: $\bar{E}_k\,(\text{összes}) = 3N\frac{1}{2}kT$.

b) Kétatomos gázmolekulák szabadsági foka és átlagos energiája

A kétatomos gázmolekulák (pl. H_2, N_2, O_2, CO) μ_1 és μ_2 tömegű atomokból álló összekapcsolt rendszernek tekinthetők (**48.1. ábra**). Ha az ilyen kétatomos molekula tengelye egybeesik az x tengellyel, akkor a molekula x, y, z irányú haladó mozgást, és az y, valamint a z tengelyre merőlegesen forgómozgást végez. Ennek megfelelően a molekula teljes mozgási energiája a haladó (transzlációs) mozgással kapcsolatos mozgási energiából és a két egymásra merőleges tengely körüli forgásból származó forgási (rotációs) energiából tevődik össze:



48.1. ábra

$$\bar{\varepsilon}_k = \underbrace{\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)\overline{v_x^2} + \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)\overline{v_y^2} + \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)\overline{v_z^2}}_{\text{transzláció } (f=3)} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\Theta_y\overline{\omega_y^2} + \frac{1}{2}\Theta_z\overline{\omega_z^2}}_{\text{rotáció } (f=2)}, \tag{48.2}$$

ahol $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$ és $\overline{v_z^2}$ a molekula O tömegközéppontjához tartozó sebességkomponens-négyzetek átlagértéke, Θ_y és Θ_z a két egymásra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, $\overline{\omega_y^2}$ és $\overline{\omega_z^2}$ pedig a hozzájuk tartozó szögsebesség-négyzetek átlaga.[18] Minthogy most a molekula átlagos mozgási energiája öt négyzetes tagból ($\overline{v_x^2}, \overline{v_y^2}, \overline{v_z^2}, \overline{\omega_y^2}, \overline{\omega_z^2}$) tevődik össze, ezért a kétatomos molekula $f = 5$ szabadsági fokkal rendelkezik, átlagos mozgási energiája pedig $\bar{\varepsilon}_k = 5\frac{1}{2}kT$.

Ha a kétatomos molekula a haladó és forgómozgáson kívül még lineáris rezgőmozgást is végez az x tengely mentén, akkor ez utóbbiból származó teljes rezgési energia az egyensúlyi helyzettől számított x kitérés négyzetével egyenesen arányos potenciális energiának és a v_x pillanatnyi sebesség négyzetével arányos mozgási energiának az összege. A lineáris rezgőmozgásból tehát $f = 2$ szabadsági fok adódik.

Ha a kétatomos molekula egyidejűleg haladó, forgó- és rezgőmozgást végez, akkor átlagos energiája:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{haladási}} + \bar{\varepsilon}_{\text{forgási}} + \bar{\varepsilon}_{\text{rezgési}} = 3\frac{1}{2}kT + 2\frac{1}{2}kT + 2\frac{1}{2}kT = 7\frac{1}{2}kT. \tag{48.3}$$

---

[18] A kétatomos molekula x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka zérus, s így e tengely körüli forgásból nem származik forgási energia.

c) Többatomos gázmolekulák szabadsági foka és átlagos energiája

Kettőnél több atomból álló gázmolekulák (pl. CH_4) háromirányú haladó mozgást és három egymásra merőleges tengely körüli forgómozgást végezhetnek. Ennek megfelelően szabadsági fokaik száma $f = 6$, átlagos mozgási energiájuk pedig $\bar{\varepsilon}_k = 6\frac{1}{2}kT$.[19]

d) Szilárd anyagok tömegpontjainak szabadsági foka és átlagos energiája

A szilárd kristályos anyagok tömegpontjai (atomok, molekulák, ionok) kristályrácsban helyezkednek el, és térbeli rezgőmozgásuk folytán $f = 6$, $\bar{\varepsilon} = 6\frac{1}{2}kT$.

Összefoglalva: Egyatomos gázok szabadsági fokainak száma 3, a kétatomos molekuláké maximálisan 7, a többatomos gázmolekuláké és a szilárd kristályos anyagot felépítő tömegpontoké 6.

2. Az ekvipartíciótétel

Az elmondottakból levonható az a végső következtetés, hogy 1 részecske 1 szabadsági fokára átlagosan $\frac{1}{2}kT$, f szabadsági fokára pedig $f\frac{1}{2}kT$ energia jut. Az N részecskéből álló rendszer $\bar{E}(\text{összes}) = Nf\frac{1}{2}kT$ összenergiája pedig egyensúlyi állapotban egyenletesen oszlik szét az egyes szabadsági fokok között. Ezt az energia egyenletes eloszlásának tételét, az ***ekvipartíciótételt*** MAXWELL és BOLTZMANN ismerte fel (1860).

Sikerei ellenére az ekvipartíciótétel megnyugtató módon nem tudta értelmezni az anyagi részecskék átlagos energiájának hőmérséklettől való függését. Az ekvipartíciótétel alapján számított és méréssel meghatározott energiák között alacsony hőmérsékleten jelentős különbség mutatkozik. Mérések szerint ugyanis a hőmérsékletet csökkentve a részecskék átlagos energiája fokozatosan csökken az ekvipartíciótételből adódó értékhez képest. Ez azt jelenti, hogy nulla kelvin hőmérséklethez közeledve a forgási és a rezgési szabadsági fokok „befagynak", emiatt nem adhatnak járulékot az átlagos energiához.

3. Az ideális gázok belső energiája

Az N részecskéből álló ideális gáz részecskéinek haladó, forgó- és rezgőmozgásával kapcsolatos, T hőmérséklettől függő $\bar{E}(\text{összes})$ átlagos energiáját az ideális gáz ***belső energiájának*** (U) nevezzük:

[19] Ha a többatomos molekulák rezgőmozgást is végeznek, akkor ezt is figyelembe kell venni a szabadsági fokok számának, illetve az átlagos energiának a kiszámításakor.

$$\boxed{U = Nf\frac{1}{2}kT = f\frac{1}{2}nN_A kT = f\frac{1}{2}nRT}\ . \qquad (48.4\text{–}6)$$

Ezek alapján az ideális gázok belső energiája csak a T hőmérséklettől függ: $U = U(T)$.

A rendszer belső energiájának megváltozása pedig:

$$\boxed{\Delta U = Nf\frac{1}{2}k\Delta T = f\frac{1}{2}nN_A k\Delta T = f\frac{1}{2}nR\Delta T}\ . \qquad (48.7\text{–}9)$$

II. C) A TERMODINAMIKA ELSŐ FŐTÉTELE ÉS NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYE

49. § Termodinamikai alapfogalmak

1. A termodinamika tárgya

A ***termodinamika*** a testek belső energiájával kapcsolatos folyamatokat vizsgálja. Ezek a folyamatok általában hőmérsékletfüggők, és legtöbbször hőfelvétellel vagy hőleadással kapcsolatosak. A termodinamikán belül a végtelen lassú és termikus egyensúlyi állapotokra vezető folyamatokkal a *klasszikus termodinamika (termosztatika)*, a nemegyensúlyi és a véges idő alatt végbemenő változásokkal pedig az *irreverzíbilis termodinamika* foglalkozik.

A termodinamika *fenomenologikus elmélet:* tapasztalati tényekre és mérhető mennyiségekre támaszkodva állapítja meg törvényeit, miközben figyelmen kívül hagyja az anyag molekuláris szerkezetét, valamint a belső energia molekuláris értelmezését. Törvényei közül kiemelkedő jelentőségűek a klasszikus termodinamika általános érvényű főtételei.

A klasszikus termodinamikát a francia Sadi CARNOT [kárnó] (1796–1832), a német Rudolf CLAUSIUS [klauziusz] (1822–1888), a skót William THOMSON (Lord KELVIN) és az amerikai Willard GIBBS [gibz] (1839–1932) fizikusok alapozták meg. Az irreverzíbilis termodinamika kidolgozása elsősorban a norvég-amerikai Lars ONSAGER és az orosz-belga Ilya PRIGOGINE [prigozsin] (1917–; Nobel-díj 1977-ben) vegyészek érdeme.

2. A termodinamikai rendszer

A termodinamikában alapvető szerepet játszik a meghatározott tömegű és anyagi minőségű testek összessége, a ***termodinamikai rendszer***. A rendszert alkotó testek egymással és környezetükkel termikus kölcsönhatás és munkavégzés során energiát cserélhetnek.

A termodinamikai rendszereket – határoló felületeik tulajdonságai alapján – nyitott, mechanikailag vagy hőtanilag zárt, illetve izolált rendszerekre szokás felosztani.

Nyitott (nyílt) az a rendszer, amelynek határfelületén vagy annak egy részén m tömegű korpuszkuláris anyag és energia egyaránt átmehet. Ilyen nyitott rendszer pl. valamennyi biológiai rendszer (élő sejtek, szövetek, szervek, szervrendszerek).

Mechanikailag zárt a rendszer akkor, ha határfelületén keresztül környezetével képes energiát cserélni, de a tömegtranszport kizárt. ***Hőtanilag*** akkor mondjuk a rendszert ***zártnak***

(termikusan izoláltnak), ha határfelületén termikus kölcsönhatással kapcsolatos energia nem megy át.

Izolált (szigetelt) rendszerről akkor beszélünk, ha környezetével sem m tömegű anyagot, sem energiát nem cserél.

3. Termodinamikai folyamatok

Termodinamikai folyamatoknak (röviden: folyamatoknak) nevezzük azokat a jelenségeket, amelyek valamelyik termodinamikai paraméter (nyomás, térfogat, hőmérséklet) megváltozásával járnak. Az állandó hőmérsékleten lejátszódó folyamatokat *izotermikus*, az állandó nyomáson végbemenő folyamatokat *izobár*, az állandó térfogaton lejátszódó folyamatokat *izochor* folyamatoknak nevezzük. Azokat a folyamatokat pedig, amelyeknek során a rendszer és környezete között nincs hőcsere (vagyis a rendszer hőtanilag zárt), és a külső feltételek hatására a rendszerben lejátszódó folyamatok csak lassan mennek végbe, *adiabatikus* folyamatoknak mondjuk (53. §).

A termodinamikai folyamatok lehetnek reverzíbilisek és irreverzíbilisek. *Reverzíbilisek* (megfordíthatók) azok a termodinamikai folyamatok, amelyek elvileg végtelen (gyakorlatilag igen hosszú) ideig tartanak, és mindkét irányban (oda-vissza) végbemehetnek anélkül, hogy a környezetben maradandó változás történne. A természetben azonban minden valóságos változás *irreverzíbilis* (megfordíthatatlan): a kezdeti állapot visszaállítása csak a környezetben létrejövő változás árán lehetséges.

A termodinamikai folyamatokat ***termodinamikai függvényekkel*** írjuk le. Ezek lehetnek állapotfüggvények vagy folyamatfüggvények. Azokat a függvényeket, amelyeknek a változása csak a kezdeti és a végállapottól függ, *állapotfüggvényeknek* nevezzük (pl. hőmérséklet, belső energia stb.). Azokat a függvényeket viszont, amelyeket a kezdeti és a végállapot egyértelműen nem határoz meg, *folyamatfüggvényeknek* (útfüggvényeknek) szokás nevezni (pl. munka, hőmennyiség stb.).

Már a kinetikus gázelmélet tárgyalása során utaltunk arra, hogy valamennyi makroszkopikus jelenség igen sok részecske mozgásának és elrendezésének következménye. Ebből következik, hogy minden termodinamikai folyamat nagyszámú, szabad szemmel vagy más érzékszervünkkel közvetlenül nem észlelhető, ill. nem érzékelhető, ún. mikrorészecske statisztikus mozgásaként jön létre, s így a ***termodinamikai folyamatok törvényei statisztikus törvények:*** mindig nagyszámú részecske legvalószínűbb viselkedését írják le, de az ettől való kismértékű eltérések lehetőségei, az *ingadozások (fluktuációk)* megengedettek.

A termodinamikai folyamatok statisztikus jellegéből következik, hogy termodinamikai egyensúly esetén sincs abszolút nyugalom, mert a rendszer egyensúlyban levő állapotai (pl. folyadék és telített gőze) között a molekulák, ill. az atomok folyton kicserélődnek, örökösen átrendeződnek. Mivel az ellentétes irányú kicserélődési folyamatok sebessége egyenlő, ezért makroszkopikusan nem észlelhető változás. A termodinamikai egyensúly tehát molekuláris szinten dinamikus egyensúly.

50. § A termodinamika első főtétele

A termodinamika első főtétele összefüggést állapít meg a belsőenergia-változás, a munka és a hőmennyiség között.

1. A belső energia

Tapasztalat szerint a dugattyúval ellátott hengerben levő gáz melegítés hatására tágul, maga előtt tolja a dugattyút és a külső környezet ellenében munkát végez. A táguló gáz azonban munkát csak akkor végezhet, ha munkavégző képessége, vagyis energiája van. Bármely m tömegű makroszkopikus anyag E energiája két részből tevődik össze: E_m makroszkopikus energiából és U belső energiából.

a) Az E_m makroszkopikus energia az m tömegű anyag $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiájának és mgh magassági potenciális energiájának az összege.

b) Tágabb értelemben egy makroszkopikus rendszer U belső energiáján értjük a rendszert alkotó részecskék (atomok, molekulák, ionok vagy ezek csoportjai) haladó, forgó- és rezgőmozgásával kapcsolatos, T hőmérséklettől függő termikus energiájának, a részecskék kölcsönhatásából származó és kémiai kötésekben tárolt kölcsönhatási potenciális energiának, az elektronok mozgási és potenciális energiájának és az atommag kötési energiájának összegét. Ennek megfelelően a rendszer E összes energiája: $E = E_m + U$. Ebből az extenzív jellegű ***belső energia:***

$$\boxed{U = E - E_m}\,. \tag{50.1}$$

A termodinamikában a belső energiát szűkebb értelemben használjuk: a belső energiába nem számítjuk a magenergiát, az elektronok potenciális és mozgási energiáját, sőt kémiai folyamatok hiányában a kémiai energiát is figyelmen kívül hagyjuk. Belső energián csak a rendszer részecskéinek a T hőmérséklettel arányos haladási, forgási és rezgési energiáinak összegét értjük.

Gázokra szorítkozva, a kinetikus gázelméletből ismert (48. § 3.), hogy az ideális gázok belső energiája csak a hőmérséklettől függ: $U = U(T)$. Értékét az adott állapothoz tartozó hőmérséklet egyértelműen meghatározza, ΔU változása független attól, hogy a folyamat milyen úton megy végbe. Ezt úgy mondjuk, hogy a ***belső energia állapotfüggvény.***

2. A térfogati munka

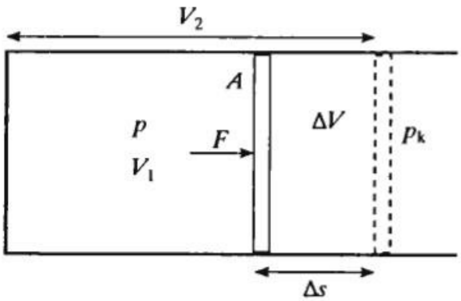
a) Ha dugattyús hengerben levő gázt a dugattyú mozgatásával összenyomjuk, vagyis változtatjuk a gáz térfogatát, akkor a kinetikus gázelméletből ismertek szerint – a (47.4) alapján – a gázrészecskék gyorsabban mozognak, s ebből kifolyólag növekszik a gáz belső energiája. Kimutatható, hogy a gáz összenyomásakor a rendezett mozgást végző dugattyúból mozgásmennyiség adódik át a gázba, és a dugattyú mozgatásakor végzett külső munka teljes egészében a gáz belső energiáját növeli.[20] ***Ezt a rendezett mozgással, mozgásmennyiség-átadással (-átvétellel) történő energiaátadást (-átvételt) munkavégzésnek, a munkavégzéssel átadott (átvett) energiát munkának nevezzük.*** A tapasztalat szerint adiabatikus folyamatban az ideális gáz belső energiájának a megváltozása mindig megegyezik a gázon végzett külső munkával:

$$\boxed{\Delta U = W}\,. \tag{50.2}$$

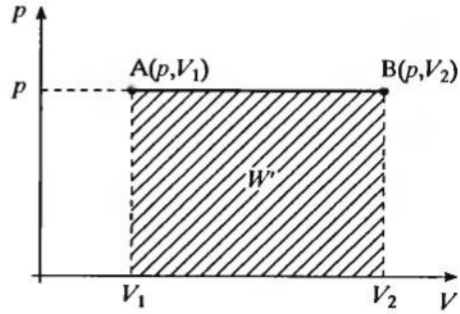
b) Ha külső erő hatására megváltozik a rendszer térfogata, akkor *térfogati munkavégzésről* beszélünk, amelyet a ***térfogati munkával*** jellemzünk.

Példaként tekintsük a hengerben ***állandó nyomáson*** táguló gázt (**50.1. ábra**)! Ha a gáz p belső nyomása a gáz által elfoglalt térfogat minden pontjában, valamint az edény (henger) belső felületén ugyanakkora és minden pillanatban gyakorlatilag megegyezik a p_k külső nyomással, akkor a rendszer (gáz) egyensúlyi állapotok sorozatán megy át, a tágulási folyamat tehát kvázisztatikus (majdnem sztatikus), és egyúttal reverzíbilis is.

Az A felületű dugattyúra a gáz állandó p nyomásával egyenesen arányos $F = pA$ nyomóerő hat. Ennek következtében a dugattyú Δs úton elmozdul, miközben a gáz térfogata a kezdeti V_1-ről $V_2 = V_1 + \Delta V = V_1 + A\Delta s$-re nő, s így a gáz térfogatváltozása $V_2 - V_1$ (**50.1. ábra**). Az állandó nyomáson táguló gáz által a környezet ellenében végzett W' térfogati munka:



50.1. ábra



50.2. ábra

$$W' = F\Delta s = pA\Delta s = p(V_2 - V_1). \tag{50.3}$$

Az állandó nyomáson táguló ($V_2 > V_1$) gáz térfogati munkája tehát $W' > 0$, és azzal a területtel egyenlő, amely az A kezdeti állapothoz és a B végállapothoz tartozó p–V egyenes, valamint a V_1 és V_2 abszcisszákhoz tartozó ordináták között található (**50.2. ábra**).

A gáz által a környezet ellenében végzett W' munkán kívül gyakran szükséges ismerni a környezetnek a gázon végzett W munkáját is. Kvázisztatikus folyamatban a p_k külső nyomással egyenesen arányos p_kA külső erő a pA belső erővel azonos nagyságú, de ellentétes irányú. Ekkor a környezetnek a gázon végzett W munkája a gáz W' munkájának (–1)-szerese:

[20] L. pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 15. §. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

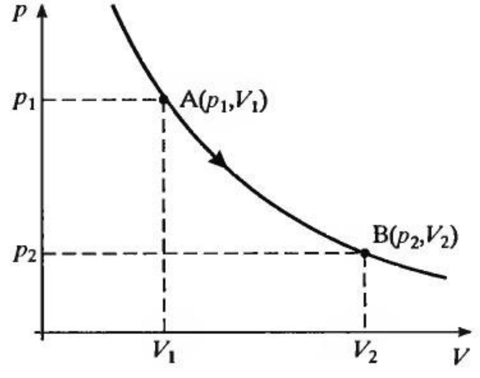
$$W = -W' = -p(V_2 - V_1). \tag{50.4}$$

Az (50.4)-ből kiolvasható, hogy *táguláskor* $V_2 > V_1$, $W < 0$, ill. $W' = -W > 0$, vagyis a gáz végez munkát a környezet ellenében; *összenyomáskor* viszont $V_2 < V_1$, $W > 0$, ill. $W' < 0$, vagyis a környezet végez munkát a gázon.

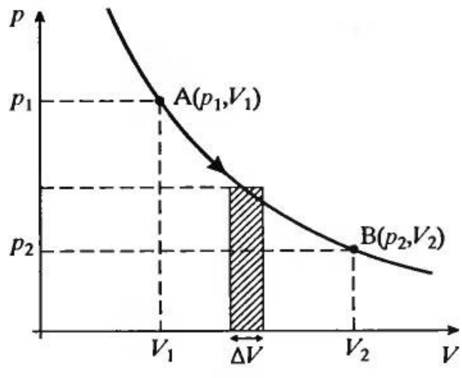
Az (50.4) térfogati munka az ideális gázok $pV = nRT$ termikus állapotegyenlete alapján más alakban is írható:

$$\boxed{W = -W' = -p(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)}\,. \tag{50.5,6}$$

c) Ha a hengerben táguló gáz térfogata V_1-ről V_2-re nő, miközben nyomása p_1-ről p_2-re csökken, vagyis a ***nyomás nem állandó*** (változik), akkor ezt az állapotváltozást a p–V állapotsíkon görbe szemlélteti (**50.3. ábra**). Most a táguló gáz W' munkájának kiszámítása céljából gondolatban bontsuk fel a görbét olyan kicsiny szakaszokra, amelyekhez gyakorlatilag állandó p nyomás tartozik, az A felületű dugattyú Δs útjával kapcsolatos gáztérfogat-változás pedig $\Delta V = A\Delta s$ (**50.4. ábra**). Ekkor a gáznak az $A(p_1,V_1)$ kezdő- és a $B(p_2,V_2)$ végállapot közötti teljes munkáját a $\Delta W' = F\Delta s = pA\Delta s = p\Delta V$ elemi munkák összegeként kapjuk V_1-től V_2-ig:



50.3. ábra



50.4. ábra

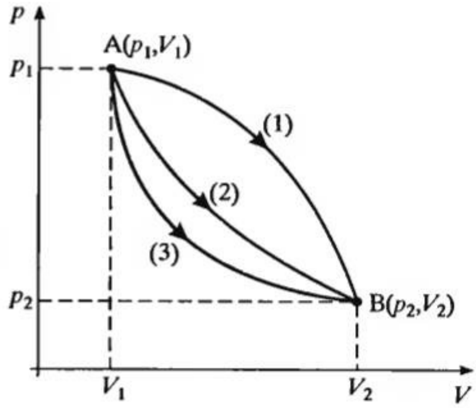
$$W' = \sum_{V_1}^{V_2} p\Delta V. \tag{50.7}$$

Ugyanekkor a környezet által a gázon végzett $W = -W'$ térfogati munka:

$$\boxed{W = -\sum_{V_1}^{V_2} p\Delta V}\,, \tag{50.8}$$

és szemléletesen a p–V állapotsíkon az A–B görbe alatti területtel egyezik meg.

