

1. Csörgő 7. hét

1.1. feladat

$$F(x, y) = x^y - y^x = 0 \quad (2, 4)$$

Mivel a függvény differenciálható, és a $(2, 4)$ pontban $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, így az implicit függvény tétel miatt létezik egy $y = f(x)$ implicit függvény. Ekkor

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}} \Big|_{(2,4)} = \frac{2^2 \ln 2 - 2^2}{2 \ln 2 - 1} \approx -3.177.$$

1.2. feladat

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad a, x_0, y_0 > 0$$

A függvény differenciálható. Ahhoz, hogy létezzen egy $y = f(x)$ implicit függvény, kell, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax \neq 0$$

legyen, azaz $y^2 - ax \neq 0$. Ekkor létezik az implicit függvény, és

$$f'(x) = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{ay_0 - x_0^2}{y_0^2 - ax_0}.$$

1.3. feladat

$$F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0 \quad \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

Mivel a függvény differenciálható, és az $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ pontban $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, így az implicit függvény tétel miatt létezik egy $y = f(x)$ implicit függvény. Ekkor

$$f'(x) = \frac{\sin y}{-x \cos y - \sin y + 2 \sin(2y)} \Big|_{\left(1, \frac{\pi}{2}\right)} = -1.$$

1.4. feladat

$$F(x, y) = 2ye^x - xe^y \quad (0, 0)$$

Mivel a függvény differenciálható, és a $(0, 0)$ pontban $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, így az implicit függvény tétel miatt létezik egy $y = f(x)$ implicit függvény. Ekkor

$$f'(x) = \frac{e^y - 2ye^x}{2e^x - xe^y} \Big|_{(0,0)} = \frac{1}{2}.$$

1.5. feladat

$$F(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - y^2 - 1}{x^2 + y^2} \quad (1, 2)$$

Mivel a függvény differenciálható, és az $(1, 2)$ pontban $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, így az implicit függvény tétel miatt létezik egy $y = f(x)$ implicit függvény. Ekkor

$$f'(x) = \frac{-x^2y + 2xy^2 + x + y^3}{-x^3 + 2x^2y + xy^2 - y} \Big|_{(1,2)} = 3.$$

1.6. feladat

$$F(x, y) = \frac{\ln(x^3 y^2)}{xy} = 0 \quad (1, 1)$$

Mivel a függvény differenciálható, és az $(1, 1)$ pontban $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, így az implicit függvény tétel miatt létezik egy $y = f(x)$ implicit függvény. Ekkor

$$f'(x) = \frac{\frac{\ln(x^3 y^2) - 3}{x^2 y}}{\frac{2 - \ln(x^3 y^2)}{xy^2}} = \frac{y \ln(x^3 y^2) - 3y}{2x - x \ln(x^3 y^2)} \Big|_{(1,1)} = -\frac{3}{2}.$$

1.7. feladat

$$F(x, y) = \frac{x}{y} \arctg \frac{y}{x} = 0 \quad (1, 1)$$

Mivel a függvény differenciálható, és az $(1, 1)$ pontban $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, így az implicit függvény tétel miatt létezik egy $y = f(x)$ implicit függvény. Ekkor

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{y} \arctg \frac{y}{x}}{\frac{x^2}{x^2+y^3} - \frac{x}{y^2} \arctg \frac{y}{x}} = \frac{x}{y} \Big|_{(1,1)} = 1.$$

1.8. feladat

$$f(x, y) = xy \quad \varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$$

Első megoldás

A Lagrange-féle multiplikátor szabályt alkalmazva legyen

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi(x, y) = xy - \lambda x - \lambda y + \lambda.$$

Ekkor $\nabla F = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - y + 1 = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = y = \lambda = \frac{1}{2}$. Könnyen látható, hogy ekkor maximumot kapunk, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséggel igazolható. A függvényérték $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Második megoldás

A feltételből $y = 1 - x$. Ekkor

$$f(x, y) = x(1 - x) = -x^2 + x.$$

Tudjuk, hogy egy másodfokú kifejezésnek szélsőértéke van a két gyök számtani közepénél, tehát $x = y = \frac{1}{2}$ szélsőérték. Továbbá a másodfokú tag előjele negatív, így a szélsőérték maximum. A függvényérték $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

1.9. feladat

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \varphi(x, y) = x + y - 8 = 0$$

Első megoldás

A Lagrange-féle multiplikátor szabályt alkalmazva legyen

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda x - \lambda y + 8\lambda.$$

Ekkor $\nabla F = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - y + 8 = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = y = 4$ és $\lambda = 8$. Könnyen látható, hogy ekkor minimumot kapunk, a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséggel igazolható. A függvényérték $f(4, 4) = 32$.

