

1. Csörgő 5. hét

1.1. feladat

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2y^2} \quad (3, 2)$$

$$f(3, 2) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2y^2}} \Big|_{(3,2)} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{\sqrt{x^2 - 2y^2}} \Big|_{(3,2)} = -4$$

Ebből a keresett sík egyenlete

$$S : \quad 3(x - 3) - 4(y - 2) - (z - 1) = 0.$$

1.2. feladat

$$f(x, y) = x^2y + 2y^2 \quad (2, 1)$$

$$f(2, 1) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Big|_{(2,1)} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + 4y) \Big|_{(2,1)} = 8$$

Ebből a keresett sík egyenlete

$$S : \quad 4(x - 2) + 8(y - 1) - (z - 4) = 0.$$

1.3. feladat

$$f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6 \quad (1, -1)$$

$$f(1, -1) = 9$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (10x - 2y + 5) \Big|_{(1,-1)} = 17$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (-2x + 6y) \Big|_{(1,-1)} = -8$$

Ebből a keresett sík egyenlete

$$S : \quad 17(x - 1) - 8(y + 1) - (z - 9) = 0.$$

1.4. feladat

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} \quad (1, 2)$$

$$f(1, 2) = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \Big|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \Big|_{(1,2)} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ebből a keresett sík egyenlete

$$S: \quad \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) - \frac{\sqrt{3}}{6}(x-2) - \left(z - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

1.5. feladat

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(xy) \quad \left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(2, \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(2x \ln(xy) + \frac{x^2 + y^2}{x}\right) \Big|_{\left(2, \frac{1}{2}\right)} = \frac{17}{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(2y \ln(xy) + \frac{x^2 + y^2}{y}\right) \Big|_{\left(2, \frac{1}{2}\right)} = \frac{17}{2}$$

Ebből a keresett sík egyenlete

$$S: \quad \frac{17}{8}(x-2) + \frac{17}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) - z = 0.$$

1.6. feladat

$$f(x, y) = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x \quad \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\operatorname{tg} y - \frac{y}{\cos^2 x}\right) \Big|_{\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x}{\cos^2 y} - \operatorname{tg} x\right) \Big|_{\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)} = \frac{\pi}{4} - 1$$

Ebből a keresett sík egyenlete

$$S: \quad \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)y - z = 0.$$

1.7. feladat

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5y + 3y - 5$$

Ahhoz, hogy az érintősík párhuzamos legyen az xy -síkkal, az kell, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - 5 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 6y + 3 = 0$$

egy kétismeretlenes egyenlet, melynek megoldása $(x, y) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$. Ekkor a keresett pont a felszínen

$$(x, y, f(x, y)) = \left(3, \frac{1}{2}, -\frac{47}{4}\right).$$

1.8. feladat

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 \quad (1, 1)$$

Az iránymenti deriváltakhoz szükségünk van a gradiensre. Mivel

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} = (3x^2 + 3y) \right|_{(1,1)} = 6$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} = (3x + 3y^2) \right|_{(1,1)} = 6$$

így

$$\nabla f(1, 1) = (6, 6).$$

1.8.1. (a)

A $v = (-2, 3)$ irányba mutató egységvektor $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$. Ekkor az iránymenti derivált

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

1.9. (b)

Az iránymenti derivált

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \nabla f(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos 330^\circ \\ \sin 330^\circ \end{pmatrix} = 3\sqrt{3} - 3.$$

1.10. (c)

A $v = (3, 4)$ irányba mutató egységvektor $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Ekkor az iránymenti derivált

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{42}{5}.$$