Az (50.8) alapján vegyük észre, hogy a $W = -W'$ térfogati munka a V térfogaton kívül a p nyomástól is függ: $W = W(p, V)$. Ebből következik, hogy a gáz elvileg végtelen sok, így az **50.5. ábra** szerinti (1), (2) és (3) utakon is eljuthat az $A(p_1,V_1)$ kezdőállapotból a $B(p_2,V_2)$ végállapotba. Vagyis a gáz kezdeti és végállapotának p,V paraméterei nem határozzák meg egyértelműen a végzett térfogati munkát – mint a görbeszakasz alatti területet –, a térfogati munka függ a kezdő- és a végállapot közötti úttól is. Az olyan fizikai mennyiségeket – köztük a térfogati munkát is –, amelyeknek értéke függ az úttól, folyamattól, ***folyamatfüggvényeknek*** (útfüggvényeknek, nem állapotfüggvényeknek) nevezzük.



50.5. ábra

Ha ΔV nagyon-nagyon kicsi, vagyis minden határon túl tart nullához ($\Delta V \to 0$), akkor a térfogati munkát a $-p\Delta V$ elemi munkák összegének határértékeként (limeszeként) kapjuk:

$$\boxed{W = -\lim_{\Delta V \to 0} \sum_{V_1}^{V_2} p\Delta V = -\int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V}. \tag{50.9}$$

A térfogati munka tehát a mindenkori p nyomás térfogat szerinti integráljának (–1)-szerese a V_1 kezdeti térfogattól a V_2 végtérfogatig.

Az ideális gázok $pV = nRT$ termikus állapotegyenletének felhasználásával az (50.9) térfogati munka:

$$W = -W' = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \mathrm{d}V. \tag{50.10}$$

Állandó T hőmérsékleten az (50.10)-ből

$$\boxed{W = -W' = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}}, \tag{50.11}$$

illetve a $p_1V_1 = p_2V_2$ Boyle–Mariotte-törvény felhasználásával

$$W = -W' = -nRT \ln \frac{p_1}{p_2}. \tag{50.12}$$

3. A hőmennyiség

A kinetikus gázelméletből ismert (48. § 3.), hogy a rendezetlen hőmozgást végző gázrészecskékből álló makroszkopikus rendszer ΔU belsőenergia-változása egyenesen arányos a ΔT hőmérséklet-változással:

$$\boxed{\Delta U = C\Delta T}, \tag{50.13}$$

ahol C az anyagra jellemző arányossági együttható, a *hőkapacitás*. Ezt ***a munkavégzés és mozgásmennyiség-átadás (-átvétel) nélküli, rendezetlen mozgással kapcsolatos energiaátadást (-átvételt) hőközlésnek, a hőközlés során átadott (átvett) energiát hőmennyiségnek (röviden: hőnek) nevezzük***, jele: Q. A hőmennyiség SI-egysége a joule [dzsúl], jele: J. Ajánlott prefixált SI-egységei: TJ, GJ, MJ, kJ, mJ (1 TJ = 10^{12} J, 1 GJ = 10^9 J, 1 MJ = 10^6 J, 1 kJ = 10^3 J, 1 mJ = 10^{-3} J). Régebben használt, nem törvényes egysége a kalória, jele: cal. 1 cal $\approx$ 4,2 J.

A hőmennyiség tehát a termikus módon történő energiaközlés mértéke, és csak a kölcsönhatás ideje alatt beszélhetünk róla. A termikus kölcsönhatás után már csak belső energiáról lehet szó. Amennyiben a rendszer környezetével kizárólag termikus kölcsönhatásban van – amikor $W = 0$ –, akkor $Q = \Delta U$, vagyis a hőmennyiség a belső energia változásával egyezik meg.

A termikus kölcsönhatás során forgalomba kerülő hőmennyiség folyamatfüggvény, mert értékét a kezdő- és végállapot egyértelműen nem határozza meg, nagysága függ attól, hogy a folyamat milyen úton megy végbe.

A hőmennyiséggel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az (50.13) összefüggés nemcsak ideális gázokra vonatkozik, hanem valamennyi termodinamikai rendszerre, így a szilárdtestekre és a folyadékokra is.

Az anyagok hőkapacitása általában függ a hőmérséklettől, de a szobahőmérséklet (25 °C) környezetében gyakorlatilag állandónak tekinthető.

4. A termodinamika első főtétele

A termodinamika első főtétele a német Hermann HELMHOLTZ [helmholc] (1821–1894) által 1847-ben felismert energiamegmaradás elvének a termodinamikai folyamatokra érvényes törvénye. Kísérleti tapasztalatok alapján állapították meg, más törvényekből nem vezethető le, természeti alaptörvény.

A termodinamika első főtétele kimondja, hogy ***egy termodinamikai rendszer belső energiájának ΔU megváltozása a hőközlés során vele közölt (vagy az általa leadott) Q hőmennyiség és a munkavégzést jellemző W munka összege:***

$$\boxed{\Delta U = Q + W}. \tag{50.14}$$

Az (50.14) első főtételben $Q > 0$, ha a rendszer hőt vesz fel környezetéből; $Q < 0$, ha a rendszer hőt ad le környezetének; $W > 0$, ha a környezet végez munkát a rendszeren; $W < 0$, ha a rendszer végez munkát a környezet ellenében; $\Delta U > 0$, ha a rendszer belső energiája a folyamat során növekszik; $\Delta U < 0$, ha a rendszer belső energiája csökken.

Megjegyzések:

– Az első főtételben szereplő Q hőmennyiségnek nagyon fontos szerepe van, de ez nem jelenti azt, hogy a termodinamika csak a hőjelenségek tudománya. Ugyanis a rendszer belső energiáját nemcsak hőközléssel, hanem munkavégzéssel is meg lehet változtatni. Ezért a termodinamika csak szűkebb értelemben tekinthető hőjelenségekkel foglalkozó tudománynak, tágabb értelemben a termodinamika tulajdonképpen általános energetika.

– Mivel a rendszer belső energiáját hőközléssel és munkavégzéssel egyaránt meg lehet változtatni, ezért a hőmennyiség nem energiafajta, hanem a munkával analóg (a munkához hasonló) fizikai mennyiség.

– A hő és a munka folyamatfüggvények, mert értéküket a kezdő- és a végállapot egyértelműen nem határozza meg. Ezzel szemben a belső energia állapotfüggvény: adott kezdő- és végállapot közötti folyamatban a $\Delta U = Q + W$ minden útra ugyanakkora, bár Q és W más és más lehet.

– A termodinamika (50.14) alatti első főtételében a W nemcsak térfogati munka lehet, hanem egyéb (mechanikai, elektromos, mágneses, kémiai) munka is.

– Amennyiben a rendszer csak térfogati munkát végez, akkor az (50.8) alapján

$$\Delta U = Q + W = Q - \sum_{V_1}^{V_2} p\Delta V. \tag{50.15}$$

Állandó térfogaton $\Delta V = 0$, s így

$$\boxed{\Delta U = Q_V}\,. \tag{50.16}$$

Ha tehát a folyamat állandó térfogaton megy végbe, akkor a rendszer belsőenergia-változása egyenlő a felvett vagy leadott Q_V hővel. (A V index azt fejezi ki, hogy a folyamat állandó térfogaton ment végbe.)

– Ha egy termodinamikai rendszer periodikusan működő gép ($\Delta U = 0$), és környezetéből nem vesz fel hőt ($Q = 0$), akkor a gép munkája is nulla ($W = 0$). ***Nem létezik tehát olyan periodikusan működő termodinamikai gép, ún. elsőfajú perpetuum mobile (örökmozgó), amely hőfelvétel nélkül képes lenne munkát végezni.***

5. Az entalpiaváltozás

Ha a fizikai-kémiai folyamatok állandó nyomáson nyitott edényben mennek végbe, akkor a folyamat W összes munkáját célszerű a másra fel nem használható W_t térfogati munkára és $W_{egyéb}$ (pl. elektromos, kémiai) munkára bontani: $W = W_t + W_{egyéb}$. Ekkor az első főtétel

$$\Delta U = Q_p + W_t + W_{egyéb} \tag{50.17}$$

alakra hozható. Átrendezve:

$$\Delta U - W_t = Q_p + W_{\text{egyéb}}. \tag{50.18}$$

A ΔU belsőenergia-változás és a W_t térfogati munka különbségét *entalpiaváltozásnak* nevezzük és ΔH-val jelöljük: $\Delta H = \Delta U - W_t$. Állandó p nyomáson, $\Delta V = V_2 - V_1$ térfogatváltozás esetén $W_t = -p\Delta V$, s ekkor az entalpiaváltozás:

$$\Delta H = \Delta U + p\Delta V. \tag{50.19}$$

Az entalpiaváltozás bevezetésével a termodinamika (50.18) alatti első főtétele

$$\boxed{\Delta H = Q_p + W_{\text{egyéb}}} \tag{50.20}$$

alakban is írható.

Ez alapján nyilvánvaló, hogy ha egyéb munkavégzés nem történik ($W_{\text{egyéb}} = 0$), akkor a rendszer entalpiaváltozása egyenlő a rendszer által felvett (vagy leadott) Q_p hővel:

$$\boxed{\Delta H = Q_p}. \tag{50.21}$$

Megjegyezzük, hogy a ΔU belsőenergia-változás helyett azért célszerű ΔH entalpiaváltozással számolni, mert ekkor nem kell figyelembe venni a térfogati munkát. ΔH értéke – a ΔU-hoz hasonlóan – csak a kezdeti és a végállapottól függ.

6. A reakcióhő

Azokat a folyamatokat, amelyek során a különböző anyagok kémiai összetétele és szerkezete megváltozik, ***kémiai folyamatoknak (kémiai reakcióknak)*** nevezzük. A hőfelszabadulással ($Q < 0$) járó kémiai reakciókat *exoterm*, a hőelnyeléssel ($Q > 0$) kapcsolatos reakciókat pedig *endoterm* reakcióknak hívjuk. A kémiai folyamat során fellépő hő a ***reakcióhő*** (Q). A Q reakcióhő és a keletkezett anyag n anyagmennyiségének a Q/n hányadosát *moláris reakcióhőnek* nevezzük, értéke 20–1700 kJ/mol, vagyis 1 mol anyag keletkezésekor 20–1700 kJ reakcióhő szabadul fel vagy nyelődik el. A gyakorlatban energiaforrásként (pl. repülőgépek hajtóanyagaként) nagy moláris reakcióhőjű anyagokat használnak.

a) *Állandó térfogaton* ($V =$ állandó, $\Delta V = 0$) végbemenő kémiai reakciók esetén a térfogati munka nulla, s így az (50.16) szerint a Q_V reakcióhő a rendszer belsőenergia-változásával egyezik meg: $Q_V = \Delta U$. Exoterm reakció esetén a rendszer – belső energiájának rovására – hőt ad le ($Q_V < 0$) környezetének, endoterm reakció esetén viszont a rendszer a környezetből történő hőfelvétellel ($Q_V > 0$) növeli belső energiáját.

b) A kémiai folyamatok többnyire nyitott edényben, *állandó nyomáson* (p = állandó, $\Delta p = 0$) mennek végbe. Ekkor az (50.21) szerint a Q_p reakcióhő a rendszer ΔH entalpiaváltozásával egyezik meg: $Q_p = \Delta H$, és exoterm vagy endoterm folyamatot eredményez.

Speciális reakcióhő az ***égéshő***, amely egy adott anyag tiszta oxigénben történő elégésekor szabadul fel. Az égéshőnek és az elégett anyag tömegének a hányadosát *fajlagos égéshőnek* nevezzük. Pl. a benzin fajlagos égéshője kb. 47 MJ/kg.

Az égéshőtől meg kell különböztetni a ***fűtőértéket***, amely az egységnyi tömegű (vagy egységnyi térfogatú) anyag elégésekor ténylegesen hasznosítható hőmennyiséget mutatja meg. Értéke az égéskor bekövetkező energiaveszteség miatt mindig kisebb, mint a fajlagos égéshő. Tájékoztatásul megemlítjük, hogy pl. a gázolaj fűtőértéke kb. 42 MJ/kg, a földgázé kb. 33 MJ/m^3.

7. A termokémia főtétele

A termodinamika első főtételében a ΔU belsőenergia-változást és a ΔH entalpiaváltozást a kezdeti és a végállapot egyértelműen meghatározza, ezért a $Q_V = \Delta U$ és a $Q_p = \Delta H$ *reakcióhők csak a reakcióban részt vevő anyagok kiindulási és végállapotától függenek*, függetlenek a reakció lefolyásának idejétől, a részletfolyamatok minőségétől és sorrendjétől. Így pl. a szén akár egy lépésben ég el szén-dioxiddá ($C + O_2 = CO_2$), akár két lépésben ($C + \frac{1}{2}O_2 = CO$, majd $CO + \frac{1}{2}O_2 = CO_2$), a folyamat moláris reakcióhője mindig ugyanakkora. Ezt a törvényt – már az első főtétel kimondása előtt – tapasztalati alapon Henry HESS [hessz] (1802–1850) svájci származású orosz vegyész ismerte fel, és tiszteletére ***Hess-tételnek***, a ***termokémia*** (kémiai hőtan) ***főtételének*** nevezik (1840).

51. § Termikusenergia-transzport

A hő egyik helyről a másikra háromféleképpen juthat el: vezetéssel, áramlással és sugárzással.

1. A hővezetés

Hővezetésről akkor beszélünk, amikor a hő a testben részecskéről részecskére terjed anélkül, hogy a közeg vándorolna. A hőt vezető anyagban a rendezetlen hőmozgást végző atomok, molekulák, elektronok energiájuk egy részét ütközések útján adják át a szomszédos részecskéknek. Ha ez a hő az anyag belsejében terjed, akkor *belső hővezetésről*, ha pedig a test felületéről megy át a környezetbe, ill. a környezetből a testbe, akkor *külső hővezetésről* beszélünk. A belső és a külső hővezetés egyidejű fellépésével kapcsolatos a *hőátvitel*.

a) A belső hővezetés

Ha az l hosszúságú, A keresztmetszetű fémrúd végei között $T_1 - T_2 = \Delta T$ állandó hőmérséklet-különbség áll fenn, akkor Δt idő alatt a rúd bármely A keresztmetszetén áthaladó ΔQ hőmennyiséggel kapcsolatos $\Delta Q/(A\Delta t)$ hőáramsűrűség egyenesen arányos a $-\Delta T/l$ hőmérséklet-gradienssel. Stacionárius (állandó hőáram-sűrűségű) áramlás esetén a 45. §-ban ismertetett Onsager-arányosság szerint

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{A\Delta t} = -\lambda \frac{\Delta T}{l}}, \tag{51.1}$$

ahol a negatív előjel arra utal, hogy a hő az alacsonyabb hőmérsékletű hely felé terjed. A $\Delta Q/\Delta t$ a hőáram erőssége, λ pedig az anyagi minőségtől függő *belső hővezetési együttható*.

A belső hővezetési együttható megmutatja, hogy egységnyi hőmérséklet-gradiens esetén a rúd egységnyi keresztmetszetén egységnyi idő alatt mennyi hő megy át; – SI-egysége: $J/(m \cdot s \cdot K) = W/(m \cdot K)$; – értéke fémek és fémötvözetek esetén 60–400 $W/(m \cdot K)$, szigetelőknél 0,01–0,8 $W/(m \cdot K)$.

b) A külső hővezetés

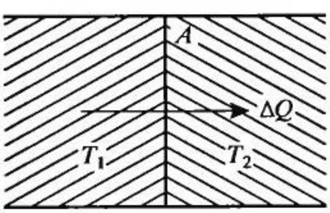
Ha két anyag (pl. tégla és levegő) A felületen közvetlenül érintkezik egymással, és az érintkező felületek különböző, T_1 és T_2 hőmérsékletűek (**51.1. ábra**), akkor a határfelületen áthaladó hőáram sűrűsége:

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{A\Delta t} = -\alpha \Delta T}, \tag{51.2}$$

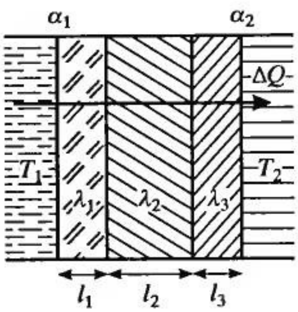
ahol $\Delta T = T_1 - T_2$, és α a két anyagra jellemző *hőátadási együttható*. SI-egysége: $J/(m^2 \cdot s \cdot K) = W/(m^2 \cdot K)$.

c) A hőátvitel (hőátbocsátás)

A többrétegű falon (**51.2. ábra**) átbocsátott, a belső és a külső hővezetéssel kapcsolatos hőáram sűrűsége:



51.1. ábra



51.2. ábra

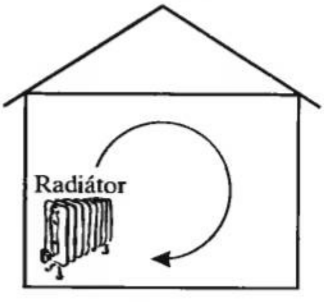
$$\boxed{\frac{\Delta Q}{A\Delta t} = -k\Delta T}, \tag{51.3}$$

ahol k a többrétegű fal *hőátviteli (hőátbocsátási) együtthatója*. SI-egysége: W/(m^2 · K). Értékét az egyes rétegek vastagsága, belső hővezetési és hőátadási együtthatója határozza meg.

A hővezetésnek számos gyakorlati vonatkozása van. – A környezetüknél magasabb hőmérsékletű testek hővezetéssel hőt adnak le, miközben hőmérsékletük exponenciálisan csökken.[21] – Az üveggyapot, a kőzetgyapot, a műanyaghab, az állatok testét borító szőrzet és tollazat, többrétegű ruhánk jó hőszigetelő. – Legjobb hőszigetelő a vákuum, ezért van a hőpalack (termosz) kettős fala között gyakorlatilag légüres tér. – A rossz hővezetésű anyagokban (pl. szénakazlakban) a baktériumok által termelt hő hatására öngyulladás következhet be. – Az élőlényekben termelt hő egy része a testfelületen át hővezetéssel távozik a környezetbe.[22] – A fémek és a fémötvözetek jó hővezetők (pl. radiátorok), és az elektromos áramot is jól vezetik (77. §). Mindkét vezetés elektronvezetés.

2. A hőáramlás (konvekció)

Hőáramlásról akkor beszélünk, ha folyadék vagy gáz tényleges mozgása szállítja a hőt a melegebb helyről a hidegebb helyre. A hőáramlás oka, hogy a felmelegedett folyadék vagy gáz (tömeg-) sűrűsége lecsökken, az Arkhimédész-féle felhajtóerő miatt felemelkedik, és helyet cserél a nagyobb (tömeg-) sűrűségű hidegebb közeggel. A közegben tehát cirkuláció (köráramlás) alakul ki. A hőáramlás az alapja a *központi fűtésnek* is: a központi fűtőberendezés kazánjában termelt meleg víz (vagy vízgőz) radiátorokon keresztül jut a fűtendő helyiségekbe (**51.3. ábra**). A meleg levegő a radiátorok fölött felemelkedik, helyére pedig az ablakon át hideg levegő kerül. Ha a fűtőközeg cirkulációjához a hőmérsékletkülönbség miatt kialakuló sűrűségkülönbség nem elegendő, akkor a meleg víz mozgását, ill. a vízgőz áramlását szivattyú biztosítja.



51.3. ábra

Hőáramlás alakul ki a kéményekben, a hűtőtornyokban és a szellőztetőberendezésekben. – A természetben a szelek (pl. monszun) és a tengeráramlások (pl. Golf-áramlás) szintén hőáramlások. – Szeles időben a hőmérsékletet alacsonyabbnak érezzük, mint amekkora a tényleges hőmérséklet. A szél ezen hűtőhatása azzal kapcsolatos, hogy a melegebb testek felszínének közelében a szél hatására a levegő gyorsabban cserélődik, mint szélcsendes időben. Ez csökkenti a test felületének hőmérsékletét, jelentősen megnövelve ezzel a hőleadást.

[21] L. pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 47. § 1. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

[22] A termelt hő másik része a verejtékmirigyekben termelt verejték elpárologtatására fordítódik (62. § 1.).

3. A hősugárzás

A hő terjedésének azt a módját, amikor a hő egyik testről a másikra úgy terjed, hogy nem melegíti fel a közbeeső közeget, ***hősugárzásnak (hőmérsékleti sugárzásnak)*** nevezzük (133. §). A hősugárzás mértékének csökkentésére a hőpalackok és a teáskannák felületét fényesre készítik. – Az üveg, a víz és a sötét színű anyagok a hősugarakat nagymértékben elnyelik. – A földi légkör felső rétegének a napsugarakra merőleges minden négyzetméterére másodpercenként 1400 J napenergia érkezik. – Felhőtlen éjszakákon a hősugárzás miatt a földfelszín lehűl. – A földfelszín által kibocsátott hősugarakat a légköri gázok (pl. szén-dioxid, metán) visszaverik. Ennek az ún. üvegházhatásnak a következményeként a földi légkör melegszik.