Második megoldás

A feltételből $y = 8 - x$. Ekkor

$$f(x, y) = x^2 + (8 - x)^2 = 2x^2 - 16x + 64.$$

Tudjuk, hogy egy másodfokú kifejezésnek szélsőértéke van a két gyök számtani közepénél, tehát $x = y = 4$ szélsőérték. Továbbá a másodfokú tag előjele pozitív, így a szélsőérték minimum. A függvényérték $f(4, 4) = 32$.

1.10. feladat

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \varphi(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

Első megoldás

A Lagrange-féle multiplikátor szabályt alkalmazva legyen

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda\frac{x}{a} - \lambda\frac{y}{b} + \lambda.$$

Ekkor $\nabla F = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \frac{\lambda}{a} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \frac{\lambda}{b} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0$$

Ebből azt kapjuk, hogy $x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$ és $\lambda = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$. Látható, hogy ez a szélsőérték minimum. A függvényérték $f\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Második megoldás

A feltételből $y = b - \frac{b}{a}x$. Ekkor

$$f(x, y) = x^2 + \left(b - \frac{b}{a}x\right)^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)x - 2\frac{b^2}{a}x + b^2.$$

Tudjuk, hogy egy másodfokú kifejezésnek szélsőértéke van a két gyök számtani közepénél, tehát $x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$ szélsőérték. Továbbá a másodfokú tag előjele pozitív, így a szélsőérték minimum. A függvényérték $f\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

1.11. feladat

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \varphi(x, y) = xy - 3 = 0$$

Első megoldás

A Lagrange-féle multiplikátor szabályt alkalmazva legyen

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda xy + 3\lambda.$$

Ekkor $\nabla F = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -xy + 3 = 0$$

Ebből $x = y = 0$, vagy $\lambda = \pm 2$. Nyilván $x = y = 0$ nem lehet a harmadik egyenlet miatt, így $\lambda = \pm 2$, amiből azt kapjuk, hogy $x = y = \pm\sqrt{3}$. Könnyen látható, hogy ekkor minimumot kapunk, a mértani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséggel igazolható. A függvényérték $f(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}) = 6$.

Második megoldás

A feltételből $y = \frac{3}{x}$. Ekkor

$$f(x, y) = x^2 + \frac{9}{x^2}.$$

Deriválás után látható, hogy az egyenletnek minimuma van az $x = y = \pm\sqrt{3}$ pontokban. A függvényérték $f(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}) = 6$.

1.12. feladat

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy \quad \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

A Lagrange-féle multiplikátor szabályt alkalmazva legyen

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\varphi(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - \lambda x^2 - \lambda y^2 - \lambda z^2 + \lambda.$$

Ekkor $\nabla F = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - 2\lambda x + 2y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y - 2\lambda y + 2x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4z - 2\lambda z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

Az egyenletből $z = 0$, vagy $\lambda = 2$. Azonnal látjuk, hogy $\lambda = 2$ mellett a feltétel nem teljesülhet, így $z = 0$. Ekkor a feladat visszavezethető kétváltozós függvényekre. Legyen ugyanis

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy \quad \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Ekkor ennek a függvénynek a szélsőértéke a megadott feltétel mellett megyezik az eredeti függvény szélsőértékével. A φ feltétel mellett

$$f(x, y) = 2 + 2xy.$$

Ekkor a mértani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség miatt

$$2xy \leq x^2 + y^2 = 1$$

így $f(x, y) \leq 3$. Maximuma nyilván akkor lesz, ha $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.13. feladat

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \varphi(x, y, z) = z^2 - x^2y - 4 = 0$$

A feltételből $z^2 = x^2y + 4$. Ekkor

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$$

szélsőértéke megegyezik az eredeti függvény szélsőértékével. Lokális szélsőértékhez $\nabla f = 0$ kell.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x^2 = 0$$

Ebből $y = -1$ és $x = \pm\sqrt{2}$, vagy $x = y = 0$. Láthatjuk, hogy $y = -1$ esetén a Hesse mátrix determinánsa negatív lesz, így $x = y = 0$. Ekkor a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $(0, 0)$ lokális minimum. A minimumérték $f(0, 0) = 4$.

1.14. feladat

$$f(x, y) = x \quad \varphi(x, y) = x^3 - y^2 = 0$$

Azonnal láthatjuk, hogy a függvénynek nincs maximuma. Mivel a feltételben $x^3 \geq 0$ kell, nyilván minimum akkor lesz, ha $x = 0$, ekkor $f(0, y) = 0$.

