

1. Csörgő 6. hét

1.1. feladat

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad x = \sin t \quad y = \cos t$$

Legyen

$$F(t) = \sin^2 t + \cos^2 t.$$

Vegyük észre, hogy $f(t) \equiv 1$, így $f'(t) \equiv 0$.

1.2. feladat

$$f(x, y) = x^2 \sin y \quad x = s^2 + t^2 \quad y = 2st$$

Legyen

$$F(s, t) = (s^2 + t^2)^2 \sin(2st).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 4s(s^2 + t^2) \sin(2st) + 2t(s^2 + t^2)^2 \cos(2st) \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 4t(s^2 + t^2) \sin(2st) + 2s(s^2 + t^2)^2 \cos(2st). \end{aligned}$$

1.3. feladat

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad x = st^2 \quad y = s^2 \sin t$$

Legyen

$$F(s, t) = (st^2)^2 + (s^2 \sin t)^2.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 2st^4 + 4s^3 \sin^2 t \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 4s^2 t^3 + s^4 \sin(2t). \end{aligned}$$

1.4. feladat

$$f(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y) = 4x^3 y^2 - x^4 y^2 - x^3 y^3$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3 = x^2 y^2 (12 - 4x - 3y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 = x^3 y (8 - 2x - 3y) = 0$$

Látható, hogy $x = 0$ esetén bármilyen y jó, illetve hasonlóan $y = 0$ esetén bármilyen x jó. Ezekre a pontokra a Hesse mátrixok szemidefinit mátrixok, ezért elemi megfontolásokkal fogjuk belátni, hogy ezek a pontok csak nyeregponatok. Amikor $x = 0$, vagy $y = 0$, akkor $f(x, y) = 0$. Mivel a függvény polinom, ezért folytonos is. Továbbá a szorzatalakból látszik, hogy a tengelyek környezetében pozitív, illetve negatív értékeket is felvesz a függvény, így a 0 nyilván nem lesz szélsőérték.

Legyen tehát $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Ekkor

$$12 - 4x - 3y = 0$$

$$8 - 2x - 3y = 0$$

amiből $x = 2$ és $y = \frac{4}{3}$. Ekkor a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 24xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 24x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 24x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 8x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{256}{3} & -\frac{64}{3} \\ -\frac{64}{3} & -32 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, így $(2, \frac{4}{3})$ lokális maximumhely. A maximum értéke $f(2, \frac{4}{3}) = \frac{256}{27}$.

1.5. feladat

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 2 = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = -\frac{4}{3}$ és $y = \frac{1}{3}$. Ekkor a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

1.6. feladat

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - \frac{8}{y^2} = 0$$

Az egyenleteket átalakítva

$$2x^3 + x^2y - 8 = 0$$

$$xy^2 + 2y^2 - 8 = 0.$$

A két egyenletet kivonva egymásból,

$$2x^3 - 2y^3 + x^2y - xy^2 = (x - y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0.$$

Láthatjuk, hogy $x = y$ vagy $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{16}{x^3} + 2 & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} + 2 \end{pmatrix}.$$

Első eset

Legyen $2x^2 + 3xy + y^2 = 0$. Mivel $y \neq 0$, így

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0.$$

Ennek az egyenletnek nyilván nincs valós megoldása.

Második eset

$x = y$ esetén

$$3x^3 - 8 = 0 \implies x = y = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}.$$

Ekkor

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right) = \frac{12}{\sqrt[3]{9}} + 8\sqrt[3]{3}$.

1.7. feladat

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$$

Az első egyenletből $y = x^2$, így a második egyenlet 3-al való osztás után

$$x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0$$

amiből $x = y = 0$ vagy $x = y = 1$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Első eset

$x = y = 0$ esetén $\det H < 0$, így $(0, 0)$ nyeregpont.

Második eset

$x = y = 1$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $(1, 1)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f(1, 1) = -1$.

1.8. feladat

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x = 0$$

Az első egyenletből $y = 3x^2$, így a második egyenlet 3-al való osztás után

$$x^4 - 27x = x(x^3 - 27) = 0$$

amiből $x = y = 0$ vagy $x = y = 3$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Első eset

$x = y = 0$ esetén $\det H < 0$, így $(0, 0)$ nyeregpont.

Második eset

$x = y = 3$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $(3, 3)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f(3, 3) = 0$.