52. § Kondenzált anyagok és gázok hőkapacitásai

1. Kondenzált anyagok hőkapacitása

A kondenzált anyagok (folyadékok és szilárd anyagok) térfogata gyakorlatilag állandó. Termodinamikai folyamatokban az általuk felvett (vagy leadott) hő ($W = 0$ folytán) teljes egészében belső energiájukat növeli (vagy csökkenti): $Q = \Delta U$. Jellemzésükre a hőkapacitás, a moláris hőkapacitás (mólhő) és a fajlagos hőkapacitás (fajhő) szolgál.

a) A hőkapacitás

Kondenzált anyagok C hőkapacitásán értjük az általuk felvett (vagy leadott) Q hőnek és az eközben létrejött ΔT hőmérséklet-változásnak a hányadosát:

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta T}}\ . \tag{52.1}$$

A hőkapacitás megmutatja az egységnyi hőmérséklet-változáshoz tartozó hőmennyiséget; – SI-egysége a joule per kelvin, jele: J/K. Meghatározása: 1 J/K a hőkapacitása annak a rendszernek, amelynek 1 K hőmérséklet-változásához 1 J hőmennyiség tartozik. Ajánlott prefixált SI-egysége: kJ/K. SI-n kívüli törvényes egységei: J/°C, kJ/°C. – A hőkapacitás extenzív fizikai mennyiség: a rendszer eredő hőkapacitása az egyes részek hőkapacitásainak összegeként adódik.

b) A moláris hőkapacitás (mólhő)

Kondenzált anyagok C_m moláris hőkapacitásán (mólhőjén) értjük C hőkapacitásuk és n anyagmennyiségük hányadosát:

$$\boxed{C_m = \frac{C}{n}}\ . \tag{52.2}$$

A moláris hőkapacitás megmutatja az egységnyi anyagmennyiségű rendszer hőkapacitását; – SI-egysége a joule per mól·kelvin, jele: J/(mol · K). Meghatározása: 1 J/(mol · K) a moláris hőkapacitása annak az 1 mol anyagmennyiségű rendszernek, amelynek 1 K hőmérséklet-változásához 1 J hőmennyiség tartozik.

c) A fajlagos hőkapacitás (fajhő)

Kondenzált anyagok c fajlagos hőkapacitásán (fajhőjén) értjük C hőkapacitásuk és m tömegük hányadosát:

$$\boxed{c = \frac{C}{m}}\,. \tag{52.3}$$

A fajlagos hőkapacitás megmutatja az egységnyi tömegű anyag hőkapacitását; – SI-egysége a joule per kilogramm·kelvin, jele: J/(kg · K). Meghatározása: 1 J/(kg · K) a fajlagos hőkapacitása annak az 1 kg tömegű anyagnak, amelynek 1 K hőmérséklet-változásához 1 J hőmennyiség tartozik. Ajánlott prefixált SI-egysége: kJ/(kg · K). SI-n kívüli törvényes egységei: J/(kg · °C), kJ/(kg · °C).

d) A hőmennyiség számítása a hőkapacitásból

Az (52.1–3) alapján a kondenzált anyagok által felvett vagy leadott Q hő ΔT hőmérséklet-változás esetén

$$\boxed{Q = C\Delta T = nC_{\mathrm{m}}\Delta T = cm\Delta T}\,. \tag{52.4–6}$$

Kiegészítés:

– A kondenzált anyagok hőkapacitása, moláris hőkapacitása és fajlagos hőkapacitása kismértékben függ attól, hogy a hőcsere állandó térfogaton vagy állandó nyomáson megy végbe. Értékük függ még a hőmérséklettől is, bár a szobahőmérséklet (25 °C) környezetében nem számottevően. Pl. a víz fajlagos hőkapacitása 298,15 K (= 25 °C) hőmérsékleten és 100 kPa (= 1 bar) nyomáson c = 4186,7 J/(kg · K), ettől eltérő hőmérsékleten valamivel kisebb vagy nagyobb, de gyakorlatilag 4200 J/(kg · K).

– A víz nagy fajlagos hőkapacitása miatt kiváló hűtő- és fűtőközeg.

– A szilárd anyagok f = 6 szabadsági fokú részecskékből (atomokból, ionokból, molekulákból) állnak, s ezért az ekvipartíciótétel szerint hőkapacitásuk, moláris hőkapacitásuk és fajlagos hőkapacitásuk a (48.9) figyelembevételével:

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{f\frac{1}{2}nR\Delta T}{\Delta T} = 3nR}\,, \tag{52.7}$$

$$\boxed{C_{\mathrm{m}} = \frac{C}{n} = 3R}\,, \qquad \boxed{c = \frac{C}{m} = \frac{3nR}{m} = 3\frac{R}{M}}\,. \tag{52.8,9}$$

Alacsony hőmérsékleten a szilárd anyagok hőkapacitásainak mért értékei jóval kisebbek az (52.7–9) alapján számított értékeknél. Ennek az az oka, hogy alacsony hőmérsékleten a rezgési szabadsági fokok „befagynak", emiatt nem adhatnak járulékot a hőkapacitásokhoz. Az e nehézségből kivezető utat a kvantummechanika tárta fel.[23,24]

– Az (52.4–6) összefüggések csak akkor érvényesek, ha a ΔT hőmérséklet-intervallumban nem következik be fázisátalakulás (pl. olvadás). Ekkor az (52.4–6) alapján számított hőmennyiséghez hozzá kell adni a fázisátalakuláshoz tartozó hőmennyiséget is.

– A víz hőkapacitásának és a víz–levegő hőátadási együtthatójának a hányadosa, a víz ún. *hőtároló-képessége* igen nagy. Ennek következtében a kiterjedt tavaknak és a tengereknek jelentős klíma- (éghajlat-) mérséklő és hőmérséklet-kiegyenlítő hatásuk van.

2. Az ideális gázok hőkapacitásai

Az ideális gázok hőkapacitása, moláris hőkapacitása és fajlagos hőkapacitása attól is függ, hogyan változik a hőközlés során a gáz állapota. A végtelen sok lehetőség közül kettőt emelünk ki: az állandó térfogaton és az állandó nyomáson történő hőközlést.

Állandó térfogaton (V = állandó, $\Delta V = 0$) – az (50.16) és az ekvipartíciótételből adódó (48.9) alapján – a hőmennyiség:

$$\boxed{Q_V = \Delta U = f\frac{1}{2}nR\Delta T} \,. \qquad (52.10{,}11)$$

Állandó nyomáson (p = állandó, $\Delta p = 0$) viszont az (50.21,19), a (48.9) és a (43.13) alapján a hőmennyiség:

$$\boxed{Q_p = \Delta H = \Delta U + p\Delta V = f\frac{1}{2}nR\Delta T + nR\Delta T = \left(\frac{f}{2}+1\right)nR\Delta T} \,. \qquad (52.12\text{–}15)$$

Állandó nyomáson felvett (vagy leadott) Q_p hő tehát két részre fordítódik: egyrészt növeli (vagy csökkenti) a gáz belső energiáját, másrészt a gáz munkát végez a környezet ellenében (vagy a környezet végez munkát a gázon).

a) A hőkapacitás

Az állandó térfogathoz és az állandó nyomáshoz tartozó hőkapacitás az (52.1) definíció és az (52.11,15) alapján

$$\boxed{C_V = \frac{Q_V}{\Delta T} = \frac{f}{2}nR} \,, \qquad \boxed{C_p = \frac{Q_p}{\Delta T} = \left(\frac{f}{2}+1\right)nR} \,. \qquad (52.16\text{–}19)$$

[23] L. pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 20. § 9. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

[24] L. pl. Pintér F.: Atomhéjfizika (Általános fizika III.) 8. §. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 1999.

b) A moláris hőkapacitás

A moláris hőkapacitás (52.2) definíciója és az (52.17,19) hőkapacitások ismeretében

$$\boxed{C_{m,V}=\frac{C_V}{n}=\frac{f}{2}R},\quad \boxed{C_{m,p}=\frac{C_p}{n}=\left(\frac{f}{2}+1\right)R}. \qquad (52.20–23)$$

c) A fajlagos hőkapacitás

A fajlagos hőkapacitás (52.3) definíciója és az (52.17,19) hőkapacitások alapján

$$\boxed{c_V=\frac{C_V}{m}=\frac{f}{2}\cdot\frac{nR}{m}=\frac{f}{2}\cdot\frac{R}{M}},\quad \boxed{c_p=\frac{C_p}{m}=\left(\frac{f}{2}+1\right)\frac{nR}{m}=\left(\frac{f}{2}+1\right)\frac{R}{M}}. \qquad (52.24–29)$$

A hőkapacitások ismeretében
– *állandó térfogaton a belsőenergia-változás:*

$$\boxed{\Delta U=Q_V=C_V\Delta T=nC_{m,V}\Delta T=c_V m\Delta T}, \qquad (52.30–33)$$

– *állandó nyomáson az entalpiaváltozás:*

$$\boxed{\Delta H=Q_p=C_p\Delta T=nC_{m,p}\Delta T=c_p m\Delta T}. \qquad (52.34–37)$$

Itt jegyezzük meg, hogy mivel az ideális gáz belső energiája csak a hőmérséklettől függ (48. § 3.), ezért azonos ΔT hőmérséklet-különbség esetén az (52.30–33) alatti ΔU belsőenergia-változás mindig ugyanakkora, függetlenül attól, hogy a folyamat állandó vagy változó térfogaton megy végbe.

d) Összefüggés az ideális gázok hőkapacitásai között

A hőkapacitások hányadosát *adiabatikus kitevőnek* (jele: γ) nevezzük:

$$\boxed{\gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{C_{m,p}}{C_{m,V}}=\frac{c_p}{c_V}=\frac{\frac{f}{2}+1}{\frac{f}{2}}=1+\frac{2}{f}}. \qquad (52.38)$$

Egyatomos gázokra $f=3$, $\gamma=5/3$, kétatomos gázokra $f=5$, $\gamma=7/5$.

A hőkapacitások különbségét Robert MAYER (1814–1878) holland orvos és természettudós tiszteletére ***Robert Mayer-egyenletnek*** nevezik. Ennek különböző alakjai:

$$\boxed{C_p-C_V=\left(\frac{f}{2}+1\right)nR-\frac{f}{2}nR=nR}, \qquad (52.39)$$

$$\boxed{C_{m,p} - C_{m,V} = \left(\frac{f}{2}+1\right)R - \frac{f}{2}R = R}, \tag{52.40}$$

$$\boxed{c_p - c_V = \left(\frac{f}{2}+1\right)\frac{R}{M} - \frac{f}{2}\cdot\frac{R}{M} = \frac{R}{M}}. \tag{52.41}$$

Az ideális gázok hőkapacitásával kapcsolatos megállapításainkat az *52.1. táblázatban* foglaltuk össze.

Ideális gázok hőkapacitása, moláris hőkapacitása és fajlagos hőkapacitása kb. 298 K (= 25 °C) hőmérsékleten

52.1. táblázat

Hőkapacitás	Egyatomos gáz $f = 3$	Kétatomos gáz $f = 5$	Többatomos gáz $f = 6$	Fémek $f = 6$
C_p	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}nR$	$4nR$	–
C_V	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$	$3nR$	$3nR$
$C_{m,p}$	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}R$	$4R$	–
$C_{m,V}$	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$3R$	$3R$
c_p	$\frac{5}{2}\cdot\frac{R}{M}$	$\frac{7}{2}\cdot\frac{R}{M}$	$4\frac{R}{M}$	–
c_V	$\frac{3}{2}\cdot\frac{R}{M}$	$\frac{5}{2}\cdot\frac{R}{M}$	$3\frac{R}{M}$	$3\frac{R}{M}$
γ	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$	–
$C_p - C_V$	nR	nR	nR	–
$C_{m,p} - C_{m,V}$	R	R	R	–
$c_p - c_V$	$\frac{R}{M}$	$\frac{R}{M}$	$\frac{R}{M}$	–

3. A hőmennyiség és a hőkapacitás mérése

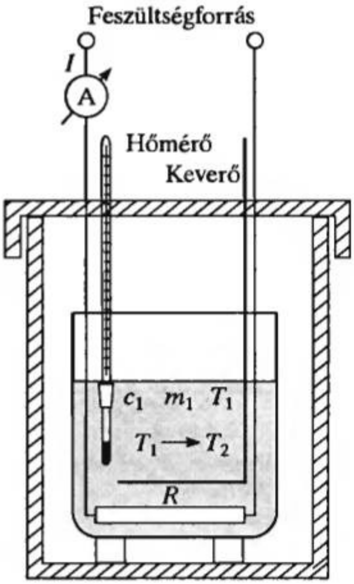
A hőmennyiség és a hőkapacitás mérésére szolgáló, jó hőszigetelésű edényeket kalorimétereknek nevezzük. Legegyszerűbb és leggyakrabban használt a *keverési kaloriméter*, amelyben hőmérő és hőmérséklet-homogenizáló keverő található (**52.1. ábra**).

a) A kaloriméter hőkapacitásának mérése

Az ismeretlen C hőkapacitású kaloriméterrt és a benne levő ismert c_1 fajlagos hőkapacitású, m_1 tömegű és T_1 hőmérsékletű folyadékot (többnyire vizet) az R elektromos ellenállású fűtőtesten átfolyó I erősségű áram t idő alatt T_2 hőmérsékletre melegíti fel (84. §). Az ekkor fejlődő I^2Rt hőt a folyadék és a kaloriméter veszi fel:

$$I^2 Rt = c_1 m_1 (T_2 - T_1) + C(T_2 - T_1). \qquad (52.42)$$

Ebből a kaloriméter C hőkapacitása kiszámítható.



52.1. ábra

b) Reakcióhő meghatározása

A kémiai folyamatokat kísérő Q reakcióhő az ismert C hőkapacitású kaloriméter és a c_1 fajlagos hőkapacitású, m_1 tömegű és T_1 hőmérsékletű folyadék hőmérsékletét T_2-re változtatja meg:

$$Q = c_1 m_1 (T_2 - T_1) + C(T_2 - T_1). \qquad (52.43)$$

c) Szilárd anyagok fajlagos hőkapacitásának mérése

Az m_1 tömegű, T_1 hőmérsékletű szilárd anyag ismeretlen c_1 fajlagos hőkapacitását úgy határozzák meg, hogy az ismert C hőkapacitású kaloriméterben levő, de vele kémiai reakcióba nem lépő, ismert c_2 fajlagos hőkapacitású, m_2 tömegű és $T_2 < T_1$ hőmérsékletű folyadékba dobják. Ha a hőmérséklet-kiegyenlítődés után a közös hőmérséklet T, akkor

$$c_1 m_1 (T_1 - T) = c_2 m_2 (T - T_2) + C(T - T_2). \qquad (52.44)$$

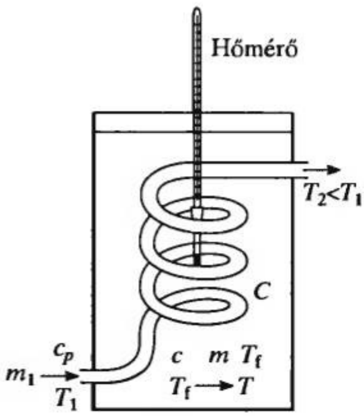
A mért adatokból c_1 kiszámítható.

d) Folyadékok fajlagos hőkapacitásának mérése

A folyadékok fajlagos hőkapacitása a fentiekhez hasonlóan mérhető ismert fajlagos hőkapacitású szilárd anyaggal, vagy kémiai reakcióba nem lépő ismert fajlagos hőkapacitású folyadékkal.

e) Gázok fajlagos hőkapacitásának mérése

Gázok állandó nyomáshoz tartozó c_p fajlagos hőkapacitását úgy mérik, hogy az m_1 tömegű, T_1 hőmérsékletű gázt ismert C hőkapacitású kaloriméterben levő c fajlagos hőkapacitású, m tömegű és $T_f < T_1$ hőmérsékletű folyadékon áramoltatják át (**52.2. ábra**). Ekkor a gáz $T_2 < T_1$



52.2. ábra

hőmérsékletre hűl le, a kaloriméter és a folyadék pedig $T > T_t$ hőmérsékletre melegszik. A leadott és a felvett hőmennyiség megegyezése folytán

$$c_p m_1 (T_1 - T_2) = cm(T - T_t) + C(T - T_t). \tag{52.45}$$

Ebből c_p kiszámítható.

Az állandó nyomáson vett c_p fajlagos hőkapacitás és az M moláris tömeg ismeretében az (52.41) Robert Mayer-egyenlet alapján kiszámítható a gáz állandó térfogathoz tartozó c_V fajlagos hőkapacitása.

Tájékoztatásul az *52.2. táblázatban* néhány anyag fajlagos hőkapacitását tüntettük fel.

Néhány anyag fajlagos hőkapacitása (tájékoztató értékek) *52.2. táblázat*

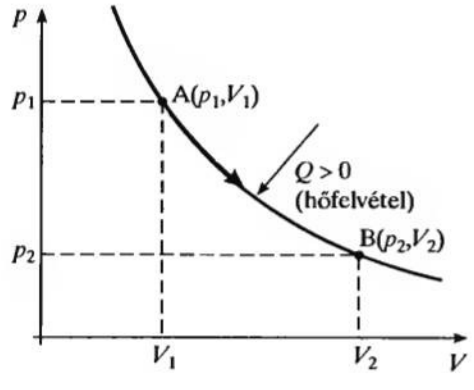
Anyag	c, J/(kg · K)	Anyag	c, J/(kg · K)
Szilárd anyagok:		***Folyadékok:***	
Alumínium	913	Etil-alkohol	2403
Beton	880	Etil-éter	2269
Fa	1300–2900	Higany	138
Jég (–10 °C–0 °C)	2004	Petróleum	1967
Nikkel	445	Víz (14,5 °C–15,5 °C)	4186
Ólom	130	***Gázok*** (10^5 Pa nyomáson):	
Réz	389	Hélium	5240
Sárgaréz (63% Cu, 37% Zn)	385	Hidrogén	14 200
Üveg	753–779	Levegő (0 – 200 °C)	996
Vas	465–540	Vízgőz (100 °C)	1760

53. § Az első főtétel alkalmazása ideális gázok nyílt folyamataira

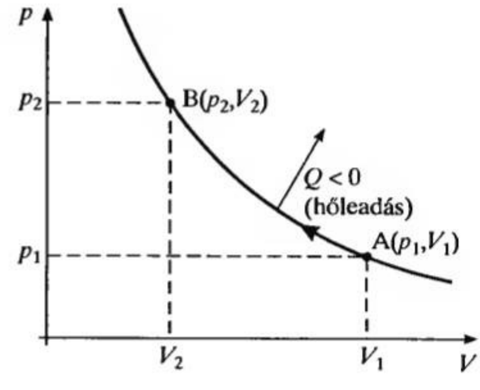
Ebben a §-ban az ideális gázok speciális nyílt folyamataival foglalkozunk, amelyeknek során a rendszer a kezdeti állapotból kvázisztatikus egyensúlyi állapotokon át jut el egy másik, ún. végállapotba. Az ilyen folyamatok tanulmányozása azért fontos, mert a rájuk érvényes törvények alapján a reális gázok valóságos folyamatainak a törvényeire is tudunk következtetni. Általában négy egyszerű nyílt folyamatot szokás megkülönböztetni, mint amilyen az izotermikus, az izochor, az izobár és az adiabatikus folyamat.

1. Izotermikus nyílt folyamat

Izotermikus nyílt folyamatban a rendszer hőmérséklete nem változik (T = állandó, $\Delta T = 0$), így a belsőenergia-változás is zérus ($\Delta U = 0$). Az ilyen állapotváltozásra érvényes a $p_1V_1 = p_2V_2$ Boyle–Mariotte-törvény. Ezt az állapotváltozást a p–V állapotsíkon – tágulás



53.1. ábra



53.2. ábra

(**53.1. ábra**) és összenyomás (**53.2. ábra**) esetén egyaránt – hiperbola, ún. *izoterma* szemlélteti.

Izotermikus folyamatban

– a gáz térfogati munkája az (50.11,12) szerint

$$\boxed{W = -nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = -nRT\ln\frac{p_1}{p_2}}, \qquad (53.1,2)$$

– a gáz által felvett (vagy leadott) hő a $\Delta U = 0$ folytán az első főtétel szerint

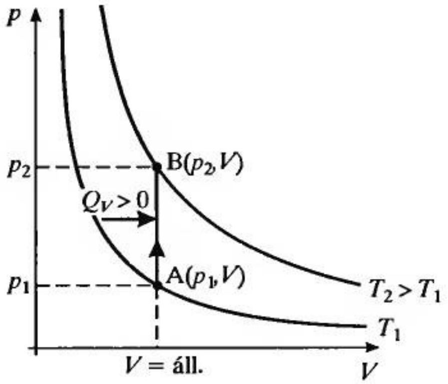
$$\boxed{Q = -W}. \qquad (53.3)$$

a) Izotermikus tágulás (expanzió) esetén (**53.1. ábra**) a gáz térfogata növekszik ($V_2 > V_1$), nyomása csökken ($p_2 < p_1$), tágulási munkát végez ($W < 0$) és *hőt vesz fel környezetéből* ($Q > 0$).

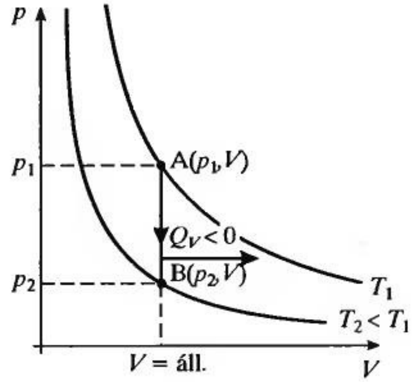
b) Izotermikus összenyomás (kompresszió) esetén (**53.2. ábra**) a gáz térfogata csökken ($V_2 < V_1$), nyomása nő ($p_2 > p_1$), a környezet munkát végez a gázon ($W > 0$), miközben a *gáz hőt ad le környezetének* ($Q < 0$).