1.15. feladat

$$f(x, y) = x + y \quad \varphi(x, y) = x^3 - y^2 = 0$$

Azonnal láthatjuk, hogy a függvénynek nincs szélsőértéke.

1.16. feladat

$$f(x, y) = y \quad \varphi(x, y) = x^3 - y^2 = 0$$

Azonnal láthatjuk, hogy a függvénynek nincs szélsőértéke.

1.17. feladat

$$f(x, y) = x^3 \quad \varphi(x, y) = y - x^2 = 0$$

Azonnal láthatjuk, hogy a függvénynek nincs szélsőértéke.

1.18. feladat

$$f(x, y) = \sin(x + y) \quad \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Tudjuk, hogy a vizsgált függvény korlátos, így elég megmutatni azokat az értékeket, melyekre a függvény felveszi a szélsőértékeit. Ekkor $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén maximum van, hiszen $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, továbbá $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén minimum van, hiszen $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$.

1.19. feladat

Legyen a téglalap két oldala a, b . Ekkor $K = 2a + 2b$, amiből $b = \frac{K-2a}{2}$. Forgassuk meg a téglalapot a b oldala körül! Ekkor nyilván

$$V(a) = \frac{\pi}{2}a^2(K - 2a).$$

Deriváljunk!

$$V'(a) = \pi a(K - 3a) = 0$$

Ekkor $a \neq 0$ miatt $a = \frac{K}{3}$, illetve ebből $b = \frac{K}{6}$. Mivel $V''\left(\frac{K}{3}\right) < 0$, így a szélsőérték maximum. A függvényérték $V\left(\frac{K}{3}\right) = \frac{\pi}{54}K^3$.

1.20. feladat

Kössük össze az (a, b, c) pontot a gömb középpontjával! Ez az egyenes két pontban metszi a gömböt. Ekkor a közelebbi metszéspont a legközelebbi pont lesz a felületen, a távolabbi pedig a legtávolabbi. Ez elemi úton, akár a háromszög egyenlőtlenséggel könnyen igazolható. Ekkor a ponthoz legközelebbi gömbfelületen elhelyezkedő pont koordinátái

$$\left(\frac{3a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{3b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{3c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

illetve a legtávolabbi gömbfelületen elhelyezkedő pont koordinátái

$$\left(-\frac{3a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{3b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{3c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right).$$

1.21. feladat

$$f(x, y) = 2xy - 3y \quad \varphi_1(x, y) = y = 0 \quad \varphi_2(x, y) = y - x^2 = 0 \quad \varphi_3(x, y) = x - 2 = 0$$

Legyen D a megadott görbék által közrezárt tartomány!

Első lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket $\text{int}D$ -ben! Ehhez $\nabla f = 0$ kell.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 3$$

Ebből $x = \frac{3}{2}$ és $y = 0$. Ez a pont nincs benne $\text{int}D$ -ben, úgyhogy nem vizsgálunk tovább.

Második lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket ∂D -ben! A Lagrange-féle multiplikátor szabályt fogjuk alkalmazni.

1. Láthatjuk, hogy a φ_1 feltétel mellett $f(x, y) = 0$.

2. Legyen

$$F_2(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi_2(x, y) = 2xy - 3y - \lambda y + \lambda x^2.$$

Ekkor $\nabla F_2 = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2x - 3 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} = -y + x^2 = 0$$

A második egyenletből $\lambda = 2x - 3$, illetve a harmadik egyenletből $y = x^2$. Behelyettesítve az első egyenletbe

$$6x(x - 1) = 0.$$

Ekkor $x = 0$, vagy $x = 1$. $x = 0$ esetén $y = 0$ -t kapunk, amire $f(0, 0) = 0$. $x = 1$ esetén $y = 1$, ekkor $f(1, 1) = -1$.

3. Legyen

$$F_3(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi_3(x, y) = 2xy - 3y - \lambda x + 2\lambda.$$

Ekkor $\nabla F_3 = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = 2x - 3 = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \lambda} = -x + 2 = 0$$

Azonnal láthatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet, hiszen a második egyenletből $x = \frac{3}{2}$, de tudjuk, hogy $x = 2$.

Harmadik lépés

Vizsgáljuk meg a φ_k feltételek végpontjait! Azt kapjuk, hogy lokális maximum van $(2, 4)$ -ben, ahol a maximum értéke $f(2, 4) = 4$.

Összegzés

Azt kaptuk, hogy a függvénynek lokális minimuma van $(1, 1)$ -ben, ahol a minimum értéke $f(1, 1) = -1$. Lokális maximuma van $(2, 4)$ -ben, ahol a maximum értéke $f(2, 4) = 4$.