1.9. feladat

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 3) = 0$$

Mivel a két zárójelet kifejezés nem lehet egyszerre nulla, azt kapjuk, hogy a megoldások $x = 0$ és $y = 0$ vagy $y = \pm 1$, illetve $x = \pm 1$ és $y = 0$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(8x^4 + 12x^2y^2 - 20x^2 - 6y^2 + 4) & 4xye^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 5) \\ 4xye^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 5) & e^{-x^2-y^2}(12y^4 + 8x^2y^2 - 30y^2 - 4x^2 + 6) \end{pmatrix}.$$

Első eset

$x = y = 0$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $(0, 0)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f(0, 0) = 0$.

Második eset

$x = 0$ és $y = \pm 1$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, így $(0, \pm 1)$ lokális maximumhelyek. A maximumok értéke $f(0, \pm 1) = \frac{3}{e}$.

Harmadik eset

$x = \pm 1$ és $y = 0$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H < 0$, így $(\pm 1, 0)$ nyeregpontok.

1.10. feladat

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 + 12$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2y = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = y = 0$. Ekkor a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H < 0$, így $(0, 0)$ nyeregpont.

1.11. feladat

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0$$

Az első egyenletből $y = x^3$, így a második egyenlet

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = 0.$$

Ebből $x = 0$, vagy $x = \pm 1$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Első eset

$x = y = 0$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H < 0$, így $(0, 0)$ nyeregpont.

Második eset

$x = y = 1$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $(1, 1)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f(1, 1) = -2$.

Harmadik eset

$x = y = -1$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $(-1, -1)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f(-1, -1) = -2$.

1.12. feladat

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4xy + 6x - y + 2$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 4y + 6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4x - 1 = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = -\frac{5}{2}$ és $y = -\frac{9}{4}$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right) = -\frac{35}{8}$.

1.13. feladat

$$f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 + 6xy + 5x$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 6y + 5 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y + 6x = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = -\frac{5}{2}$ és $y = \frac{5}{2}$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4}$.

1.14. feladat

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2y - 2x = 0$$

A két egyenletet kivonva egymásból, 4-el való osztás után,

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0.$$

Tehát $x = y$, vagy $x^2 + xy + y^2 = 0$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Első eset

$x = y$ esetén

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$$

tehát $x = y = 0$, $x = y = 1$ vagy $x = y = -1$.

1. $x = y = 0$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H = 0$, így további vizsgálat szükséges. Tudjuk, hogy $f(0, 0) = 0$. Ezen felül $x = y$ és $|x| < \sqrt{2}$ esetén $f(x, y) < 0$. Továbbá $x = -y$ esetén $f(x, -x) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $(0, 0)$ környezetében a függvény felvesz pozitív, illetve negatív értékeket is. Emiatt nyilván $(0, 0)$ nyeregpon.

2. $x = y = 1$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $(1, 1)$ lokális minimumhely. A minimum értéke $f(1, 1) = -2$.

3. $x = y = -1$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, így $(-1, -1)$ lokális minimumhely. A minum értéke $f(-1, -1) = -2$.

Második eset

$x^2 + xy + y^2 = 0$ esetén azonnal látjuk, hogy $x = y = 0$ jó lenne. Mivel ezt az esetet már lefedtük, feltehetjük, hogy $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Ekkor

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek nyilván nincs valós megoldása.

1.15. feladat

$$f(x, y) = y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétel, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 8y + 2x = 0$$

Az első egyenletből $2x = 2y$, így a második egyenlet

$$3y^2 - 6y = 3y(y - 2) = 0.$$

Tehát $x = y = 0$, vagy $x = y = 2$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6y - 8 \end{pmatrix}.$$

Első eset

$x = y = 0$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, így $(0, 0)$ lokális maximumhely. A maximum értéke $f(0, 0) = 0$.

Második eset

$x = y = 2$ esetén a Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H < 0$, így $(2, 2)$ nyeregpont.

1.16. feladat

Legyenek a téglatest élei a, b, c . Ekkor $4a + 4b + 4c = 48$, azaz $a + b + c = 12$. Ekkor $c = 12 - a - b$ miatt legyen a térfogat

$$V(a, b) = ab(12 - a - b).$$

A feladat az, hogy $V(a, b)$ maximumát keressük meg. Ehhez az kell, hogy $\nabla V = 0$ legyen.