2. Izochor nyílt folyamat

Izochornak nevezzük a nyílt folyamatot akkor, ha a rendszer térfogata nem változik (V = állandó, $\Delta V = 0$), s ebből kifolyólag a térfogati munka is zérus ($-p\Delta V = 0$). Az állapotváltozást a $p_1/T_1 = p_2/T_2$ Gay-Lussac II. törvénye írja le, és a p–V állapotsíkon a p tengellyel párhuzamos egyenesszakasz, az ún. *izochora* szemlélteti mind melegítéskor (**53.3. ábra**), mind hűtéskor (**53.4. ábra**).



53.3. ábra



53.4. ábra

Izochor nyílt folyamatban – térfogati munka hiányában – az első főtétel szerint a gáz által felvett (vagy leadott) hő mindig egyenlő a gáz belsőenergia-változásával. Az (52.10,11, 16,20) alapján

$$\boxed{Q_V = \Delta U = f\frac{1}{2}nR\Delta T = C_V\Delta T = nC_{m,V}(T_2 - T_1)}\,. \qquad (53.4\text{–}7)$$

a) Melegítéskor (**53.3. ábra**) növekszik a gáz hőmérséklete ($T_2 > T_1$) és nyomása ($p_2 > p_1$), a rendszer *hőt vesz fel környezetéből* ($Q_V > 0$) és belső energiaként tárolja ($\Delta U > 0$).

b) Hűtéskor (**53.4. ábra**) csökken a gáz hőmérséklete ($T_2 < T_1$) és nyomása ($p_2 < p_1$), a gáz belső energiájának rovására ($\Delta U < 0$) *hőt ad le környezetének* ($Q_V < 0$).

3. Izobár nyílt folyamat

Izobárnak mondjuk a nyílt folyamatot akkor, ha állandó nyomáson (p = állandó, $\Delta p = 0$) *megy végbe.* Az állapotváltozásra a $V_1/T_1 = V_2/T_2$ Gay-Lussac I. törvénye érvényes, és szemléltetésére a p–V állapotsíkon a V tengellyel párhuzamos egyenesszakasz, az *izobára* szolgál melegítéskor (**53.5. ábra**) és hűtéskor (**53.6. ábra**) egyaránt.

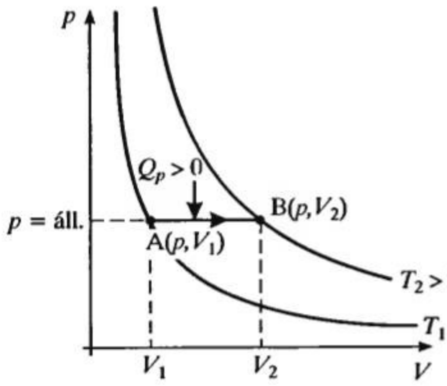
Izobár folyamatban

– *a gáz térfogati munkája* az (50.5,6) szerint

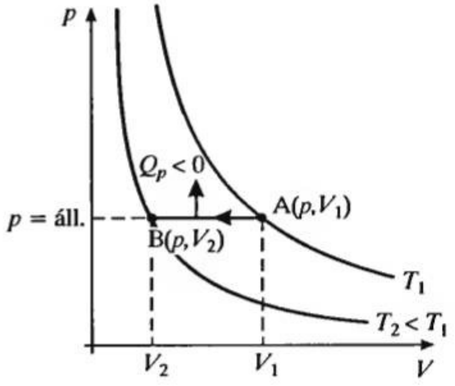
$$\boxed{W = -p(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)}\,, \qquad (53.8,9)$$

– *a gáz által felvett (vagy leadott) hő* az (52.12,15,18,22) szerint

$$\boxed{Q_p = \Delta H = \left(\frac{f}{2}+1\right)nR\Delta T = C_p\Delta T = nC_{m,p}(T_2 - T_1)}\,. \qquad (53.10\text{–}13)$$



53.5. ábra



53.6. ábra

a) Melegítéskor (**53.5. ábra**) növekszik a gáz hőmérséklete ($T_2 > T_1$) és térfogata ($V_2 > V_1$), a gáz *hőt vesz fel környezetéből* ($Q_p > 0$), miközben növekszik az entalpiája ($\Delta H > 0$) és tágulási munkát végez ($W < 0$).

b) Hűtéskor (**53.6. ábra**) csökken a gáz hőmérséklete ($T_2 < T_1$) és térfogata ($V_2 < V_1$), a *gáz hőt ad le környezetének* ($Q_p < 0$), csökken az entalpiája ($\Delta H < 0$), a környezet a gázon munkát végez ($W > 0$).

4. Adiabatikus nyílt folyamat

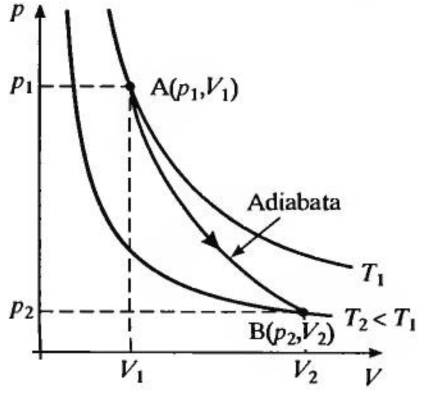
Adiabatikus a nyílt folyamat akkor, ha a gáz és környezete között nincs hőcsere ($Q = 0$), a rendszerben külső hatásra végbemenő folyamatok pedig lassan játszódnak le. Ekkor az első főtétel szerint a gáz belsőenergia-növekedése (vagy csökkenése) az összenyomási (vagy tágulási) munkával egyezik meg:

$$\boxed{\Delta U = W}\,. \tag{53.14}$$

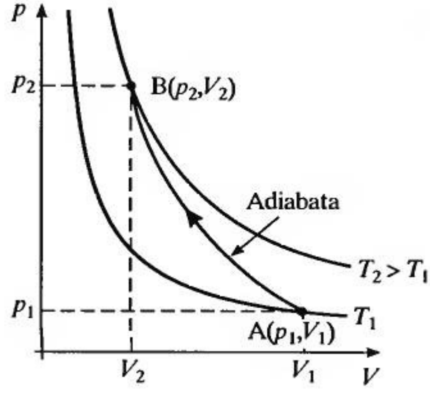
Adiabatikus folyamatban mindhárom állapotjelző (p, V, T) változik és érvényes a $pV = nRT$ termikus állapotegyenlet. A p–V állapotsíkon a szemléltetésére szolgáló görbeszakasz az *adiabata* (**53.7, 8. ábra**).

a) Adiabatikus táguláskor (**53.7. ábra**) növekszik a gáz térfogata ($V_2 > V_1$), csökken a nyomása ($p_2 < p_1$) és hőmérséklete ($T_2 < T_1$), *a gáz munkát végez* a környezet ellenében ($W < 0$), miközben csökken a belső energiája ($\Delta U < 0$).

b) Adiabatikus összenyomáskor (**53.8. ábra**) csökken a gáz térfogata ($V_2 < V_1$), növekszik a nyomása ($p_2 > p_1$) és hőmérséklete ($T_2 > T_1$), a *környezet munkát végez* a gázon ($W > 0$), miközben növekszik a gáz belső energiája ($\Delta U > 0$).



53.7. ábra



53.8. ábra

Adiabatikus táguláson alapszik az ionizált részecskék kimutatására szolgáló *Wilson-féle ködkamra* (165. §). Adiabatikus folyamatok mennek végbe egyes *hőerőgépekben* és *hűtőgépekben* (58. §), *alacsony hőmérsékleteket előállító berendezésekben* (63. §) és a *légkörben*. Így pl. a magas hegyek (Alpok, Kaukázus) lábához érkező nedves levegő felemelkedik, adiabatikusan kitágul, lehűl, majd a benne levő apró vízcseppek felhőt képeznek, kicsapódnak és eső formájában a földre hullanak. A hegygerincen átbukó, a hegy másik oldalán leereszkedő levegő már szárazabb, és adiabatikus összenyomódása folytán felmelegszik. Ez a száraz levegő a *főn*.

II. D) A TERMODINAMIKA MÁSODIK FŐTÉTELE ÉS AZ ENTRÓPIA

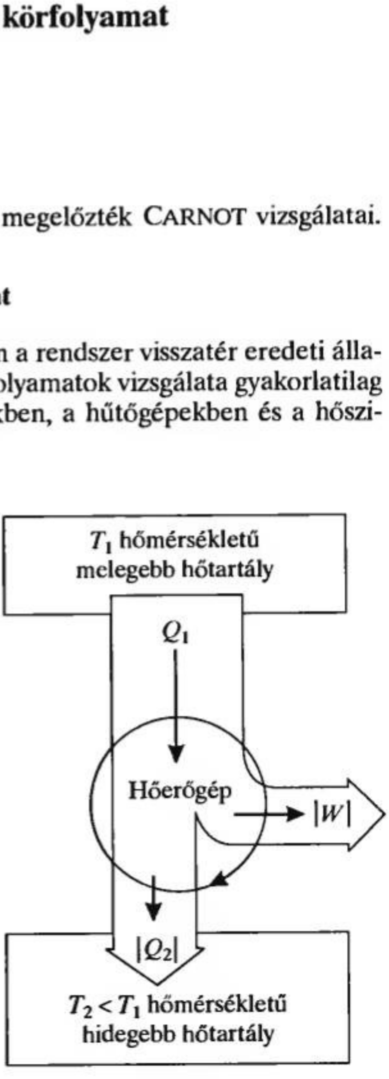
54. § A reverzíbilis Carnot-féle körfolyamat

A termodinamika második főtételének kimondását megelőzték CARNOT vizsgálatai.

1. A reverzíbilis direkt (egyenes) Carnot-féle körfolyamat

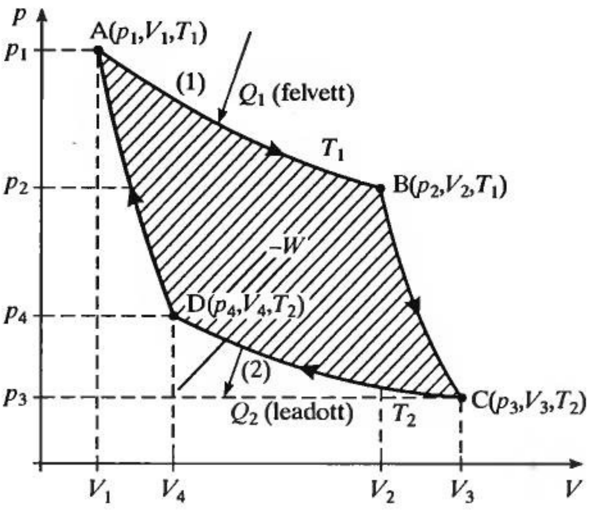
Az olyan termodinamikai folyamatot, amelynek során a rendszer visszatér eredeti állapotába, *körfolyamatnak* (ciklusnak) nevezzük. Az ilyen folyamatok vizsgálata gyakorlatilag igen jelentős, mert a periodikusan dolgozó hőerőgépekben, a hűtőgépekben és a hőszivattyúkban körfolyamatok játszódnak le.

A hőerőgépek hatásfokának javítására irányuló első vizsgálatok CARNOT nevéhez fűződnek (1824). CARNOT olyan négylépéses, két izotermikus és két adiabatikus nyílt folyamatból álló körfolyamatot tervezett, amely elvileg megvalósítható egy T_1 hőmérsékletű melegebb hőtartály és egy $T_2 < T_1$ hőmérsékletű hidegebb hőtartály között működő hőerőgéppel (**54.1. ábra**).



54.1. ábra

CARNOT megállapította, hogy ha az ideális gáz térfogata csak nagyon lassan változik, akkor *a)* a gáz igen jó közelítéssel egyensúlyi állapotok sorozatán, ún. kvázisztatikus állapotokon megy át; *b)* a folyamat elvileg végtelen hosszú ideig (gyakorlatilag hosszú ideig) tart; *c)* a folyamat direkt (egyenes) és legkisebb külső nyomás hatására indirekt (fordított) irányban – ugyanazokon a közbülső állapotokon át – is végbemehet; *d)* a direkt és az indirekt folyamat a p–V állapotsíkon közös görbével szemléltethető (**50.3. ábra**); *e)* a direkt és az indirekt folyamatban a két munka megegyező nagyságú, de ellentétes előjelű; *f)* a körfolyamatot végző gázban, sem annak környezetében maradandó változás nem jön létre. Az ilyen folyamatokat *reverzíbilis körfolyamatoknak* nevezzük.



54.2. ábra

A reverzíbilis direkt Carnot-féle körfolyamatban dolgozó hőerőgép *a)* Q_1 hőt vesz fel a T_1 hőmérsékletű melegebb hőtartályból; *b)* a felvett hő egy részét $|W|$ külső munkára fordítja; *c)* $|Q_2| = Q_1 - |W|$ hőt pedig a $T_2 < T_1$ alacsonyabb hőmérsékletű hőtartálynak (hűtőnek) ad le (**54.1. ábra**).

A CARNOT-ról elnevezett ideális munkaközegű, négylépéses, reverzíbilis direkt körfolyamat (**54.2. ábra**) részei a következők: izotermikus tágulás (A–B nyílt folyamat), adiabatikus tágulás (B–C nyílt folyamat), izotermikus összenyomás (C–D nyílt folyamat) és adiabatikus összenyomás (D–A nyílt folyamat).

a) Izotermikus tágulás (A–B nyílt folyamat)

Az igen nagy hőkapacitású, s ennélfogva T_1 = állandó hőmérsékletű melegebb hőtartályból a hőerőgépbe áramló ideális gáz izotermikusan tágul az A(p_1,V_1,T_1) kezdőállapotból a B(p_2,V_2,T_1) végállapotba. Mivel ebben az izotermikus folyamatban sem a gáz hőmérséklete, sem a belső energiája nem változik (T_1 = állandó, $\Delta U_{AB} = 0$), ezért a termodinamika első főtétele szerint a hőerőgép által a melegebb hőtartályból az (1) úton felvett $Q_1 > 0$ hő az (53.1,3) szerint teljes egészében $W'_{AB} = -W_{AB}$ tágulási munkára fordítódik:

$$W'_{AB} = -W_{AB} = Q_1 = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0. \qquad (54.1\text{–}3)$$

b) Adiabatikus tágulás (B–C nyílt folyamat)

Ha megszüntetjük a melegebb hőtartály és a hőerőgép közötti hőcserét, az ideális gáz adiabatikus tágulással a B(p_2,V_2,T_1) állapotból a C(p_3,V_3,T_2) állapotba megy át, állapothatározói $p_3 < p_2$-re, $V_3 > V_2$-re és $T_2 < T_1$-re változnak. Az adiabatikus tágulás során az ideális gáz, belső energiájának rovására, $W'_{BC} = -W_{BC}$ munkát végez, és az (52.32) figyelembevételével a gáz munkája:

$$W'_{BC} = -W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nC_{m,V}(T_2 - T_1) = nC_{m,V}(T_1 - T_2) > 0. \qquad (54.4\text{–}7)$$

c) Izotermikus összenyomás (C–D nyílt folyamat)

A $T_2 < T_1$ hőmérsékletre lehűlt gázt izotermikusan nyomjuk össze V_3-ról V_4 térfogatra, amelyet úgy válasszunk meg, hogy teljesüljön a $V_4/V_3 = V_1/V_2$ arány.[25] Ebben az izotermikus szakaszban az ideális gáz a (2)-vel jelölt úton jut el a $C(p_3,V_3,T_2)$ állapotból a $D(p_4,V_4,T_2)$ állapotba. Most a gázon végzett munka folytán a fejlődött $Q_2 < 0$ hő a $T_2 < T_1$ hőmérsékletű hidegebb hőtartályba megy át, és az (53.1,3) szerint a gáz munkája:

$$W'_{CD} = -W_{CD} = Q_2 = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} = nRT_2 \ln\frac{V_1}{V_2} = -nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} < 0. \qquad (54.8\text{–}12)$$

d) Adiabatikus összenyomás (D–A nyílt folyamat)

A körfolyamat zárásaként az ideális gáz adiabatikus összenyomással kerüljön vissza a $D(p_4,V_4,T_2)$ állapotból az $A(p_1,V_1,T_1)$ kezdeti állapotba. Ekkor az (52.32) alapján a gázon végzett munka növeli a gáz belső energiáját, és a gáz munkája:

$$W'_{DA} = -W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nC_{m,V}(T_1 - T_2) < 0. \qquad (54.13\text{–}15)$$

Ezekkel a nyílt részfolyamatokkal a körfolyamatot befejeztük. Az (54.7,15) összefüggésekből nyilvánvaló, hogy az adiabatikus tágulás és összenyomás során a gáz által végzett munkák csak előjelben különböznek egymástól, s így $W'_{BC} + W'_{DA} = -W_{BC} + (-W_{DA}) = 0$.

Az ideális gázzal vezetett Carnot-körfolyamat $W' = -W$ összes munkája csak az izotermikus folyamatokkal kapcsolatos, és az (54.1,2,8,9) szerint

$$\boxed{W' = -W = -W_{AB} + (-W_{CD}) = Q_1 + Q_2}. \qquad (54.16\text{–}18)$$

Azt kaptuk tehát, hogy az ideális gázzal vezetett reverzíbilis Carnot-féle körfolyamatban a $Q = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|$ hő teljes egészében a környezet ellenében végzett $W' = -W$ munkára fordítódik. Ez szemléletesen a körfolyamatot ábrázoló zárt görbe által határolt terület (**54.2. ábra**). A körfolyamat során a belsőenergia-változás zérus ($\Delta U = 0$), az ideális gáz végül visszatér eredeti állapotába, s minden készen áll a körfolyamat megismétlésére.

2. A reverzíbilis direkt (egyenes) Carnot-féle körfolyamat termikus hatásfoka

A reverzíbilis direkt Carnot-féle körfolyamat szerint dolgozó hőerőgép termikus hatásfokán értjük a gép által végzett $W' = -W = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|$ teljes munka és a magasabb hőmérsékletű hőtartályból felvett Q_1 hő hányadosát. Az (54.16,18) figyelembevételével a termikus hatásfok:

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{-W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}. \qquad (54.19\text{–}22)$$

[25] Ez az arány elméletileg igazolható. L. pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 22. § 4. és 24. § 1. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

Az így definiált termikus hatásfok azt mutatja meg, hogy a melegebb hőtartályból a körfolyamatban felvett Q_1 hő hányadrésze fordítódik munkára.

Az izotermikus tágulási szakaszon az (54.2,3) képletek szerint felvett Q_1 hő és az izotermikus összenyomás során az (54.9,12) képletek szerint leadott Q_2 hő ismeretében az ideális gázközegű Carnot-féle körfolyamat termikus hatásfoka:

$$\boxed{\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}. \tag{54.23–25}$$

Ebből kiolvasható, hogy a reverzíbilis direkt Carnot-féle körfolyamat termikus hatásfoka csak a két hőtartály hőmérsékletétől függ. Értéke mindig kisebb 1-nél (100%-nál), mert lehetetlen visszavinni a gázt eredeti állapotába anélkül, hogy $|Q_2|$ hőt ne adjon le környezetének. Ezen túlmenően az $\eta < 1$ összhangban van a termodinamika harmadik főtételével is, miszerint $T_2 = 0$ K nem érhető el (59. § 6.).

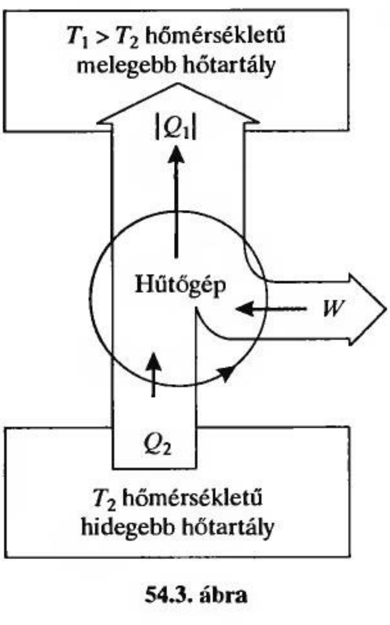
Minden tapasztalat, de az elméleti számítások is azt mutatják, hogy a T_1 és T_2 hőmérsékleti határok között dolgozó reverzíbilis Carnot-gép termikus hatásfoka az elvileg elérhető legnagyobb hatásfok. A gyakorlatban megvalósított hőerőgépek (58. § 1.) hatásfoka ennél mindig kisebb. Pl. a $T_1 = 843$ K és a $T_2 = 373$ K hőmérsékletek között dolgozó gőzturbina elvileg lehetséges maximális hatásfoka 56%, a fellépő veszteségek (pl. súrlódási veszteség) miatt azonban – az energiahordozóra vetítve – mindössze 30–39%.

3. A redukált hők összege

A reverzíbilis direkt Carnot-féle körfolyamat (54.23,25) hatásfokából adódik, hogy

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \tag{54.26}$$

mert $Q_2 < 0$ és $|Q_2 / T_2| = Q_1 / T_1$. A Q_1/T_1 és a Q_2/T_2 hányadosokat redukált hőknek nevezzük. *A reverzíbilis direkt Carnot-féle körfolyamatban tehát a redukált hők összege nulla,* és független a körfolyamatot végző közeg anyagi minőségétől.