1.22. feladat

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - x \quad \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Legyen

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Első lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket $\text{int}D$ -ben! Ehhez $\nabla f = 0$ kell.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$$

Ebből $x = \frac{1}{2}$ és $y = 0$. Ekkor a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H < 0$, így $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ nyeregpon.

Második lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket ∂D -ben! A Lagrange-féle multiplikátor szabályt alkalmazva legyen

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - x - \lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda.$$

Ekkor $\nabla F = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 1 - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y - 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 + 1 = 0$$

A második egyenletből $y = 0$, vagy $\lambda = -1$.

1. $y = 0$ esetén $x = \pm 1$. Ekkor $f(1, 0) = 0$, illetve $f(-1, 0) = 2$.

2. $\lambda = -1$ esetén az első egyenletből $x = \frac{1}{4}$, amiből $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$. Látható, hogy $f\left(\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{9}{8}$.

Összegzés

Azt kaptuk, hogy a függvénynek lokális minimuma van $\left(\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ -ben, ahol a minimum értéke $f\left(\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{9}{8}$. Lokális maximuma van $(-1, 0)$ -ban, ahol a maximum értéke $f(-1, 0) = 2$.

1.23. feladat

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 - y^2 \quad \varphi_1(x, y) = y - x + 1 = 0 \quad \varphi_2(x, y) = x + 1 = 0 \quad \varphi_3(x, y) = y - 4 = 0$$

Könnyen látható, hogy az egyenesek által közrezárt tartomány

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, x - 1 \leq y \leq 4 \right\}.$$

Első lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket $\text{int} D$ -ben! Ehhez $\nabla f = 0$ kell.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = y = 0$, a feltételek mellett. Ekkor a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 6x - 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, így $(0, 0)$ lokális maximumhely. A maximum értéke $f(0, 0) = 0$.

Második lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket ∂D -ben! A Lagrange-féle multiplikátor szabályt fogjuk alkalmazni.

1. Legyen

$$F_1(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi_1(x, y) = x^3 - 3x^2 - y^2 - \lambda y + \lambda y - \lambda.$$

Ekkor $\nabla F_1 = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 3x^2 - 6x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = -y + x - 1 = 0$$

A második egyenletből $\lambda = -2y$, illetve a harmadik egyenletből $\lambda = -2y = 2 - 2x$. Behelyettesítve az első egyenletbe

$$3x^2 - 8x + 2 = 0 \implies x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3} \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Látható, hogy ekkor $\left(\frac{4+\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$ lokális minimumhely, ahol a minimum értéke

$$f\left(\frac{4+\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{-83 - 20\sqrt{10}}{27}.$$

Lokális maximumhely $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3}, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$, ahol a maximum értéke

$$f\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3}, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{-83 + 20\sqrt{10}}{27}.$$

2. A φ_2 feltétel mellett $f(x, y) = -4 - y^2$, aminek lokális maximuma van $(-1, 0)$ -ban, ahol a maximum értéke $f(-1, 0) = -4$.

3. A φ_3 feltétel mellett $f(x, y) = x^3 - 3x^2 - 16$, aminek lokális maximum van $(0, 4)$ -ben, ahol a maximum értéke $f(0, 4) = -16$. Lokális minimuma van $(2, 4)$ -ben, ahol a minimum értéke $f(2, 4) = -20$.

Harmadik lépés

Vizsgáljuk meg a φ_k feltételek végpontjait! Azt kapjuk, hogy lokális minimum van $(-1, 4)$ -ben, ahol a minimum értéke $f(-1, 4) = -20$. Lokális maximum van $(5, 4)$ -ben, ahol a maximum értéke $f(5, 4) = 34$.

Összegzés

Azt kaptuk, hogy a függvénynek lokális minimuma van $(-1, 4)$ -ben és $(2, 4)$ -ben, ahol a minimum értéke $f(-1, 4) = f(2, 4) = -20$. Lokális maximum van $f(5, 4)$ -ben, ahol a maximum értéke $f(5, 4) = 34$.

1.24. feladat

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \quad \varphi_1(x, y) = y - x = 0 \quad \varphi_2(x, y) = y = 0 \quad \varphi_3(x, y) = x - 4 = 0$$

Könnyen látható, hogy az egyenesek által közrezárt tartomány

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 4], y \in [0, x] \right\}.$$

Első lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket $\text{int}D$ -ben! Ehhez $\nabla f = 0$ kell.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0$$

Ebből $x = y = 0$. Ez a pont nincs benne $\text{int}D$ -ben, úgyhogy nem vizsgálunk tovább.

