

1. Csörgő 4. hét

1.1. feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Sejthetjük, hogy a határérték nulla lesz. A definícióval bizonyítunk, tehát tegyük fel, hogy $|x|, |y| < \delta$. Ekkor

$$\left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy| < \delta^2$$

így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha $\delta < \sqrt{\varepsilon}$, akkor

$$\left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon.$$

Tehát valóban

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

1.2. feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{1}{x - y}$$

Könnyen láthatjuk, hogy a határérték nem létezik, hiszen attól függően, hogy x , illetve y $(2+)$ -ba, vagy $(2-)$ -ba tart, a határérték $\pm\infty$.

1.3. feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$$

Sejthetjük, hogy a határérték 4 lesz. A definícióval bizonyítunk, tehát tegyük fel, hogy $|x|, |y| < \delta$. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} - 4 \right| &= \left| \frac{x^2 + y^2 + 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 4}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \right| = \left| \frac{(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2)^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \right| = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2 < \sqrt{2\delta^2 + 4} - 2 \end{aligned}$$

így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha $\delta < \sqrt{\frac{(\varepsilon+2)^2 - 4}{2}}$, akkor

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Tehát valóban

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = 4.$$

1.4. feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

Sejthetjük, hogy a határérték $\frac{1}{2}$ lesz. A definícióval bizonyítunk, tehát tegyük fel, hogy $|x|, |y| < \delta$. Ekkor

$$\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-x^2 - y^2 - 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{2(x^2 + y^2)} \right| =$$

$$= \left| \frac{(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1)^2}{2(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{2(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{4} < \frac{\sqrt{2\delta^2 + 1} - 1}{4}$$

így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha $\delta < \sqrt{\frac{(4\varepsilon+1)^2-1}{2}}$, akkor

$$\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Tehát valóban

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

1.5. feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln 2$$

Feltehetően rossz a feladatsor, mert itt egyszerűen be lehet helyettesíteni.

1.6. feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Könnyen látható, hogy a határérték nem létezik, hiszen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow mx^2} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4(1 + m^2)} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Tehát különböző parabolákon tartva az origóba, különböző határértékeket kapunk.

1.7. feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y - x + y}{x^2 y + x + y}$$

Könnyen látható, hogy a határérték nem létezik, hiszen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y - x + y}{x^2 y + x + y} = -1$$

de

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y - x + y}{x^2 y + x + y} = 1.$$

Tehát különböző egyeneseken tartva az origóba, különböző határértékeket kapunk.

1.8. feladat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Könnyen látható, hogy a határérték nem létezik, hiszen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow x} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 1$$

de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow -x} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = -1.$$

Tehát különböző egyeneseken tartva az origóba, különböző határértékeket kapunk.

1.9. feladat

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & \text{ha } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x+y = 0 \end{cases}$$

A függvény nyilván nem folytonos, ha $x+y=0$, hiszen

$$\lim_{y \rightarrow -x} \frac{x-y}{x+y} = \infty.$$

Ha $x+y \neq 0$ akkor folytonos a függvény.

1.10. feladat

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A függvény nyilván nem folytonos, hiszen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow mx^3} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^6}{x^6(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Tehát különböző görbéken tartva az origóba, különböző határértékeket kapunk. Tehát a függvény mindenhol folytonos, kivéve az origót.

1.11. feladat

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sejthetjük, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

A definícióval bizonyítunk, tehát tegyük fel, hogy $|x|, |y| < \delta$. Továbbá tegyük fel, az általánosság megszorítása nélkül, hogy $|x| \leq |y|$. Ekkor

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{\frac{x^2}{y^2} + 1} < x^2 < \delta^2$$

így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha $\delta < \sqrt{\varepsilon}$, akkor

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon.$$

Tehát valóban

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Eszerint a függvény mindenhol folytonos.

1.12. feladat

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 5y - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -5x + 6y - 7$$

1.13. feladat

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}}$$

1.14. feladat

$$f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x + y) - xy}{(x + y)^2} = \frac{y^2}{(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x + y) - xy}{(x + y)^2} = \frac{x^2}{(x + y)^2}$$

1.15. feladat

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2 - 10xy}{2\sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-5x^2 + 4y^3}{2\sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}}$$

1.16. feladat

$$f(x, y) = e^{x^2y} - 2x^2y^3 \sin(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{x^2y} - 4xy^3 \sin(x + y) - 2x^2y^3 \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{x^2y} - 6x^2y^2 \sin(x + y) - 2x^2y^3 \cos(x + y)$$

1.17. feladat

$$f(x, y) = e^x \cos y - x \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y - \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y - \frac{x}{y}$$

1.18. feladat

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 - y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1-y}\right)^2} \cdot \frac{-1}{1-y} = \frac{y-1}{(1-y)^2 + (1-x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1-y}\right)^2} \cdot \frac{1-x}{(1-y)^2} = \frac{1-x}{(1-y)^2 + (1-x)^2}$$

1.19. feladat

$$f(x, y) = \frac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2e^{2x-3y}(2x-3y) - 2e^{2x-3y}}{(2x-3y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3e^{2x-3y}(2x-3y) + 3e^{2x-3y}}{(2x-3y)^2}$$

1.20. feladat

$$f(x, y) = \frac{x \operatorname{tg} x}{e^{xy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(\operatorname{tg} x + \sec^2 x)e^{xy} - xy \operatorname{tg} x e^{xy}}{e^{2xy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2 \operatorname{tg} x}{e^{xy}}$$

1.21. feladat

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \cdot \frac{-x}{2y} = -\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^2}{4y^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}} - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}} - \frac{x^2}{4y^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

Ebből látszik, hogy valóban

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$