54.3. ábra

4. A reverzíbilis indirekt (fordított) Carnot-féle körfolyamat

A hűtőgépek és a hőszivattyúk (58. § 2.) – a hőerőgépekkel ellentétben – indirekt irányban dolgoznak (**54.3. ábra**). Ezek $Q_2 > 0$ hőt vonnak el a T_2 hőmérsékletű hidegebb hőtartályból és $W > 0$ külső munkával $|Q_1| = Q_2 + W$ hőt juttatnak a $T_1 > T_2$ hőmérsékletű hőtartályba. Termikus hatásfokuk:

$$\boxed{\eta = \frac{W}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - Q_2}{|Q_1|} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}. \tag{54.27–29}$$

5. Termodinamikai hőmérsékleti skála

Mivel a reverzíbilis Carnot-féle körfolyamat $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ hatásfoka csak a két hőtartály hőmérsékletétől függ, ezért KELVIN szerint elvileg lehetséges egy, az anyagi minőségtől független *termodinamikai hőmérsékleti skála* (régebbi elnevezése: abszolút hőmérsékleti skála) definiálása (1852).

A termodinamikai hőmérsékleti skála meghatározásának alapját az (54.24,25) termikus hatásfokból adódó

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{|Q_2|} \tag{54.30}$$

összefüggés képezi, ahol T_1 és T_2 a Kelvin-skála két különböző pontjához tartozó hőmérséklet. Mivel az (54.30) csak a hőmérsékletek arányát határozza meg, ezért önkényesen ki kell jelölni egy hőmérsékleti alappontot. Megállapodás szerint a T_2 alapponthoz a víz hármaspontjának megfelelő 273,16 K (= 0,01 °C) hőmérsékletet rendelték. [Ekkor a Kelvin-skála zéruspontja –273,15 °C-nak (0 kelvinnek) felel meg.]

A fentiek alapján ismeretlen hőmérsékletet úgy határozunk meg, hogy a keresett T_1 hőmérséklet és a $T_2 = 273{,}16$ K hármasponti hőmérséklet között reverzíbilis Carnot-féle körfolyamatot létesítünk, és ezeken a hőmérsékleteken megmérjük a forgalomba kerülő Q_1, Q_2 hőmennyiségeket. Ezek ismeretében az (54.30) alapján T_1 kiszámítható.

Megjegyzések:

– Az anyagi minőségtől független termodinamikai hőmérsékleti skála jól illeszkedik a méréstechnikai szempontokat kielégítő nemzetközi gyakorlati hőmérsékleti skálához (41. § 2.).

– A termodinamikai hőmérsékleti skála legalacsonyabb pontja 0 K, amely a termodinamika harmadik főtétele szerint tetszőleges pontossággal megközelíthető, de a valóságban nem érhető el (59. § 6.).

55. § A reverzíbilis folyamatok és az entrópia

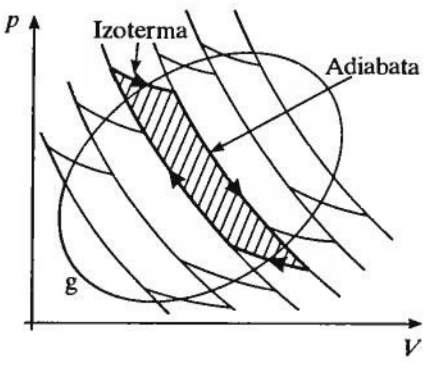
1. A Clausius-féle egyenlőség

A reverzíbilis Carnot-féle körfolyamatban a redukált hők összegére kapott (54.26) általánosítható tetszőleges (nem Carnot-féle) reverzíbilis körfolyamatra is, amelyet izotermákkal és adiabatákkal sűrűn behálózott p–V állapotsíkon a g zárt görbe szemléltet (**55.1. ábra**). Ekkor a reverzíbilis körfolyamat elemi reverzíbilis Carnot-féle körfolyamatokból tehető össze. Mivel a görbe belsejében futó adiabataszakaszokon a rendszer ellentétes irányban kétszer halad át, így ezek járuléka kiesik, csak az izotermikus szakaszokon lép fel hőcsere. Jelöljük az egyik közbülső (az ábrán bevonalkázott) elemi reverzíbilis Carnot-féle körfolyamatban a felvett és a leadott hők összegét ΔQ_{rev}-vel, a hőcsere során gyakorlatilag állandónak tekinthető hőmérsékletet pedig T-vel. Továbbá: ha a p–V állapotsíkban az izoterma–adiabata hálózatot minden határon túl sűrítjük, akkor a törtvonalakból álló görbe a reverzíbilis körfolyamat g zárt görbéjébe megy át. Ekkor a tetszőleges reverzíbilis körfolyamatban az elemi redukált hők összege:

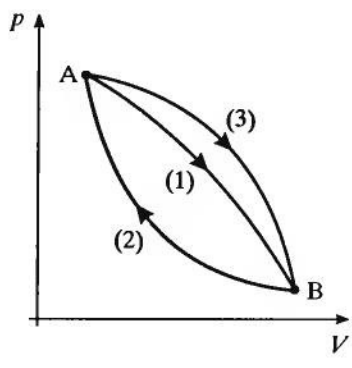
$$\boxed{\sum_{\text{körf}} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = 0}\,. \tag{55.1}$$

Ez az ún. ***Clausius-féle egyenlőség*** azt fejezi ki, hogy *bármely reverzíbilis körfolyamatban a $\Delta Q_{rev}/T$ elemi redukált hők összege zérus.* (A rev index arra utal, hogy a folyamat reverzíbilis.)

Az (55.1) Clausius-féle egyenlőségből két fontos következtetés vonható le:



55.1. ábra



55.2. ábra

a) Ha egy termodinamikai rendszer tetszőleges reverzíbilis körfolyamat során az A állapotból az (1) úton jut el a B állapotba, majd a B állapotból a (2) úton jut vissza az A állapotba, akkor az **55.2. ábra** és az (55.1) alapján

$$\sum_{\text{körf}} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = (1)\sum_{A}^{B} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} + (2)\sum_{B}^{A} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = 0. \tag{55.2}$$

Ebből

$$(1)\sum_{A}^{B}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}=-(2)\sum_{B}^{A}\frac{\Delta Q_{rev}}{T},\tag{55.3}$$

vagyis „oda-vissza" úton az elemi redukált hők összegei csak előjelben különböznek.

b) Ha a folyamat az (1) út helyett a (3) úton játszódik le A-ból B-be, majd onnan a (2) úton vissza A-ba, akkor szintén az **52.2. ábra** és az (55.1) alapján

$$(3)\sum_{A}^{B}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}+(2)\sum_{B}^{A}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}=0.\tag{55.4}$$

Ebből

$$(3)\sum_{A}^{B}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}=-(2)\sum_{B}^{A}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}.\tag{55.5}$$

Az (55.3) és az (55.5) összefüggések jobb oldalainak egyenlősége folytán

$$(1)\sum_{A}^{B}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}=(3)\sum_{A}^{B}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}.\tag{55.6}$$

A tetszőleges A állapotból a tetszőleges B állapotba reverzíbilis úton azonban nemcsak az **55.2. ábrán** látható (1)-es és (3)-as úton, hanem végtelen sokféleképpen, más szóval végtelen sok görbe mentén eljuthat a rendszer. *A* $\sum_{A}^{B}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}$ *összeg azonban valamennyi reverzíbilis úton ugyanakkora*, vagyis független attól, hogy a rendszer milyen reverzíbilis folyamattal jutott az A állapotból a B állapotba.

2. Az entrópia fogalma

A $\sum_{A}^{B}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}$ összegnek az úttól való függetlensége lehetőséget ad egy új S állapotfüggvény bevezetésére. Rögzítsük az A kezdőállapotot, a B végállapot legyen tetszőleges. Ha az A állapotban önkényesen előírjuk az S állapotfüggvény S_A értékét, akkor az S állapotfüggvény értéke a B állapotban:

$$\boxed{S_B=S_A+\sum_{A}^{B}\frac{\Delta Q_{rev}}{T}},\tag{55.7}$$

ahol az összegezést A-ból B-be bármelyik reverzíbilis úton végezhetjük. Mivel A rögzítése után az (55.7) összeg csak a B végállapottól függ, ezért *S valóban állapotfüggvény, neve **entrópia*** (CLAUSIUS, 1865). Az entrópia skalár; – extenzív fizikai mennyiség; – SI-egysége a joule per kelvin, jele: J/K.

Az entrópiát az (55.7) alatti definíciója az A kezdőállapothoz tartozó S_A additív konstans erejéig határozza meg. Ez azonban nem jelent nehézséget, mert a termodinamikai folyamatok leírásakor csak az entrópiaváltozások játszanak szerepet. Így pl. az A → B ***reverzíbilis nyílt folyamat*** során az (55.7) szerint a rendszer ***entrópiaváltozása:***

$$\boxed{\Delta S = S_B - S_A = \sum_A^B \frac{\Delta Q_{rev}}{T}}\,. \tag{55.8}$$

Ez a reverzíbilis nyílt folyamatokra vonatkozó összefüggés azt fejezi ki, hogy ha a rendszer hőt vesz fel környezetéből $\left(\sum_A^B \frac{\Delta Q_{rev}}{T} > 0\right)$, akkor entrópiája növekszik ($\Delta S = S_B - S_A > 0$). Ha viszont a rendszer hőt ad le környezetének $\left(\sum_A^B \frac{\Delta Q_{rev}}{T} < 0\right)$, akkor entrópiája csökken ($\Delta S = S_B - S_A < 0$). Hőtanilag zárt rendszer $\left(\sum_A^B \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = 0\right)$ esetén az entrópia nem változik ($\Delta S = S_B - S_A = 0$).

Amennyiben a folyamat *reverzíbilis körfolyamat,* akkor az A kezdő- és a B végállapothoz ugyanaz az entrópia tartozik ($S_A = S_B$), az entrópiaváltozás zérus ($\Delta S_{\text{körf}} = 0$), s így az (55.8) alapján

$$\boxed{\Delta S_{\text{körf}} = \sum_{\text{körf}} \frac{\Delta Q_{rev}}{T} = 0}\,, \tag{55.9}$$

vagyis ***reverzíbilis körfolyamatban az entrópia nem változik, állandó marad.*** Így érthető, hogy a négylépéses reverzíbilis Carnot-féle körfolyamatban

$$\Delta S_{\text{körf}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \tag{55.10}$$

56. § Az irreverzíbilis folyamatok és a termodinamika második főtétele

1. Az irreverzíbilis folyamatok fogalma

Számos olyan folyamatot ismerünk, amelyek önként fordított irányban nem játszódnak le. Így a talajra ejtett test (pl. kődarab) a talajjal rugalmatlanul ütközik, aminek következtében növekszik a test és a talaj belső energiája. Ennek ellenkezője azonban nem megy végbe:

a test és a talaj belső energiájának rovására a test nem emelkedik fel. A környezeténél magasabb hőmérsékletű test mindig lehűl, sohasem melegszik fel. A magunkhoz szorított jégcsap nem melegít bennünket, bár hőátadás esetén az energia megmaradna. Ezekben a példákban és a természet sok más, elsősorban a súrlódással kapcsolatos jelenségében az a közös, hogy a folyamatok *megfordíthatatlanok (irreverzíbilisek)*. Jellemzőjük, hogy *a)* a direkt (egyenes) folyamatok spontán, külső beavatkozás nélkül mennek végbe; *b)* a direkt folyamat kezdetén az intenzív paraméterek (pl. nyomás, hőmérséklet) a rendszer különböző pontjaiban különböző értékűek; *c)* a direkt folyamatok az intenzív paraméterek kiegyenlítődésének irányában, az egyensúlyi állapot felé mennek végbe; *d)* a folyamatok külső hatás nélkül, önként indirekt (fordított) irányban nem játszódnak le; *e)* ha a rendszer külső hatásra tér vissza eredeti (kiinduló) állapotába, akkor a rendszerben és a rendszer környezetében maradandó változás jön létre.

A legváltozatosabb módon végbemenő természeti folyamatok időbeli lefolyásának irányáról sem a mechanika, sem az elektromágnességtan törvényei, sem pedig a termodinamika első főtétele nem adnak felvilágosítást. Ez utóbbi ugyanis bármilyen irányú energiaátalakulást megenged, csak a $\Delta U = Q + W$ feltételnek kell eleget tenni. A természeti folyamatok irányát tehát az első főtételtől független törvény, a termodinamika második főtétele szabja meg.

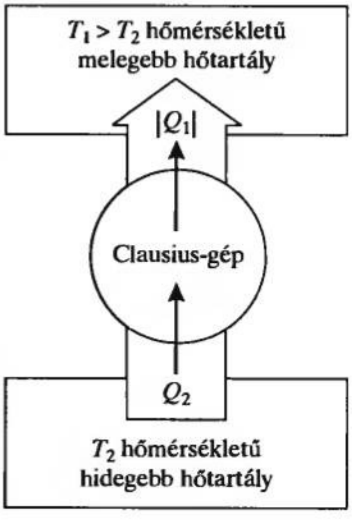
2. A termodinamika második főtétele

CARNOT vizsgálatai nyomán CLAUSIUS, KELVIN, a német Max PLANCK [plank] (1858–1947; Nobel-díj 1918-ban) és a szintén német Wilhelm OSTWALD [osztváld] (1853–1932; Nobel-díj 1909-ben) ismerték fel a természeti folyamatok irreverzíbilitásának törvényét, a termodinamika második főtételét. A második főtétel egyetlen, más természeti törvényre vissza nem vezethető, tapasztalatokon alapuló axióma (sarkigazság).

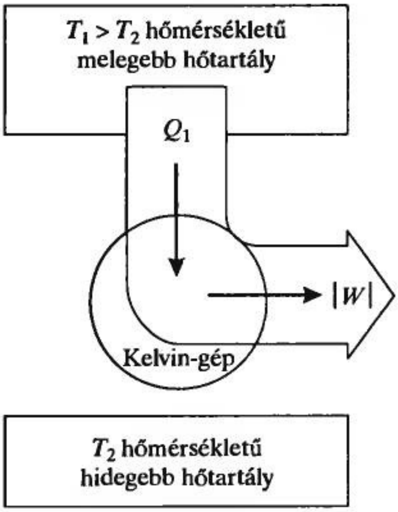
A termodinamika második főtételét többféle, de egymással egyenértékű (ekvivalens) módon is megfogalmazták.

a) A második főtétel Clausius-féle megfogalmazása

A természetben nincs és egyetlen géppel – ún. Clausius-géppel – sem hozható létre olyan folyamat, amelyben hő önként, külső munkavégzés nélkül hidegebb testről melegebbre menne át (1850). Az ideális hűtőgépnek tekinthető Clausius-gép – létezése esetén – a $T_2 < T_1$ hőmérsékletű hidegebb hőtartályból elvont Q_2 hőt teljes egészében átadná a $T_1 > T_2$ hőmérsékletű melegebb hőtartálynak: $|Q_1| = Q_2$ **(56.1. ábra).**



56.1. ábra



56.2. ábra

b) A második főtétel Kelvin (W. Thomson)–Planck-féle megfogalmazása

A természetben nincs és egyetlen géppel – ún. Kelvin-géppel – sem hozható létre olyan folyamat, amelynek során egy test hőt veszít és ez a hő egyéb változások nélkül teljes egészében, 100%-os hatásfokkal munkává alakulna át (1851, 1903). Az ideális hőerőgépnek tekinthető Kelvin-gép – létezése esetén – a $T_1 > T_2$ hőmérsékletű melegebb hőtartályból felvett Q_1 hőt munkává alakítaná át: $|W| = Q_1$ **(56.2. ábra)**.

Az energiamegmaradás elvét, ill. az első főtételt nem sértő Kelvin-gép rendkívül hasznos lenne, mert a légkörből és az óceánból gyakorlatilag kimeríthetetlen mennyiségben tudna hőt felvenni, és azt munkává átalakítani. Ezért nevezte OSTWALD a Kelvin-gépet ***másodfajú perpetuum mobilé***nek (örökmozgónak), amely a tapasztalat szerint ***nem létezik***. Így pl. nem készíthető olyan óceánt átszelő hajó, amely képes lenne az óceán vizéből kivonni a hajógépek működtetéséhez szükséges energiát, s teljes egészében munkává átalakítani anélkül, hogy a rendszerben vagy annak környezetében más változás is bekövetkezne.

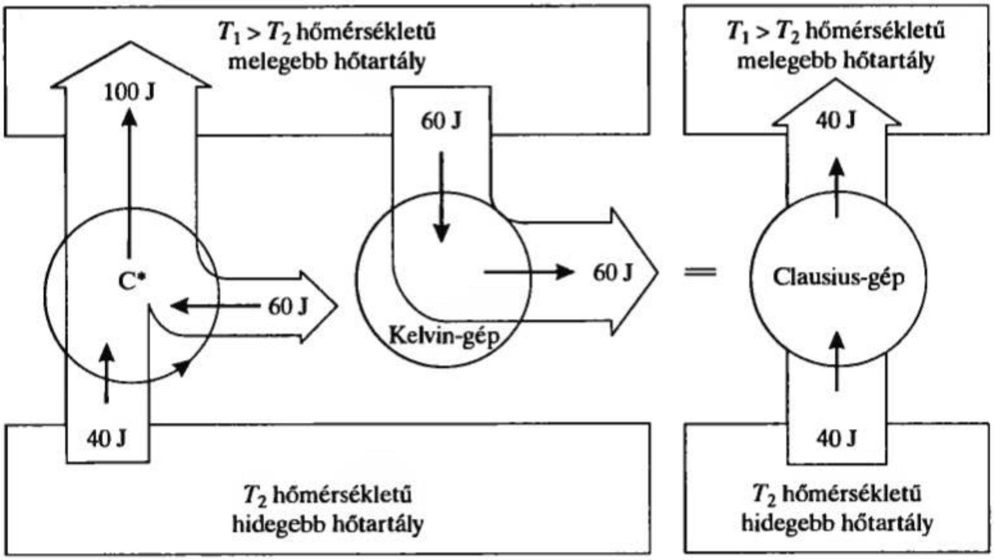
A második főtétel Kelvin–Planck-féle megfogalmazása elvileg megengedi a $T_2 = 0$ K létezését, csak a $T_1 > 0$ és a $T_2 = 0$ hőmérsékletű tartályok között dolgozó reverzíbilis Carnot-gép létezését tiltja, mert az ilyen gép Kelvin-gép lenne, a $T_1 > 0$ hőmérsékletű hőtartályból felvett hőt teljes egészében munkává alakítaná át.

3. A második főtétel különböző megfogalmazásainak egyenértékűsége

A második főtétel különböző megfogalmazásai egyenértékűek. Bármely hipotetikus (feltételezett) gép, amely megsérti az egyik megállapítást, megsérti a másikat is.

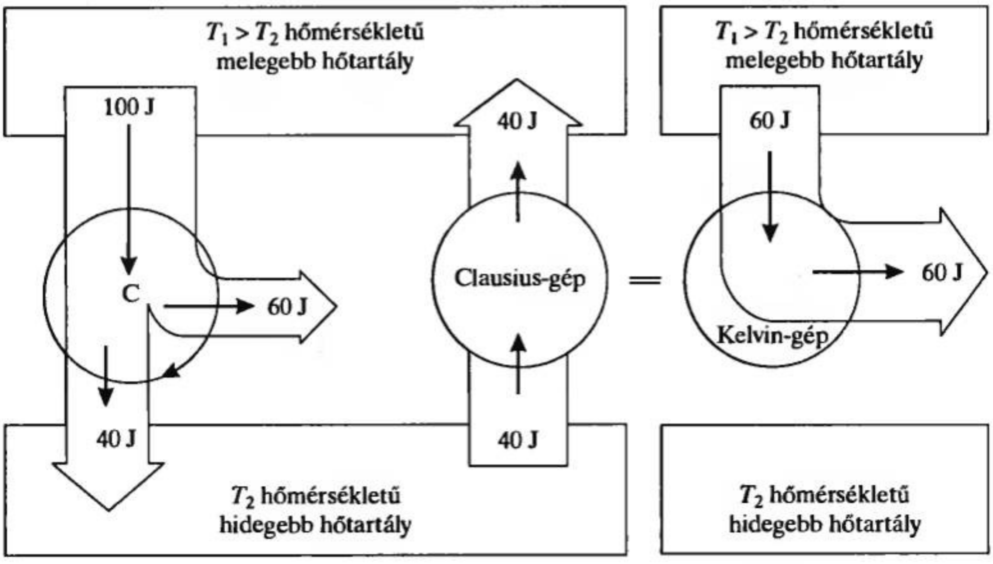
a) A Clausius-gép egy fordított (indirekt) irányban dolgozó C* reverzíbilis Carnot-gép és egy Kelvin-gép összekapcsolásának tekinthető **(56.3. ábra)**. Egy ilyen összetett gép reverzíbilis indirekt Carnot-gépe vegyen fel pl. $Q_2 = 40$ J hőt a T_2 hőmérsékletű hidegebb hőtartályból és $W = 60$ J külső munkával $|Q_1| = Q_2 + W = 100$ J hőt juttasson a $T_1 > T_2$ hőmérsékletű melegebb hőtartályba. Ha ebből a melegebb hőtartályból a Kelvin-gép $|Q_1| - Q_2 = 60$ J hőt venne fel, akkor létezése esetén minden egyéb változás nélkül, teljes egészében $|W| = 60$ J munkát tudna végezni.