Második lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket ∂D -ben! A Lagrange-féle multiplikátor szabályt fogjuk alkalmazni.

1. Legyen

$$F_1(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy - \lambda y + \lambda x.$$

Ekkor $\nabla F_1 = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x - y + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y - x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = -y + x = 0$$

Ebből $x = y = \lambda = 0$. Ekkor $f(0, 0) = 0$. Láthatjuk, hogy ez lokális minimum.

2. A φ_2 feltétel mellett $f(x, y) = x^2$. A függvénynek lokális minimuma van $(0, 0)$ -ban, ahol a minimum értéke $f(0, 0) = 0$.
3. A φ_3 feltétel mellett $f(x, y) = y^2 - 4y + 16$. A függvénynek lokális minimuma van $(4, 2)$ -ben, ahol a minimum értéke $f(4, 2) = 12$.

Harmadik lépés

Vizsgáljuk meg a φ_k feltételek végpontjait. Azt kapjuk, hogy lokális maximum van $(4, 4)$ -ben, ahol a maximum értéke $f(4, 4) = 16$.

Összegzés

Azt kaptuk, hogy a függvénynek lokális minimuma van $(0, 0)$ -ban, ahol a minimum értéke $f(0, 0) = 0$. Lokális minimum van $(4, 4)$ -ben, ahol a maximum értéke $f(4, 4) = 16$.

1.25. feladat

$$f(x, y) = 3x - 2y \quad \varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Legyen

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Első lépés

Könnyen láthatjuk, hogy a függvénynek nincs szélsőértéke $\text{int}D$ -ben.

Második lépést

Keressük meg a lokális szélsőértékeket ∂D -ben! A Lagrange-féle multiplikátor szabályt alkalmazva legyen

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = 3x - 2y - 4\lambda x^2 - \lambda y^2 + 4\lambda.$$

Ekkor $\nabla F = 0$ esetén lehetséges szélsőértékeket kapunk.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3 - 8\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2 - 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -4x^2 - y^2 + 4 = 0$$

Az első egyenletből $x = \frac{3}{8\lambda}$, illetve a második egyenletből $y = -\frac{1}{\lambda}$. Behelyettesítve a harmadik egyenletbe

$$4\left(\frac{3}{8\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 4$$

amiből $\lambda = \pm \frac{5}{8}$. Ebből $x = \pm \frac{3}{5}$, illetve $y = \mp \frac{8}{5}$.

Összegzés

Azt kaptuk, hogy a függvénynek lokális maximuma van $\left(\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ -ben, ahol a maximum értéke $f\left(\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right) = 5$.

Lokális minimum van $\left(-\frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right)$ -ben, ahol a minimum értéke $f\left(-\frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right) = -5$.

1.26. feladat

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

$$\varphi_1(x, y) = x = 0 \quad \varphi_2(x, y) = x - 2 = 0 \quad \varphi_3(x, y) = y = 0 \quad \varphi_4(x, y) = y - 3 = 0$$

Könnyen látható, hogy a feltételek által közrezárt tartomány

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2], y \in [0, 3] \right\}.$$

Első lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket $\text{int} D$ -ben! Ehhez $\nabla f = 0$ kell.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2 = 0$$

Ebből $x = y = 1$. Ekkor a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H < 0$, így $(0, 0)$ nyeregpont.

Második lépés

Keressük meg a lokális szélsőértékeket ∂D -ben!

1. A φ_1 feltétel mellett $f(x, y) = 2y$, aminek nincs szélsőértéke.
2. A φ_2 feltétel mellett $f(x, y) = 2x - 4$, aminek nincs szélsőértéke.
3. A φ_3 feltétel mellett $f(x, y) = x^2$. Ekkor $(0, 0)$ lokális minimumhely, ahol a minimum értéke $f(0, 0) = 0$.
4. A φ_4 feltétel mellett $f(x, y) = x^2 - 6x + 6$, aminek nincs szélsőértéke a megadott tartományon.

Harmadik lépés

Vizsgáljuk meg a φ_k feltételek végpontjait! Azt kapjuk, hogy a függvénynek lokális maximum van $(0, 3)$ -ban, ahol a maximum értéke $f(0, 3) = 6$. Lokális minimum van $(2, 3)$ -ban, ahol a minimum értéke $f(2, 3) = -2$.

Összegzés

Azt kaptuk, hogy a függvénynek lokális maximum van $(0, 3)$ -ban, ahol a maximum értéke $f(0, 3) = 6$. Lokális minimum van $(2, 3)$ -ban, ahol a minimum értéke $f(2, 3) = -2$.