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 12b - 2ab - b^2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = 12a - 2ab - a^2 = 0$$

A két egyenlet különbsége

$$a^2 - b^2 + 12b - 12a = (a - b)(a + b - 12) = 0.$$

Ekkor $a = b$, vagy $a + b - 12 = 0$. Mivel $a + b - 12 = -c$, így ezt a részt elvethetjük, hiszen c pozitív. Tehát $a = b$. Ekkor

$$12a - 3a^2 = a(12 - 3a) = 0.$$

Mivel $a = 0$ nem lehet, így $a = b = \frac{12}{3} = 4$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} -2b & 12 - 2a - 2b \\ 12 - 2b - 2a & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} < 0$, így $(8, 8)$ lokális maximumhely. Tehát a három él $a = b = c = 4$, a térfogat pedig $V(4, 4) = 64$.

1.17. feladat

Legyen a téglatest élei a, b, c úgy, hogy a felület $A = ab + 2bc + 2ac$. Tudjuk továbbá, hogy $abc = K$, azaz $c = \frac{K}{ab}$. Ekkor legyen a felület

$$A(a, b) = \frac{2K}{a} + \frac{2K}{b} + ab.$$

Ahhoz, hogy a függvénynek szélsőértéke legyen, az kell, hogy $\nabla A = 0$ legyen.

$$\frac{\partial A}{\partial a} = -\frac{2K}{a^2} + b = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = -\frac{2K}{b^2} + a = 0$$

Az első egyenletből $b = \frac{2K}{a^2}$. Ezt a másodikba helyettesítve kapjuk, hogy $a = b = \sqrt[3]{2K}$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{4K}{a^3} & 1 \\ 1 & \frac{4K}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 A}{\partial a^2} > 0$, így $(\sqrt[3]{2K}, \sqrt[3]{2K})$ lokális minimumhely. A fülke méretei ekkor $a = b = c = \sqrt[3]{2K}$.

1.18. feladat

Legyenek a trapéz élei a, b, c úgy, hogy $a + 2b + c = 400$. Ekkor $b = \frac{400-a-c}{2}$, amiből a trapéz magassága

$$m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{400-a-c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}.$$

Ekkor a terület

$$T(a, c) = \frac{a+c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{400-a-c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}.$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla T = 0$ legyen.

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \frac{(c-200)(3a+c-400)}{4\sqrt{(a-200)(c-200)}} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial c} = \frac{(a-200)(a+3c-400)}{4\sqrt{(a-200)(c-200)}} = 0$$

Mivel $a \neq 200$ és $c \neq 200$, azt kapjuk, hogy

$$3a + c - 400 = 0$$

$$a + 3c - 400 = 0$$

amiből $a = c = 100$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{(c-200)^2(3a+c-800)}{8((a-200)(c-200))^{\frac{3}{2}}} & \frac{3a+3c-800}{8\sqrt{(a-200)(c-200)}} \\ \frac{3a+3c-800}{8\sqrt{(a-200)(c-200)}} & \frac{(a-200)^2(-a+3c-800)}{8((a-200)(c-200))^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 T}{\partial a^2} < 0$, így $(100, 100)$ lokális maximumhely. Ekkor $a = b = c = 100$.

1.19. feladat

Legyen a három szám $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $a + b + c = 100$ és abc maximumát keressük. Mivel $c = 100 - a - b$, így legyen

$$f(a, b) = ab(100 - a - b).$$

A feladat az, hogy $f(a, b)$ maximumát keressük meg. Ehhez az kell, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 100b - 2ab - b^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 100a - 2ab - a^2 = 0$$

A két egyenlet különbsége

$$a^2 - b^2 + 100b - 100a = (a - b)(a + b - 100) = 0.$$

Ekkor $a = b$, vagy $a + b - 100 = 0$. Mivel $a + b - 100 = -c$, így ezt a részt elvethetjük, hiszen c pozitív. Tehát $a = b$. Ekkor

$$100a - 3a^2 = a(100 - 3a) = 0.$$

Mivel $a = 0$ nem lehet, így $a = b = \frac{100}{3}$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} -2b & 100 - 2a - 2b \\ 100 - 2b - 2a & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{200}{3} & -\frac{100}{3} \\ -\frac{100}{3} & -\frac{200}{3} \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} < 0$, így $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ lokális maximumhely. Tehát a három szám $a = b = c = \frac{100}{3}$.