A reverzíbilis indirekt Carnot-gép és a Kelvin-gép valóban Clausius-gép lenne, mert együttes hatásukra az összes külső munka zérus, a hidegebb hőtartály 40 J hőt veszítene, a melegebb hőtartály pedig 40 J hőt kapna, vagyis hő önként menne át a hidegebb hőtartályból a melegebb hőtartályba. *Mivel Kelvin-gép nincs, ezért Clausius-gép sem létezik.*



56.3. ábra

b) A fentihez hasonlóan belátható, hogy a C reverzíbilis direkt Carnot-gép és a vele együtt dolgozó Clausius-gép Kelvin-gép lenne (**56.4. ábra**). Nyilvánvaló, *ha nincs Clausius-gép, akkor Kelvin-gép sem létezik.*



56.4. ábra

57. § Az irreverzíbilis folyamatok és az entrópia

1. Az irreverzíbilis Carnot-féle körfolyamat hatásfoka

A tapasztalat szerint a valóságos folyamatokban bizonyos mennyiségű munka mindig kárbavész. Ennek következtében az irreverzíbilis Carnot-féle körfolyamat hatásfoka:

$$\eta_{irrev} = \frac{-W_{irrev}}{Q_{1,irrev}} = \frac{Q_{1,irrev} + Q_{2,irrev}}{Q_{1,irrev}} < \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_{rev}. \qquad (57.1\text{–}5)$$

Az irreverzíbilis Carnot-féle körfolyamat hatásfoka tehát a reverzíbilis Carnot-féle körfolyamat hatásfokánál mindig kisebb:

$$\boxed{\eta_{irrev} < \eta_{rev}}. \qquad (57.6)$$

2. Az irreverzíbilis Carnot-féle körfolyamat redukált hőinek összege

Az (57.2,4)-ből adódik, hogy

$$\frac{Q_{1,irrev}}{T_1} + \frac{Q_{2,irrev}}{T_2} < 0, \qquad (57.7)$$

vagyis *az irreverzíbilis Carnot-féle körfolyamatban a redukált hők összege negatív,* mert $Q_{2,irrev} < 0$ és $\left|Q_{2,irrev} / T_2\right| > Q_{1,irrev} / T_1$.

3. A Clausius-féle egyenlőtlenség

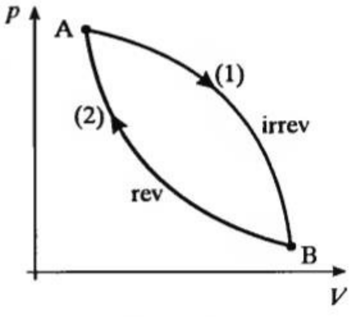
Az irreverzíbilis Carnot-féle körfolyamat (57.7) redukált hőinek összegére kapott egyenlőtlenség általánosítható tetszőleges irreverzíbilis körfolyamatra is. A reverzíbilis körfolyamatnál követett gondolatmenet szerint bármely irreverzíbilis körfolyamatban

$$\boxed{\sum_{\text{körf}} \frac{\Delta Q_{irrev}}{T} < 0}, \qquad (57.8)$$

vagyis *tetszőleges irreverzíbilis körfolyamatban a* $\Delta Q_{irrev}/T$ *elemi redukált hők összege negatív* ***(Clausius-féle egyenlőtlenség)***.

4. Irreverzíbilis nyílt folyamatok entrópiaváltozása

Az irreverzíbilis nyílt folyamat ***entrópiaváltozásának*** kiszámítása végett tekintsünk egy olyan termodinamikai rendszert, amely az A kezdőállapotból a B végállapotba az (1) irreverzíbilis úton jut el (**57.1. ábra**). Ezt követően a rendszer gondolatban jusson vissza a (2) úton reverzíbilisen. Ekkor a teljes körfolyamat is irreverzíbilis, mert az (1) szakasza is az. Ezért az (57.8) alapján



57.1. ábra

$$\sum_{\text{körf}} \frac{\Delta Q_{\text{irrev}}}{T} = \sum_{\text{A}}^{\text{B}} \frac{\Delta Q_{\text{irrev}}}{T} + \sum_{\text{B}}^{\text{A}} \frac{\Delta Q_{\text{rev}}}{T} < 0. \qquad (57.9)$$

Mivel az (55.8) entrópiaváltozás szerint $\sum_{\text{B}}^{\text{A}} \frac{\Delta Q_{\text{rev}}}{T} = S_{\text{A}} - S_{\text{B}}$, ezért az (57.9)-ből az irreverzíbilis nyílt folyamat entrópiaváltozása:

$$\boxed{\Delta S = S_{\text{B}} - S_{\text{A}} > \sum_{\text{A}}^{\text{B}} \frac{\Delta Q_{\text{irrev}}}{T}}, \qquad (57.10)$$

vagyis irreverzíbilis nyílt folyamatban az $S_{\text{B}} - S_{\text{A}} = \Delta S$ entrópiaváltozás mindig nagyobb, mint a $\Delta Q_{\text{irrev}}/T$ elemi redukált hők összege.

5. Hőtanilag zárt rendszer entrópiaváltozása; az entrópiatétel

Hőtanilag zárt rendszer a környezetével hőt nem cserél. Ennélfogva a rendszer (57.10) szerinti $\Delta S = S_{\text{B}} - S_{\text{A}} > 0$ entrópianövekedése csak a rendszeren belül lejátszódó irreverzíbilis folyamatokkal lehet kapcsolatos:

$$\boxed{\Delta S_{\text{belső}} > 0}. \qquad (57.11)$$

Ez a belső entrópia növekedésének tétele, az ún. ***entrópiatétel***. Más megfogalmazásban: hőtanilag zárt rendszerben önként (spontán) csak olyan irreverzíbilis folyamatok játszódhatnak le, amelyek során a belső entrópia növekszik, és ez a belsőentrópia-növekedés az irreverzíbilitás mértéke.

6. Külsőentrópia- és belsőentrópia-változás

Az eddigiek alapján egy tetszőleges termodinamikai rendszer entrópiaváltozásának egyik része a környezettel való hőkicserélődés következménye, tehát *külső forrásból* ered, és értéke:

$$\Delta S_k = \sum_A^B \frac{\Delta Q}{T}. \tag{57.12}$$

Itt T azt a hőmérsékletet jelenti, amelyen a rendszer a hőt felveszi vagy leadja. Hőfelvétel esetén (melegítéskor) a rendszer ***külső entrópiája*** növekszik ($\Delta S_k > 0$), hőleadáskor (hűtéskor) csökken ($\Delta S_k < 0$), hőcsere nélküli folyamatokban pedig a külső entrópia nem változik ($\Delta S_k = 0$).

Az entrópiaváltozás másik része a rendszerben lejátszódó folyamatok következménye, vagyis ΔS_b ***belsőentrópia-változás***. A belső entrópia hőtanilag zárt rendszer esetén, irreverzíbilis folyamatban – az entrópiatétel szerint – mindig növekszik ($\Delta S_b > 0$), reverzíbilis folyamatban pedig állandó marad ($\Delta S_b = 0$). Környezetével kölcsönhatásban levő nyílt rendszer belső entrópiája általában növekszik ($\Delta S_b > 0$), de csökkenhet is ($\Delta S_b < 0$), mint pl. a biológiai evolúció során (60. § 4.).

A ΔS_k külsőentrópia- és a ΔS_b belsőentrópia-változások bevezetésével a rendszer entrópiaváltozása:

$$\Delta S = \Delta S_k + \Delta S_b = \sum_A^B \frac{\Delta Q}{T} + \Delta S_b. \tag{57.13}$$

A termodinamikai rendszer belső entrópiájának időbeli változási gyorsaságát, a

$$\sigma = \frac{\Delta S_b}{\Delta t} \tag{57.14}$$

hányadost ***entrópiaprodukciónak*** (entrópiatermelésnek) nevezzük, és megmutatja az egységnyi idő alatt bekövetkező belsőentrópia-változást. SI-egysége a joule per kelvin·másodperc, jele: J/(K · s). Pl. a fizikai munkát nem végző felnőtt ember entrópiája másodpercenként 0,27–1,4 J/K-nel növekszik, vagyis entrópiaprodukciója 0,27–1,4 J/(K · s) (60. § 2.).

7. A termodinamika második főtételének matematikai alakja

a) A reverzíbilis ***nyílt folyamatokra*** vonatkozó (55.8) egyenlőséget és az irreverzíbilis nyílt folyamatokra vonatkozó (57.10) egyenlőtlenséget egyesítve jutunk a *termodinamika második főtételének* nyílt folyamatokra érvényes matematikai alakjához:

$$\boxed{\Delta S \geq \sum_A^B \frac{\Delta Q}{T}}, \tag{57.15}$$

ahol az egyenlőtlenség jele irreverzíbilis, az egyenlőség jele pedig reverzíbilis folyamatra utal.

b) Ha a folyamat ***körfolyamat***, akkor az A kezdő- és a B végállapothoz ugyanaz az entrópia tartozik ($S_A = S_B$), az entrópiaváltozás zérus ($\Delta S_{\text{körf}} = 0$), s így az (55.9) és az (57.8) alapján azonnal adódik, hogy

$$\boxed{\sum_{\text{körf}} \frac{\Delta Q}{T} \leq 0} . \qquad (57.16)$$

c) ***Hőtanilag zárt rendszer*** esetén a rendszer és a környezete között nincs hőcsere: $\sum_{A}^{B} \frac{\Delta Q}{T} = 0$. Ekkor az (57.15) alapján

$$\boxed{\Delta S \geq 0} . \qquad (57.17)$$

Ez azt jelenti, hogy a *hőtanilag zárt, nemegyensúlyi rendszerekben csak olyan folyamatok mehetnek végbe, amelyekben a rendszer entrópiája növekszik* ($\Delta S > 0$) *vagy állandó marad* ($\Delta S = 0$). Ennek a két lehetőségnek megfelelően is szokás a makroszkopikus rendszerekben lejátszódó folyamatokat irreverzíbilis és reverzíbilis folyamatokra felosztani. *Irreverzíbilisnek* nevezzük a teljes zárt rendszer entrópiájának növekedésével járó folyamatokat. Ezek önként fordított irányban nem mehetnek végbe, mert ez az entrópia csökkenésével járna. Azokat a folyamatokat viszont, amelyeknek során a teljes zárt rendszer entrópiája állandó marad, és ellentétes irányban is végbemehetnek, *reverzíbilis* folyamatoknak nevezzük.[26] Szigorú értelemben vett reverzíbilis folyamatok nincsenek, egyes természeti folyamatok azonban közelítőleg reverzíbilisek.

Összefoglalva megállapítható, hogy ha a hőtanilag zárt rendszer nincs egyensúlyi állapotban, akkor a rendszerben csak entrópianövekedéssel járó folyamatok mehetnek végbe. Ez az ***entrópia növekedésének zárt rendszerben érvényes törvénye***, másképpen a ***termodinamika második főtétele*** (CLAUSIUS, 1865; BOLTZMANN, 1870). Ha a rendszer entrópiája eléri legnagyobb értékét, akkor beáll az egyensúlyi állapot.

58. § Termikusenergia-átalakítók

A termikusenergia-átalakítók hőerőgépek vagy hűtőgépek.

1. A hőerőgépek

A hőerőgépek termikus energiát alakítanak át mechanikai energiává, és felépítésük szerint lehetnek *gőzgépek* (dugattyús gőzgépek, gőzturbinák) vagy *gázgépek* (gázturbinák, belső égésű motorok: benzin- és dízelmotorok). Bennük az irreverzíbilis direkt Carnot-féle cik-

[26] A teljes zárt rendszer entrópiájának állandósága mellett a rendszer különálló részeinek entrópiája azonban nem marad állandó.

lushoz hasonló körfolyamatok játszódnak le. Hatásfokuk – a soha ki nem küszöbölhető súrlódás miatt – a reverzíbilis Carnot-féle körfolyamat hatásfokától messze elmarad.

A hőerőgépet, a T_1 hőmérsékletű hőtartályt és a $T_2 < T_1$ hőmérsékletű hőtartályt (hőgyűjtőt) termodinamikailag zárt rendszernek tekinthetjük. A gép működésekor *a)* a hőforrás $|Q_1|$ hőt ad le a hőerőgépnek, és entrópiája $\Delta S_1 = -|Q_1|/T_1$-gyel csökken; *b)* a hőgyűjtő $|Q_2|$ hőt vesz fel és entrópiája $\Delta S_2 = |Q_2|/T_2$-vel növekszik; *c)* a hőerőgép a körfolyamat végén visszakerül eredeti állapotába. Ennek a visszatérésnek viszont az a feltétele, hogy a gép entrópiája a körfolyamatban ne változzon, vagyis $\Delta S_{gép} = 0$ legyen. A gép a $|Q_1|$ hőfelvétellel együtt járó entrópiától $|Q_2|$ hőleadással szabadul meg. A fennmaradó $|Q_1| - |Q_2|$ hő $|W|$ hasznos munkára fordítódik.

A részfolyamatok figyelembevételével a teljes zárt rendszer (gép + környezet) entrópiaváltozása körfolyamatban:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_{gép} + \Delta S_2 = -\frac{|Q_1|}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} = 0, \tag{58.1}$$

ha

$$|Q_2| = |Q_1|\frac{T_2}{T_1}. \tag{58.2}$$

Az (58.2)-ből következik, hogy $T_2 > 0$ folytán $|Q_2| > 0$, ezért a hőerőgépek működéséhez nemcsak kazán, hanem hűtő (hűtőtorony, hűtőtó, bővizű folyó vagy levegőközeg) is szükséges.

a) A ***gőzgépek*** a vízgőz energiáját hasznosító erőgépek, és más gépeket hajtanak, berendezéseket működtetnek.[27] Valamennyi gőzgépnek három fő része van: *a)* a gőz fejlesztésére szolgáló, szén-, kőolaj- vagy földgáztüzelésű *kazán*, atomerőművekben *atomreaktor*; *b)* a gőz energiáját mechanikai munkává átalakító *hajtómű* (a tulajdonképpeni gőzgép) és *c)* a fáradt (munkát végzett) gőz lecsapódását végző *kondenzátor*. (Ez utóbbi esetleg hiányzik.) Működésük során a kazánban vagy az atomreaktorban keletkező vízgőz – belső energiájának rovására – adiabatikusan kitágul, térfogatának növekedése folytán a ***dugattyús gőzgép*** hengerében levő dugattyút maga előtt tolja, s mechanikai munkát végez [James WATT (1736–1819) angol mechanikus és feltaláló, 1769], vagy ***gőzturbina*** esetében a gőz járókereket forgat. A gőzturbinák fő alkalmazási területe a hőerőművek és az atomerőművek elektromos generátorainak hajtása (106. § 2., 156. §).

A 8–14%-os hatásfokú dugattyús gőzgépek a 18. században döntően előmozdították az ipari forradalom kibontakozását, és jelentős hatásuk volt a társadalmi viszonyok fejlődésére is. Jelentőségüket napjainkban már elvesztették. Szerepüket a 30–39%-os hatásfokú gőzturbinák, a 21–25%-os hatásfokkal dolgozó gázturbinák, a 10–17%-os hatásfokú benzinmotorok, a 25–38%-os hatásfokú dízelmotorok és az elektromos motorok vették át.

[27] *Erőgépeknek* nevezzük azokat a gépeket, amelyek valamilyen energiát más, meghatározott célra alkalmas energiává alakítanak át.

b) A *gázgépek* közé tartoznak a gázturbinák és a belső égésű motorok.

A *gázturbina* működésekor többnyire környezeti levegőt szív be és sűríti. Az összenyomott levegőben tüzelőanyagot (földgázt, kohógázt, gázolajfrakciót, repülőgép gázturbináiban kerozin nevű petróleumfrakciót, rakétamotorokban petróleumot, oxigént, alkoholt vagy kén, faszén és salétrom keveréket) égetnek el. Az égéskor keletkező nagy nyomású és magas hőmérsékletű füstgáz turbinát forgat. Gázturbinákat alkalmaznak egyes szivattyúk, repülőgépek, rakétamotorok és gázturbinás erőművek elektromos generátorainak hajtóműveként.

A *belső égésű motorok* (benzinmotor, dízelmotor) dugattyús hőerőgépek. Munkaterükben (hengerükben) folyékony vagy gáznemű tüzelőanyagok égnek el. A keletkező, majd adiabatikusan kitáguló gázok mozgatják a dugattyút. Ilyen motorokat alkalmaznak személy- és tehergépkocsik, autóbuszok, motorkerékpárok, hajók és egyes vasúti mozdonyok hajtására.

2. A hűtőgépek és a hőszivattyúk

A hűtőgépekben és a hőszivattyúkban az indirekt Carnot-ciklushoz hasonló irreverzíbilis körfolyamatok mennek végbe.

A ***hűtőgépek*** **(54.3. ábra)** Q_2 hőt vonnak el a T_2 hőmérsékletű belső terükből és külső (általában elektromos) munkával $|Q_1| = Q_2 + W$ hőt juttatnak a $T_1 > T_2$ magasabb hőmérsékletű környezetbe. A hőátadás hatékonyságát a hűtőgép belsejéből elvont $Q_2 > 0$ hő és a felhasznált $W = |Q_1| - Q_2$ munka hányadosa, vagyis az

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \tag{58.3}$$

termodinamikai jósági tényező jellemzi. Értéke háztartási hűtőgépeknél 7 alatt van, légkondicionálóknál pedig mindössze 1,8 körüli.

A ***hőszivattyúk*** a hűtőgépek működési elvén alapuló fűtőgépek. Télen úgy fűtik az épületet, hogy W külső munkával Q_2 hőt vonnak el a T_2 hőmérsékletű hidegebb hőtartályból (talajból, tavakból, folyókból) és $|Q_1| = Q_2 + W$ hőt szállítanak a $T_1 > T_2$ hőmérsékletű épületbe.

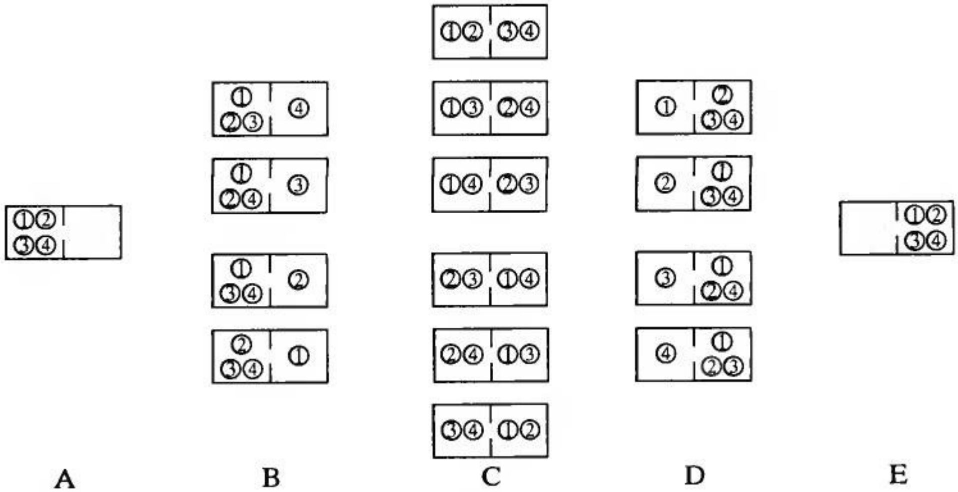
A gyakorlatban használt hőszivattyúkkal a befektetett W munkának kb. háromszorosát kapjuk $|Q_1|$ hő formájában. Hátrányuk, hogy a hagyományos fűtőberendezésekhez képest beruházási költségük nagyobb. Egyes hőszivattyúk képesek megfordítani a hőáramlás irányát is, így ezek nyáron légkondicionálóként működnek.

59. § Az entrópia statisztikus értelmezése

A nagyszámú részecskéből álló makroszkopikus anyagok fizikai tulajdonságainak leírására a klasszikus mechanika törvényei alkalmatlanok. Ezt ismerte fel a 19. század végén és a 20. század elején többek között CLAUSIUS, MAXWELL, BOLTZMANN és GIBBS. Munkásságuk nyomán került kiépítésre a hőjelenségekre vonatkozó ***statisztikus termodinamika***, amely statisztikus módszerek és valószínűségszámítási törvények felhasználásával képes leírni az igen sok részecskéből (atomokból, molekulákból, ionokból, elektronokból) álló makroszkopikus anyagok termodinamikai viselkedését és fizikai jellemzőit. Ebben a §-ban a statisztikus termodinamika legfontosabb megállapításaival foglalkozunk.

1. Makro- és mikroállapot; termodinamikai valószínűség

Példaként számítsuk ki, hogy $N = 4$, egymástól elvileg megkülönböztethető, szabadon mozgó részecske (atom, molekula, ion, elektron) hányféleképpen oszolhat el egy edény $g = 2$ egyenlő térfogatú részében, az ún. cellákban! Evégből a négyzetekkel szemléltetett cellákban a részecskéket számozzuk meg, majd számoljuk össze a lehetséges eloszlások számát (**59.1. ábra**).



59.1. ábra

Az **59.1. ábrából** kiolvasható, hogy makroszkopikus szempontból $N = 4$ és $g = 2$ esetén összesen 5 makroeloszlás, ún. ***makroállapot (konfiguráció)*** különböztethető meg. Ezek közül az A(4,0) és az E(0,4) makroállapotot csak 1–1, a B(3,1) és a D(1,3) makroállapotot 4–4, a C(2,2) makroállapotot pedig 6 részletezett eloszlás, ún. ***mikroállapot*** valósít meg, így a lehetséges összes mikroállapotok száma: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

A példa nyomán belátható, hogy a részecskék és a cellák számának növelésével növekszik a lehetséges eloszlások, a mikroállapotok száma. Ha N számú részecske g számú cellában helyezkedik el, akkor az összes lehetséges mikroállapotok száma: g^N.

Egy adott makroállapothoz tartozó mikroállapotok számát ***termodinamikai valószínűségnek (statisztikus súlynak)*** nevezzük, jele: Y. A tárgyalt példában az A és az E makroállapot termodinamikai valószínűsége 1, a B és D makroállapothoz tartozó termodinamikai valószínűség 4, a C makroállapot termodinamikai valószínűsége pedig 6.

2. Az egyensúlyi állapot

A tárgyalt példa általánosításaként megállapítható, hogy a sok részecskéből álló rendszerekben az egyenletes részecskeeloszláshoz (a legrendezetlenebb állapothoz) tartozik a legtöbb mikroállapot. Ezt a legtöbb mikroállapotú (legrendezetlenebb állapotú) makroállapotot ***egyensúlyi állapotnak*** nevezzük.

A nemegyensúlyi állapotú, magára hagyott anyaghalmazban spontán csak olyan folyamat mehet végbe, amelynek során növekszik a mikroállapotok száma (a rendezetlenség), vagyis a folyamat – összhangban a második főtétellel – az egyensúlyi állapot felé irányul.

3. Az entrópia és a termodinamikai valószínűség kapcsolata; a Boltzmann-egyenlet

PLANCK ismerte fel, hogy egy rendszer S entrópiája egyenesen arányos az Y termodinamikai valószínűség tízes alapú logaritmusával:

$$\boxed{S = 2{,}303k \lg Y}\,, \tag{59.1}$$

ahol k a Boltzmann-állandó. Ezt a termodinamika és a statisztikus fizika közötti függvénykapcsolatot BOLTZMANN tiszteletére *Boltzmann-egyenletnek* nevezik (1900).[28]

A Boltzmann-egyenletből kiolvasható, hogy az entrópia a rendszer (anyaghalmaz) rendezetlenségének a mértéke. Ugyanis minél rendezetlenebb egy rendszer szerkezete, annál nagyobb a mikroállapotok száma és a rendszer entrópiája. A teljesen rendezetlen állapothoz (az egyensúlyi állapothoz) maximális számú mikroállapot, illetve legnagyobb entrópia tartozik.

4. A termodinamika második főtételének statisztikus jellege

A fenomenologikus termodinamika második főtétele szerint zárt rendszerben az entrópia csak nőhet, egyensúlyi állapotban pedig maximális értéket vesz fel. Az (59.1) Boltzmann-egyenlet szerint viszont nem abszolút biztos, csak igen valószínű, hogy a zárt rendszerek entrópiája nő. A zárt rendszerek entrópiája csökkenhet is, bár ez sokkal kevésbé valószínű, mint a növekedés. *A termodinamika második főtétele tehát nem szigorúan érvényes természeti törvény, hanem statisztikus jellegű*, az egyensúlyi eloszlástól kismértékű eltérések (ingadozások, fluktuációk) is előfordulhatnak. Nagyszámú részecskéből álló termodinamikai rendszerben azonban – a kísérleti hibahatáron belül – nem észlelünk a második főtételtől eltérést.

Számos ingadozási jelenség ismert. Ilyen pl. a ***Brown-mozgás*** (44. §), az elektronikai áramköri elemekben (tranzisztorokban, elektroncsövekben) az elektronok számának statisztikus ingadozása, az ún. ***sörétzaj***, amely erősítéskor pl. a rádióban sustorgó, sörétek kopo-

---

[28] Levezetését lásd pl. Litz J.: Hőtan (Általános fizika I. 2.) 32. § 1. Dialóg Campus Kiadó, Pécs–Budapest, 2001.

gásához hasonló hangot ad. Fontosak továbbá az anyagi rendszerek ***energia-, hőmérséklet- és sűrűségingadozásai.*** Pl. a légkör sűrűségingadozása miatt a napfény – frekvenciájának negyedik hatványával arányos mértékben – szóródik, és a nagyobb frekvenciájú kék komponensének erősebb szóródása miatt kék az égbolt. A kisebb frekvenciájú vörös fény kevésbé szóródik, ezért sárgásvörös a közvetlen napfény. Naplementekor pedig a hosszú légrétegen áthaladó napsugár kék komponensének teljes kiszóródása miatt már vörös napkorongot látunk. Ugyancsak a fényszóródás az oka annak is, hogy tilalmi jelzésre vörös fényt használunk.

5. Az entrópia, a munka és a hő

A mechanikából ismert munkatétel szerint valamely testre ható külső erők eredőjének munkája egyenlő a test mozgási energiájának a megváltozásával. Munkavégzéskor tehát a testbe energia áramlik. Ezen az energián azonban a test részecskéi nem véletlenszerűen osztoznak, a mikroállapotok Y száma és a velük arányos S entrópia nem változik. *A munka tehát nem növeli a test entrópiáját.* Ezzel szemben hőközléskor *a test által felvett* és a részecskéire szétoszló *Q hő már növeli* a test mikroállapotainak számát és az *S entrópiát.*

6. A termodinamika harmadik főtétele

A tökéletesen rendezett állapot mikroállapotainak száma 1, s ezért az (59.1) szerint entrópiája zérus. Ezt fejezi ki a ***termodinamika harmadik főtétele***, amely $S = 0$-hoz $T = 0$ K hőmérsékletet rendel.

Nulla kelvinhez igen közeli hőmérsékleten a nem tökéletes hőszigetelés miatt bármilyen kicsiny ΔQ hő is jelentős felmelegedést okoz. Ezért a 0 K hőmérséklet csak megközelíthető, de nem érhető el. Más megfogalmazásban: ***nem lehet készíteni*** olyan periodikusan dolgozó gépet, ún. ***harmadfajú perpetuum mobilét***, amely elő tudna állítani 0 K hőmérsékletet.

Megjegyzés:

– Ha a Carnot-féle körfolyamat $T_2 = 0$ K hőmérsékletű hőtartállyal működne, akkor nem lenne hőleadás ($Q_2 = 0$), és a hőerőgép a felvett Q_1 hőt teljes egészében munkává alakítaná át, megsértve a második főtételt. Ez azt bizonyítja, hogy a harmadik főtétel összefüggő, logikai rendszert alkot a többi főtétellel.

60. § Entrópia és információ

1. Az entrópia és az információ kapcsolata

a) Az ***információ*** egy üzenet (közlés, esemény, dolog, adat, hírkészlet, híranyag, kombináció) a lehetséges üzenetek közül.

Az üzenet értékét a biztos információ elnyeréséhez szükséges döntések száma, az ún. ***információtartalom*** (információmennyiség) jellemzi, amelynek egysége a bit [bájt]. Meghatározása: 1 bit az információtartalom, ha egyetlen igen/nem döntés (felelet) elegendő az információ elnyeréséhez.

Ha $\lambda = 2$ egyforma valószínűségű adatból (pl. egy pénzdarab fej vagy írás oldala közül) az egyiket (pl. a fej oldalt) kell kiválasztani, akkor ez egyetlen igen/nem döntést igényel. A $\lambda = 2$ adathoz tehát $i = 1$ bit információtartalom tartozik.

Ha 4 egyforma valószínűségű, de különböző heterogyűrűs molekulából, pl. adeninből (A), timinből (T), citozinból (C) és guaninból (G), ún. bázisokból csak egyet kell kiválasztani (pl. A-t), akkor első lépésként a 4 bázist felosztjuk két kettős csoportra (pl. A–T-csoportra és C–G-csoportra), majd igen/nem döntéssel kiválasztjuk azt a csoportot, amelyik a keresett bázist (A-t) tartalmazza. Ezt követően a kiválasztott csoportot (A–T-csoportot) felosztjuk két egyesre (A-ra és T-re), és ismételt igen/nem felelettel kiválasztjuk a keresett bázist (A-t). A 4 bázisból tehát 1 bázist két igen/nem döntéssel választhatunk ki, vagyis a $\lambda = 4$ egyforma valószínűségű bázis információtartalma $i = 2$ bit.

4 különféle bázisból 16 kombinációban (társításban) fordulhat elő *báziskettős* (AA, AT, AC, AG, TA, TT, TC, TG, CA, CT, CC, CG, GA, GT, GC, GG). Ezekből 4 bináris döntéssel választhatunk ki egyet, vagyis a $\lambda = 16$ kombináció információtartalma $i = 4$ bit.

Hasonlóan adódik, hogy 4 különféle bázisból 64-féleképpen képezhető *bázishármas* (AAA, AAT, AAC, AAG, ...). Ezekből a bázishármasokból 6 igen/nem döntéssel választhatunk ki egyet. A $\lambda = 64$ kombinációban előforduló bázishármasok információtartalma tehát $i = 6$ bit.

A tárgyalt példák alapján megállapítható, hogy a λ egyforma valószínűségű adat és i információtartalma között $\lambda = 2^i$ összefüggés áll fenn, vagyis a λ hírkészlet 2-nek i-edik hatványa. Logaritmikus alakban:

$$\lg \lambda = i \lg 2, \quad \text{ill.} \quad \boxed{i = \frac{\lg \lambda}{\lg 2}}\,. \tag{60.1,2}$$

Pl. a $\lambda = 20$ különféle aminosav információtartalma $i = \lg \lambda/(\lg 2) = \lg 20/(\lg 2) = 4{,}322$ bit.

b) Ha a λ hírkészlet (pl. a 64 kombinációban előforduló bázishármasok) ν-ször ismétlődnek (ν görög kisbetű, olvasd nű), akkor a rendszer információtartalma:

$$i = \nu \frac{\lg \lambda}{\lg 2}. \tag{60.3}$$

c) Egy termodinamikai rendszer (pl. bármely élőlény) szervezettségét (rendezettségét) az információtartalom és az entrópia jellemzi. A magas (ill. alacsony) szervezettségű rendszerek nagy (ill. kicsi) információtartalmúak, termodinamikai valószínűségükkel arányos entrópiájuk pedig alacsony (ill. magas). Ennek megfelelően az entrópiacsökkenéssel járó termodinamikai folyamatokban – pl. a biológiai evolúció során – az információtartalom növekszik, az entrópianövekedéssel járó folyamatokban pedig csökken az információtartalom.

A fentiekkel kapcsolatban hangsúlyozzuk, hogy információ csak irreverzíbilis nyitott rendszerekben keletkezhet, mert zárt rendszerekben az entrópia nem csökkenhet, stacionárius (állandósult) rendszerekhez pedig állandó entrópia tartozik.

2. Élőlények entrópiaprodukciója

Az élőlények (növények, állatok, emberek, vírusok, baktériumok) környezetükkel folytonos kapcsolatban álló nemegyensúlyi nyitott termodinamikai rendszerek. Bennük belsőentrópia-növekedéssel, ill. pozitív entrópiaprodukcióval járó irreverzíbilis termodinamikai folyamatok játszódnak le. Ahhoz, hogy szervezetük az entrópianövekedés ellenére se szóródjon szét, ne bomoljon el, hosszú távon entrópiájuk nem változhat. Ennek feltétele, hogy a ΔS_b belsőentrópia-növekedésüket $|\Delta Q_{le}|$ hőleadással kell kompenzálniuk:

$$\Delta S = \Delta S_b - \frac{|\Delta Q_{le}|}{T} = 0. \qquad (60.4)$$

Ebből az élőlény által T hőmérsékleten a környezetének leadott hő:

$$|\Delta Q_{le}| = T\Delta S_b. \qquad (60.5)$$

Pl. a $\sigma = \Delta S_b/\Delta t = 0{,}27 - 1{,}4\ \mathrm{J/(K\cdot s)}$ entrópiaprodukciójú alvó, ill. fizikai munkát nem végző felnőtt embernek $T \approx 300$ K hőmérsékleten $\Delta t = 1$ s-onként $|\Delta Q_{le}| = T\Delta S_b = T\sigma\Delta t = 80 - 420$ J hőt kell leadnia. A leadott hővel együtt eltávozik a termelt belső entrópia is. Az élőlények így tudják létüket állandó entrópiaszinten stabilizálni. Ha pedig képesek entrópiájukat csökkenteni is, akkor növekszik biológiai információtartalmuk.

A kifejlett élőlények közel állandó energiájú ($\Delta E \approx 0$) nyitott termodinamikai rendszerek. Ezt úgy érik el, hogy az általuk végzett $|W|$ munka és a leadott $|\Delta Q_{le}|$ hő összegével azonos mennyiségű napenergiát vesznek fel kovalens kötésekben tárolt, energiadús, egyensúlytól távol levő, kis entrópiájú kémiai vegyületek (tápanyagok) formájában. Mivel a leadott hő nullánál mindig nagyobb ($|\Delta Q_{le}| > 0$), ezért az élőlényeknek akkor is kell energiatartalmú tápanyagot magukhoz venni, amikor fizikai munkát nem végeznek.

3. Entrópiacsökkenés a Földön

A zöld növényi szervezetek – a $T_{\text{Nap}} \approx 6000$ K hőmérsékletű Nap felszínéről származó napfény energiájának felhasználásával – szén-dioxidból (CO_2) és vízből (H_2O) energiadús glükózt (szőlőcukor, $C_6H_{12}O_6$) és oxigént állítanak elő:

$$6\,CO_2 + 6\,H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 6\,O_2.$$

A növény zöld levelei azonban a rájuk eső fény energiájának kb. 30%-át képesek hasznosítani, a többi szétszóródik a $T_{\text{Föld}} \approx 300$ K hőmérsékletű Földön.

Ha első közelítésben a növényt, a növény földi környezetét és a Napot zárt rendszernek tekintjük, akkor ennek a zárt rendszernek – a termodinamika második főtétele szerint – az entrópiaváltozása:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{Nap}} + \Delta S_{\text{növény}} + \Delta S_{\text{Föld}} \geq 0, \qquad (60.6)$$

illetve

$$-\frac{Q}{T_{\text{Nap}}} + \Delta S_{\text{növény}} + \frac{0{,}7Q}{T_{\text{Föld}}} \geq 0. \qquad (60.7)$$

Ebből a növény entrópiaváltozása:

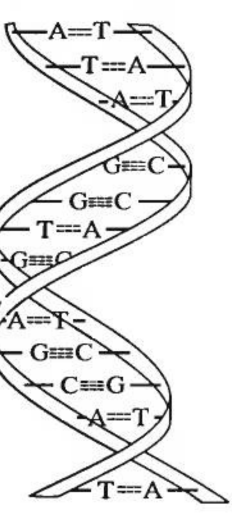
$$\Delta S_{\text{növény}} \geq -\frac{13}{6000\,\text{K}} Q. \qquad (60.8)$$

Mivel egy átlagos méretű levélre naponta $Q \approx 90$ J energia érkezik, ezért $\Delta S_{\text{levél}} \geq -0{,}2$ J/K, vagyis egy levél naponta 0,2 J/K-nel is csökkentheti a növény entrópiáját, miközben növekszik a világ entrópiája ($\Delta S > 0$).

A kapott eredmény általánosan is igaz: a 4,6 milliárd éves Föld közel 4 milliárd éves zöld növénytakaróján a Nap felszínéről (melegebb helyről) származó energia áramlik át, miközben hőleadással együtt csökken a Föld és az élőlények entrópiája. Ezzel párhuzamosan viszont növekszik az élőlények információtartalma. Ezt a folyamatot nevezik *biológiai evolúciónak* (fejlődésnek).

4. Információtárolás élő rendszerekben

Az élő szervezetek energiadús, alacsony entrópiatartalmú tápanyagokat vesznek fel környezetükből, saját anyagukká átalakítva növekszenek, munkát végeznek és reprodukálják önmagukat (szaporodnak). Ezeket a folyamatokat a sejtmagban található, molekuláris információkat hordozó DNS- (dezoxiribonukleinsav-) molekulák irányítják. Ez a felismerés és a teljes génállomány megfejtése mérföldkőnek bizonyult a biológia történetében.



60.1. ábra

James WATSON [vatszon] (1928-) amerikai és Francis CRICK [krik] (1916-) brit Nobel-díjas biofizikusok állapították meg (1953), hogy az örökítő anyag, a DNS-molekula szerkezete kettős csavarvonalhoz (megcsavart létrához) hasonlít: külső részén (a létra szárain) fut a cukor- és foszfátcsoportokból álló kettős lánc, amelyet hidrogénhídkötésben (146. § 1.) 4 különféle heterogyűrűs, nitrogéntartalmú bázisokból álló bázispárok (A–T, C–G) kapcsolnak össze. Megállapították továbbá, hogy a bázisok meghatározott sorrendű bázishármasai irányítják a sejten belüli aminosavszintézist.

Ha egyetlen bázis 1 aminosavmolekulát állítana elő, akkor az $i = 2$ bit információtartalmú A, T, C, G bázisok $\lambda = 2^i = 2^2 = 4$ aminosavat kódolnának. Az $i = 4$ bit információtartalmú báziskettősök $\lambda = 2^i = 2^4 = 16$ aminosavat, az $i = 6$ bit információtartalmú bázishármasok pedig már $\lambda = 2^i = 2^6 = 64$ aminosavat határoznának meg.

A természetben csak $\lambda = 20$ különféle aminosav fordul elő, amelyek információtartalma $i = \lg \lambda/(\lg 2) = \lg 20/(\lg 2) = 4{,}322$. Ezért a különböző sorrendű, de mindig 6 bit információtartalmú bázishármasok minden további nélkül képesek irányítani az aminosavszintézist.

A 64 kombinációban előforduló bázishármasból valójában csak 61 vesz részt az aminosavak előállításában, 3 bázishármas (TAA, TAG, TGA) pedig leállítja az aminosavszintézist.

Mivel a bázishármas-kombinációk száma jóval nagyobb az aminosavak számánál, ezért számos bázishármas ugyanazt az aminosavat állítja elő, pl. a prolin aminosavat a CCT, a CCC, a CCA és a CCG egyaránt kódolja. Ez az ún. *kód-degeneráltság* nagyon fontos az élőlények számára. Ugyanis, ha a DNS szerkezetében változás történik, ez az esetek jelentős részében nem jár következménnyel, mivel elég nagy esély van arra, hogy a megváltozott bázishármas is ugyanazt az aminosavat határozza meg.

Adott sorrendű bázishármas minden élőlényben (növényben, állatban, emberben, vírusban, baktériumban) ugyanazt az aminosavat határozza meg, pl. a TAC sorrendű bázishármas mindig tirozin aminosavat kódol. Ez a tapasztalat arra utal, hogy az összes élőlény igen közeli rokona egymásnak, és mindannyian egyetlen közös őstől származnak. Nem véletlen tehát, hogy az egyes emberek DNS-molekulájában a bázissorrend csak 0,5% eltérést mutat. Legközelebbi rokonunk, a csimpánz DNS-állományától is mindössze 1,2%-ban térünk el.

Az emberi DNS-molekulában levő $3 \cdot 10^9$ bázisból, ill. 10^9 bázishármasból csak 3%, vagyis $3 \cdot 10^7$ bázishármas vesz részt az aminosavak előállításában. Mivel 1 aktív bázishármas információtartalma 6 bit, ezért az emberi DNS-molekulában található $3 \cdot 10^7$ számú aktív bázishármas információtartalma: $6 \text{ bit} \cdot 3 \cdot 10^7 = 1{,}8 \cdot 10^8 \text{ bit} \approx 10^8$ bit, a kb. 10^{16} DNS-molekulájú ember információtartalma pedig $10^{16} \cdot 10^8 \text{ bit} = 10^{24}$ bit.

A DNS-molekulának a bázishármasokból álló rövidebb-hosszabb szakaszát *génnek* nevezzük. A gének hordozzák az aminosavakból történő fehérjeszintézis alaptervét, az ún. *genetikai térképet* (2001. február), amely minden információt tartalmaz arról, hogy milyen lesz a keletkező fehérjék szerkezete, és a fehérjéket tartalmazó szervezet hogyan fog fejlődni és működni.

Minden élőlénynek a fajra jellemző számú DNS-molekulája, illetve génje van. Például a kb. 2 m hosszú emberi DNS-molekulában $3 \cdot 10^4$ gén található.

Összefoglalva: A három bázisból („betűből") álló bázishármasok („szavak") termelik az aminosavakat, a gének („mondatok") pedig irányítják az aminosavakból történő fehérjeszintézist.

Sejtosztódáskor a DNS-molekula szálai szétválnak. Ezután mindegyik szál felépíti magának a hiányzó, de vele komplementer (kiegészítő) szálat a sejtben levő tápanyagokból: mégpedig az egyik szál A adeninjével a másik szálon T timin, a C citozinjával szemben pedig G guanin jön létre és fordítva. Ily módon az eredetivel megegyező, két DNS-molekula keletkezik. Ha ezt a feladatot a sejtmagban levő összes DNS-molekula végrehajtja, teljes sejtosztódás történik, és két azonos új sejt jön létre.

Ha a DNS-molekula kettőződésekor a bázishármas összetétele vagy sorrendje megváltozik, hiba jön létre, ez a *mutáció*. Például, ha a GAA bázishármas AAA-ra változik, akkor glutaminsav helyett lizin aminosav keletkezik, amely fehérjébe épülve sarlósejtes vérszegénységet okoz: a vörösvérsejtek deformálódnak és csökken oxigénkötő képességük. Az öregedés folyamán a hibák száma lassan halmozódik. A mutáció létrejöhet a természetben a DNS másolási hibája miatt, de előidézhetik bizonyos vegyszerek (pl. rákkeltő hatású kátránytermékek) és sugárzások (radioaktív, röntgen-, neutron- és ultraibolya sugárzások) is. A mutációnak azonban nemcsak káros, hanem kedvező következményei is lehetnek, mint pl. a *biológiai evolúció* során.

A mutációkor kialakuló egyed, a *mutáns* viselheti a változás jól látható külső jegyeit (pl. megváltozott levélforma, szem- és hajszín, magasság, alkat), de végbemehet a sejten belül is (pl. a mutáns elveszíti képességét bizonyos élettanilag fontos vegyületek szintézisére).