1.20. feladat

A feladatot elvethetjük az előző feladat alapján. Mivel a három szám pozitív, az előző feladatban tárgyalt minimum az egyetlen szélsőértéke a függvénynek. Elemi megfontolásokkal is erre a konklúzióra juthatunk. Ugyanis a tetszőlegesen közel lehet nullához, így a szorzat is tetszőlegesen közel lehet a nullához, azonban sosem érheti el azt. Így a szorzatnak infimuma létezik, de minimuma nem.

1.21. feladat

Legyenek a fedél nélküli doboz oldalai a, b, c úgy, hogy a felület

$$ab + 2bc + 2ac = 1.2$$

legyen. Ekkor

$$c = \frac{1.2 - ab}{2a + 2b}$$

ahonnan a térfogat

$$V(a, b) = \frac{1.2ab - a^2b^2}{2a + 2b}.$$

A lokális szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\nabla V = 0$ legyen.

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{2.4b^2 - 2a^2b^2 - 4ab^3}{4(a+b)^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{2.4a^2 - 2a^2b^2 - 4a^3b}{4(a+b)^2} = 0$$

Ebből

$$2.4b^2 - 2a^2b^2 - 4ab^3 = 0$$

$$2.4a^2 - 2a^2b^2 - 4a^3b = 0.$$

Mivel $a \neq 0$ és $b \neq 0$, ezért az első egyenletet leoszthatjuk b^2 -el, a másodikat pedig a^2 -el, így

$$2.4 - 2a^2 - 4ab = 0$$

$$2.4 - 2b^2 - 4ab = 0.$$

A két egyenletet kivonva egymásból

$$2a^2 - 2b^2 = 2(a - b)(a + b) = 0.$$

Mivel $a + b \neq 0$, így $a = b$. Ekkor

$$2.4 - 6a^2 = 0 \implies a = b = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{-b^4 - 1.2b^2}{(a+b)^3} & \frac{-a^3b - 3a^2b^2 - ab^3 + 1.2ab}{(a+b)^3} \\ \frac{-a^3b - 3a^2b^2 - ab^3 + 1.2ab}{(a+b)^3} & \frac{-a^4 - 1.2a^2}{(a+b)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{10}}{20} \\ -\frac{\sqrt{10}}{20} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} < 0$, így $\left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ lokális maximum. A maximális térfogat $\frac{\sqrt{10}}{25}$.

1.22. feladat

Legyen a három szám a, b, c , melyekre $a + b + c = 18$. Kifejezve c -t, $c = 18 - a - b$. Ekkor a feladat, hogy a

$$f(a, b) = a^2b^3(18 - a - b) = 18a^2b^3 - a^3b^3 - a^2b^4$$

kifejezés maximumát keressük meg. Ehhez $\nabla f = 0$ kell.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 36ab^3 - 3a^2b^3 - 2ab^4 = ab^3(36 - 3a - 2b) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 54a^2b^2 - 3a^3b^2 - 4a^2b^3 = a^2b^2(54 - 3a - 4b) = 0$$

Látható, hogy $a = 0$ esetén bármilyen b jó, illetve hasonlóan $b = 0$ esetén bármilyen a jó. Ezekre a pontokra a Hesse mátrixok szemidefinit mátrixok, ezért elemi megfontolásokkal fogjuk belátni, hogy ezek a pontok csak nyeregponatok. Amikor $a = 0$, vagy $b = 0$, akkor $f(a, b) = 0$. Mivel a függvény polinom, ezért folytonos is. Továbbá a szorzatalakból látszik, hogy a tengelyek környezetében pozitív, illetve negatív értékeket is felvesz a függvény, így a 0 nyilván nem lesz szélsőérték.

Legyen tehát $a \neq 0$ és $b \neq 0$. Ekkor

$$36 - 3a - 2b = 0$$

$$54 - 3a - 4b = 0$$

amiből $a = 6$ és $b = 9$. A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2b^3(18 - 3a - b) & ab^2(108 - 9a - 8b) \\ ab^2(108 - 9a - 8b) & a^2b(108 - 6a - 12b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13122 & -8748 \\ -8748 & -11664 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det H > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} < 0$, így $(6, 9)$ lokális maximumhely.