A jelenleg élő növény- és állatfajok a korábban élt ősöktől származnak, és kétlépéses *evolúciós folyamatok* során alakultak ki. Először mutációval létrejöttek a különböző szervezettségű (entrópiájú és információtartalmú) változatok. Ezt követően a környezethez jobban alkalmazkodni tudó, kisebb entrópiájú és nagyobb információtartalmú másolatok szaporodtak el a nagyobb entrópiájú és kisebb információtartalmú egyedek rovására. Ez a Charles DARWIN (1809–1882) angol természettudós által felismert *természetes szelekció* (természetes kiválasztódás). *A biológiai evolúció tehát mindig entrópiacsökkenéssel és információnövekedéssel járó irreverzíbilis termodinamikai folyamat, amely csak a környezetével kölcsönhatásban levő, nyílt élő rendszerekben jöhet létre.*

A 20. század végén sikerült géneket elkülöníteni (izolálni) és beépíteni más szervezetekbe (növényekbe, állatokba). Ezeket az eljárásokat *génklónozásnak* (röviden: klónozásnak) nevezik. A klónozás új távlatokat nyit a mezőgazdaságban és az emberi betegségek gyógyításában.

Döntően a szülőktől örökölt genetikai állomány és a mutáció miatt minden élőlény, köztük az ember is

„Egyedüli példány.
Nem élt belőle több és most sem él,
s mint fán se nő egyforma-két levél,
a nagy időn se lesz hozzá hasonló."

(KOSZTOLÁNYI DEZSŐ)

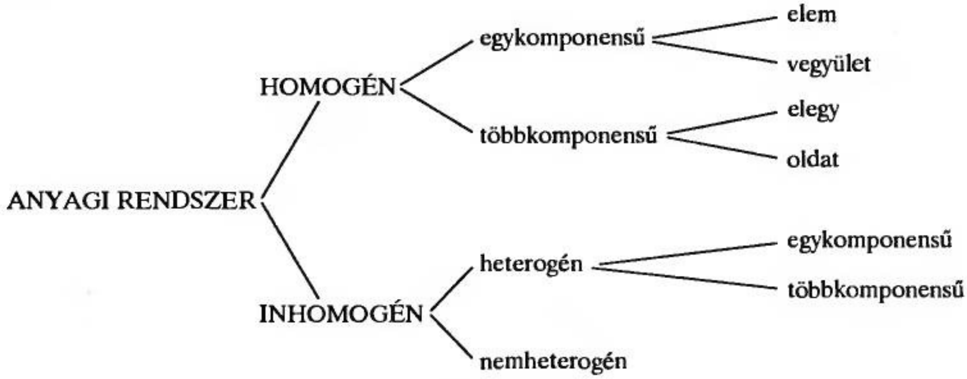
A genetikának (örökléstannak) köszönhetően ma, a 21. század hajnalán már elég jól ismerjük az élet lényegét, de ***„kevésbé értjük, mi a szellem, és hogy egyesülhet a szellem a testtel. Ez számunkra a legeslegnagyobb talány, pedig ez az ember lényege"*** (BLAISE PASCAL, 1670).

II. E) FÁZISÁTALAKULÁSOK ÉS FÁZISEGYENSÚLYOK

61. § Az anyagi rendszerek és a fázisátalakulások általános jellemzése

1. Az anyagi rendszer fogalma

A részecskékből álló makroszkopikus anyagnak a külvilágtól elhatárolt részét ***anyagi rendszernek*** nevezzük, és felépítése szerint homogén vagy inhomogén anyagi rendszert különböztetünk meg (**61.1. ábra**).



61.1. ábra

Homogén egy anyagi rendszer, ha nincsenek benne makroszkopikus határfelületek, a rendszer minden részében azonos a kémiai összetétel és az intenzív paraméterértékek (pl. nyomás, sűrűség, hőmérséklet) megegyeznek. A homogén rendszert gyakran homogén fázisnak is nevezik. A homogén rendszer kétféle lehet: egyetlen kémiai anyagfajtából álló egykomponensű vagy több anyagfajtából felépülő többkomponensű rendszer. *Egykomponensű homogén anyagi rendszert* alkotnak az elemek és a vegyületek attól függően, hogy a bennük levő atomok atommagjában azonos vagy különböző számú proton van-e. A *többkomponensű homogén rendszerek* közé tartoznak a tetszőleges összetételű elegyek és az oldatok. [Az oldatok is tulajdonképpen elegyek, amelyekben az egyik alkotórész (többnyire az oldószer) a többi alkotórészhez (oldott anyaghoz) képest jóval nagyobb mennyiségben van jelen.]

Minden nem homogén anyagi rendszert ***inhomogén anyagi rendszernek*** nevezünk, ami lehet heterogén vagy nemheterogén. A ***heterogén rendszer*** belsejében határfelülettel elválasztott egynemű részeket (homogén fázisokat) különböztethetünk meg. Az egyes fázisokon belül az intenzív paraméterek megegyeznek, de a különböző fázisok eltérő paraméterűek. A heterogén rendszer komponenseinek száma szerint *egykomponensű* (pl. jég és vele érintkező víz) vagy *többkomponensű* (pl. víz és homok keveréke). A ***nemheterogén anyagi rendszerben*** nincsenek határfelületek, tehát a rendszer egyetlen fázisból áll, de a fizikai tulajdonságait jellemző intenzív paraméterek helyről helyre változnak (pl. a légkör sűrűsége és hőmérséklete).

2. A fázisátalakulás fogalma

Az anyagi rendszerek közül a ***termodinamikai rendszerek*** – a termodinamika első főtétele szerint – egymással és környezetükkel termikus kölcsönhatás és munkavégzés során energiát cserélhetnek. Ha a termodinamikai rendszer hőmérsékletét folytonosan változtatva egy jól meghatározott hőmérsékleten, az ún. $T_á$ *átalakulási (kritikus) hőmérsékleten* a rendszerben ugrásszerű változás (pl. térfogatváltozás) következik be, akkor ***fázisátalakulásról*** beszélünk. A fázisátalakuláskor létrejövő egyensúlyokat ***fázisegyensúlyoknak*** nevezzük.

3. A fázisátalakulások osztályozása

Paul EHRENFEST [érenfeszt] (1880–1933) osztrák fizikus nyomán elsőrendű és folytonos (régebbi elnevezéssel: másodrendű) fázisátalakulásokat különböztetünk meg.

a) Az elsőrendű fázisátalakulásokhoz tartoznak az átalakulási hőmérsékleten végbemenő kristályszerkezet-változások, az ún. *polimorf átalakulások* (pl. 906 °C-on a rosszul nyújtható vasmódosulat jól nyújtható vasmódosulattá alakul át) és a mindennapi életben nagyon fontos *halmazállapot-változások* (pl. jég olvadása, víz fagyása).

Az elsőrendű fázisátalakulást mutató anyagokra jellemző, hogy a $T_á$ átalakulási hőmérsékleten

– V térfogatuk, U belső energiájuk és S entrópiájuk ugrásszerűen változik (**61.2/a. ábra**);

– hőt vesznek fel (pl. olvadáskor, vagyis a rendezetlenebb állapotba való átmenetelkor $\Delta S > 0$, s így $Q = T_á\ \Delta S > 0$), vagy hőt adnak le (pl. fagyáskor, vagyis a rendezettebb állapotba való átmenetelkor $\Delta S < 0$, s így $Q = T_á\ \Delta S < 0$). Mivel a felvett vagy leadott Q hő az anyag $T_á$ átalakulási hőmérsékletét nem változtatja meg, ezért ezt a fázisátalakulási hőt *latens (rejtett) hőnek* nevezik.

A latens hő rendszerint az anyag mikroszerkezetét változtatja meg. Pl. a szilárd anyag *olvadásakor* az elnyelt hő legnagyobb része a belső energiát növeli, vagyis fedezi azt a munkát, amelyet a molekuláris vonzóerők ellenében kell végezni ahhoz, hogy a szilárd anyagban az egyensúlyi helyzethez kötött tömegpontok (atomok, molekulák vagy ionok) e helyzetüket elhagyják, s ezáltal a kristályrács összeomoljon. Olvadáskor tehát a közölt latens hő a tömegpontok mozgási energiája helyett potenciális energiájukat növeli, ez pedig nem okoz hőmérséklet-változást. Az olvadáskor fellépő térfogatváltozás kicsi, így a hőnek csak elenyésző része fordítódik térfogatváltozással kapcsolatos térfogati munkára (50. § 2.). Ezzel szemben a *párolgás* és a *szublimáció* jelentős térfogatváltozással jár, így a közölt latens hőnek csak egy része fordítódik a tömegpontok közötti vonzóerők legyőzéséhez szükséges munkára, a másik része a külső nyomás ellenében végzett térfogati munkát fedezi.

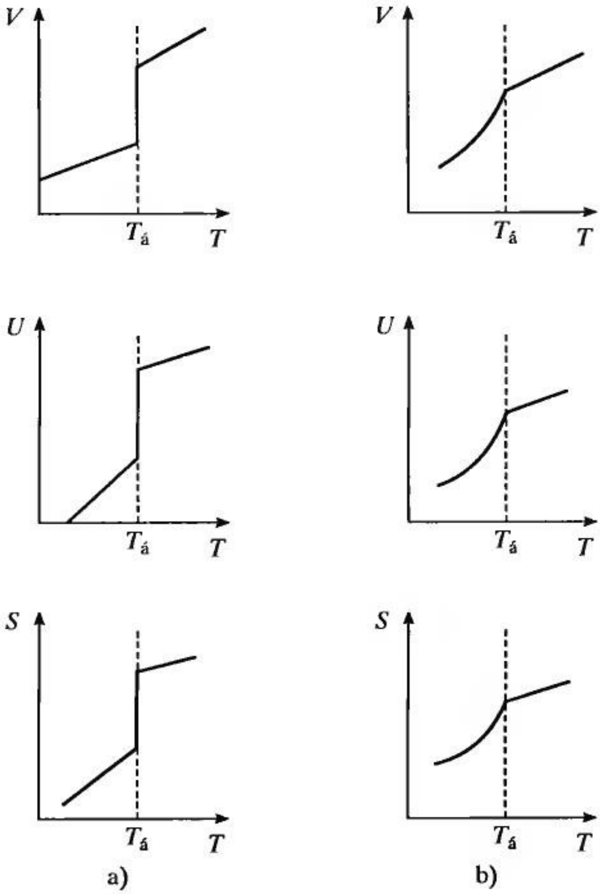
– $T_á$ = állandó folytán $\Delta T = 0$, a hőkapacitás pedig $C = Q/\Delta T = \infty$ értéket vesz fel.

b) A folytonos fázisátalakulás számos formája ismert. Így pl. a 2,2 K átalakulási hőmérsékleten a hélium dinamikai viszkozitása (36. §) mérhetetlenül kicsinnyé válik; az átalakulási hőmérsékleten a szupravezető anyagok elveszítik elektromos ellenállásukat (77. § 5.), a ferromágneses anyagok pedig (pl. a vas 769 °C-on) paramágneses anyagokká alakulnak át (91. § 2.).

Folytonos fázisátalakuláskor

– nem változik a térfogat ($\Delta V = 0$), a belső energia ($\Delta U = 0$) és az entrópia ($\Delta S = 0$). Ezt mutatja a **61.2/b. ábra**.

– $\Delta S = 0$ folytán $Q = T_á\ \Delta S = 0$, vagyis a fázisátalakulás nem jár együtt hőfelvétellel vagy hőleadással.



61.2. ábra

62. § Halmazállapot-változások, elegyek és oldatok

1. Halmazállapot-változások

a) A halmazállapot-változások általános jellemzése

Az elsőrendű fázisátalakulást akkor nevezzük *halmazállapot-változásnak*, ha az egykomponensű homogén anyagi rendszer (elem, vegyület) adott nyomáson és hőmérsékleten (az átalakulási hőmérsékleten) az egyik halmazállapotú fázisból (pl. szilárd fázisból) egy másik halmazállapotú fázisba (pl. folyékony fázisba) megy át. A halmazállapot-változás lehet olvadás, fagyás, gőzképződés (párolgás, forrás), lecsapódás és szublimáció (**62.1. ábra**).

$$\text{SZILÁRD} \underset{\text{fagyás}}{\overset{\text{olvadás}}{\rightleftarrows}} \text{FOLYADÉK} \underset{\text{lecsapódás}}{\overset{\text{gőzképződés}}{\rightleftarrows}} \text{LÉGNEMŰ}$$

$$\xrightarrow[\text{szublimáció}]{\hspace{12cm}}$$

62.1. ábra

A légnemű halmazállapotú anyagok gőzök vagy gázok. *Gőzöknek* nevezzük azokat a légnemű halmazállapotú anyagokat, amelyeknek cseppfolyósodási hőmérséklete 101,325 kPa nyomáson a szobahőmérséklet (25 °C) fölött van. A nem gőz halmazállapotú légnemű anyagok a *gázok*.

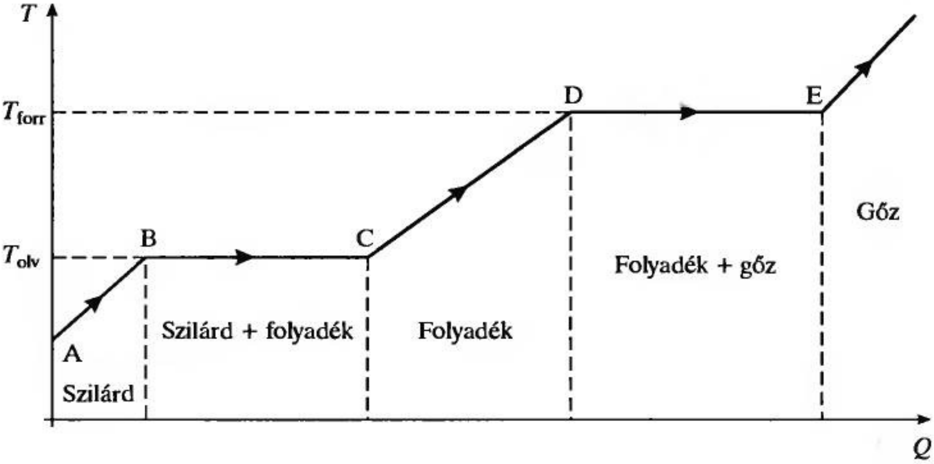
Termodinamikailag az egyes halmazállapot-változásokat a fajlagos, a moláris és a standard átalakulási hővel jellemezzük.

A normális légköri nyomáshoz (101,325 kPa-hoz) tartozó ún. *normális átalakulási hőmérsékleten* (normális olvadásponton, normális fagyásponton, normális forrásponton) felvett vagy leadott L latens hőnek és a halmazállapot-változásban részt vevő anyag m tömegének a hányadosát, az L/m hányadost ***fajlagos átalakulási hőnek*** nevezzük. Az így definiált fajlagos átalakulási hő megmutatja, hogy az egységnyi tömegű anyag a normális átalakulási hőmérsékleten mennyi latens hőt vesz fel vagy ad le; – SI-egysége a joule per kilogramm, jele: J/kg. Ajánlott prefixált SI-egysége: kJ/kg. – A különböző halmazállapot-változásoknak megfelelően a fajlagos átalakulási hők a következők: *fajlagos olvadáshő* (olvadáskor), *fajlagos fagyáshő* (fagyáskor), *fajlagos párolgáshő* (párolgáskor), *fajlagos forráshő* (forráskor), *fajlagos lecsapódási hő* (lecsapódáskor) és *fajlagos szublimációs hő* (szilárd anyagnak gőzállapotba menetelekor).

A kémiában többnyire nem az m tömegre, hanem az n anyagmennyiségre vonatkoztatott, vagyis az $L_m = L/n$ ***moláris átalakulási hővel*** szokás jellemezni a halmazállapot-változásokat. A moláris átalakulási hő megmutatja az egységnyi anyagmennyiségű anyag normális átalakulási hőmérsékleten bekövetkező halmazállapot-változásához tartozó latens hőt; – SI-egysége a joule per mól, jele: J/mol. Ajánlott prefixált SI-egysége: kJ/mol.

Az 1 bar (= 10^5 Pa), ún. standard nyomáshoz tartozó átalakulási hőmérsékletet *standard átalakulási hőmérsékletnek*, az átalakulási hőt ***standard átalakulási hőnek***, illetve ***standard moláris átalakulási hőnek*** nevezzük. Ezek értéke gyakorlatilag megegyezik a normális átalakulási hőmérséklettel, a fajlagos átalakulási hővel, illetve a moláris átalakulási hővel. Mivel azonban 1 bar valamelyest kisebb a normális légköri nyomásnál, ezért pl. a 100,00 °C normális forráspontú víz standard forráspontja csak 99,6 °C.

Ha bármely adott halmazállapotú anyaggal hőt közlünk, hőmérséklete emelkedik, fázisátalakuláskor azonban a hőmérséklet nem változik (**62.2. ábra**).



62.2. ábra

A *62.1. táblázatban* feltüntettük néhány anyag T_{olv} normális olvadáspontját, T_{forr} normális forráspontját, L_{olv}/m fajlagos olvadáshőjét, L_{olv}/n moláris olvadáshőjét, L_{forr}/m fajlagos forráshőjét és L_{forr}/n moláris forráshőjét.

Néhány anyag normális átalakulási hőmérséklete és átalakulási hője kb. 100 kPa nyomáson

62.1. táblázat

Anyag	$T_{olv} = T_{fagy}$, K	$T_{olv} = T_{fagy}$, °C	L_{olv}/m, kJ/kg	L_{olv}/n, kJ/mol	T_{forr}, K	T_{forr}, °C	L_{forr}/m, kJ/kg	L_{forr}/n, kJ/mol
Hélium (He)	3,5	–269,7	5,2	0,02	4,2	–269	21	0,09
Hidrogén (H_2)	14	–259	58	0,12	20	–253	452	0,90
Higany (Hg)	234	–39	11	2,21	630	357	272	55
Nitrogén (N_2)	63	–210	26	0,73	77	–196	201	5,6
Ólom (Pb)	600	327	25	5,11	2013	1740	871	180,5
Oxigén (O_2)	54	–219	14	0,45	90	–183	212	6,8
Réz (Cu)	1356	1083	205	13	2868	2595	4774	303
Vas (Fe)	1801	1528	268	15	3523	3250	6340	354
Víz (H_2O)	273	0	334	6,0	373	100	2256	40,6

b) A fázisdiagramok

Fázisegyensúlyban az összetartozó nyomás–hőmérséklet pontokat összekötő ún. fázisgörbéket a p–T fázisdiagramon szokás szemléltetni.

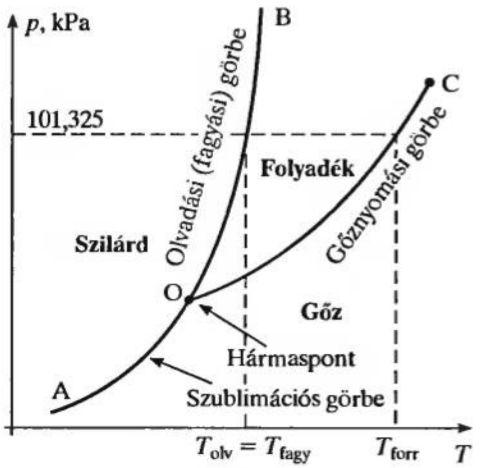
Az egykomponensű, de kétfázisú halmazállapot-változásokhoz tartoznak a legegyszerűbb fázisdiagramok (**62.3, 4. ábra**). Fontos jellemzőjük, hogy a fázisgörbe mentén a két fázis egymással egyensúlyban van, de a görbék közötti mezőkhöz mindig csak egyetlen fázis tartozik. A különböző p–T fázispárokat összekötő fázisgörbék egy pontban, az O hármaspontban metszik egymást. A hármasponthoz tartozó hőmérsékleten és nyomáson a három fázis egymással egyidejűleg egyensúlyban van, pl. a víz–jég rendszer csak saját gőzének nyomása alatt áll.

A **62.3, 4. ábrákon** feltüntetett fázisdiagramokon három fázisgörbe különböztethető meg:
- az AO *szublimációs görbe,*
- az OB *olvadási (fagyási) görbe* és
- az OC *gőznyomási görbe.*

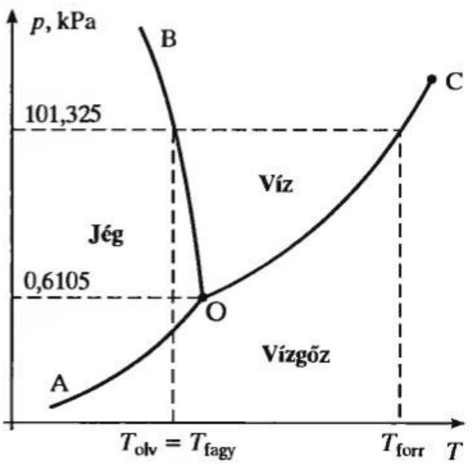
Az AO szublimációs görbe elvileg a $T = 0$ és a $p = 0$ pontból indul, de valójában a szublimációs nyomás alacsony hőmérsékleten már mérhetetlenül kicsivé válik.

A térfogat-növekedéssel járó olvadási folyamatok OB olvadási görbéje jobbra hajlik (**62.3. ábra**), ezért a p külső nyomás növekedésekor az olvadáspont emelkedik. Ezzel szemben ha a térfogat olvadáskor csökken, akkor a balra hajló olvadási görbe folytán (**62.4. ábra**) a p nyomás növelésével az olvadáspont csökken. Így viselkedik pl. a jég, amelyre ha a légnyomásnál nagyobb nyomás nehezedik, akkor olvadáspontja süllyed és megolvad. Ez teszi lehetővé a hólabdakészítést, a megolvadt jégen való korcsolyázást, a gleccserek folyását, s ezért tapad cipőtalpunkra a hó. A túlnyomás megszűnésekor azonban a jégből lett víz hőmérséklete emelkedik és újra fagy (regeláció, újrafagyás).

Az OC gőznyomási görbe a C kritikus pontban véget ér. Ekkor a folyadék és gőze azonossá válik.



62.3. ábra



62.4. ábra