

1. Csörgő 1. hét

1.1. feladat

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

Látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x \neq 0. \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy $f_n(x)$ pontonként konvergens a $[0, 2]$ és a $(0, 2]$ intervallumokban, viszont egyenletesen konvergens a $[\beta, 2]$ és a $(\beta, 2]$ intervallumokban. Ugyanis legyen

$$\frac{1}{1+nx} < \varepsilon \implies \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{x} < n.$$

Ekkor az első két esetben valóban nem tudjuk a küszöbindexet függetleníteni x -től, azonban a második két esetben

$$\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{x} \leq \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\beta}$$

így $n(\varepsilon) = n(\varepsilon, \beta)$ jó.

1.2. feladat

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } x \neq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy $f_n(x)$ pontonként konvergens a $[0, \infty)$ és a $(0, \infty)$ intervallumokban, viszont egyenletesen konvergens a $[\beta, \infty)$ intervallumban. Ugyanis legyen

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon \implies n^2x^2\varepsilon - nx + \varepsilon > 0 \implies n > \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2x\varepsilon}.$$

Ekkor az első két esetben valóban nem tudjuk a küszöbindexet függetleníteni x -től, azonban a harmadik esetben

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2x\varepsilon} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\beta\varepsilon}$$

így $n(\varepsilon) = n(\varepsilon, \beta)$ jó.

1.3. feladat

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$$

Látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = x^2.$$

A konvergencia pontonkénti, hiszen a

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2$$

függvény szigorúan monoton nő.

1.4. feladat

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

Látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

A konvergencia egyenletes, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} (x^n - x^{n+1}) = 0.$$

1.5. feladat

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$$

Látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

A konvergencia egyenletes, hiszen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0,1)} \frac{x}{(1+x)^n} = 0.$$

1.6. feladat

$$f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$$

Látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

A konvergencia pontonkénti, ugyanis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} n^2 x(1-x^2)^n = \infty.$$

1.7. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{e^{nx}}$$

Látható, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{e^{nx}} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}} = -x + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}} = -x + \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1.8. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{ne^{nx}}$$

Látható, hogy

$$n^2 f_n\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{e^x}$$

korlátos, hiszen $\frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}$. Mivel a változótranszformáció nem változtatja meg az értékkészletet, tudjuk, hogy

$$f_n(x) \leq \frac{1}{en^2}.$$

Ekkor a Weierstrass kritérium miatt teljesül az egyenletes konvergencia.

1.9. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

Látható, hogy

$$n^{\frac{3}{2}} f_n\left(\frac{x}{n^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{x}{1+x^2}$$

korlátos, hiszen $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$. Mivel a változótranszformáció nem változtatja meg az értékkészletet, tudjuk, hogy

$$f_n(x) \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ekkor a Weierstrass kritérium miatt teljesül az egyenletes konvergencia.

1.10. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

Látható, hogy

$$\frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ekkor a Weierstrass kritérium miatt teljesül az egyenletes konvergencia.

1.11. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$$

Látható, hogy

$$n^2 f_n\left(\frac{x}{n^2}\right) = \frac{x}{1+x^2}$$

korlátos, hiszen $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$. Mivel a változótranszformáció nem változtatja meg az értékkészletet, tudjuk, hogy

$$f_n(x) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Ekkor a Weierstrass kritérium miatt teljesül az egyenletes konvergencia.

1.12. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot n^2 2^n \right| = \frac{1}{2}$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 2$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 2)^n}{n^2 2^n}$$

konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = [-1, 3]$.

1.13. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)2^n}$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n2^{n+1}} \cdot (n-1)2^n \right| = \frac{1}{2}$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 2$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)2^n}$$

nem konvergens, de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n-1)2^n}$$

konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = [-2, 2)$.

1.14. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (x-5)^n$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} \right| = \frac{1}{3}$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 3$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\pm 3)^n}{3^n}$$

nem konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = (2, 8)$.

1.15. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

A gyökkritériumból

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right|} = 1$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 1$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (\pm 1)^n$$

nem konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = (-1, 1)$.

1.16. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

A gyökkritériumból

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right|} = 1$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 1$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n (\pm 1)^n$$

nem konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = (-1, 1)$.

1.17. feladat

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

1.17.1. $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

1.17.2. $x_0 = 2$

$$f(x) = \frac{1}{-1-(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n$$

1.17.3. $x_0 = -1$

$$f(x) = \frac{1}{2-(x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (x+1)^n$$

1.18. feladat

$$f(x) = \frac{3x}{1+x}$$

Láthatjuk, hogy

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{3(-1)^{n+1}n!}{(1+x_0)^{n+1}}.$$

1.18.1. $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3(-1)^{n+1} x^n$$

1.18.2. $x_0 = 2$

$$f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} (x-2)^n$$

1.18.3. $x_0 = -1$

$$f(x) = 3 - \frac{3}{x+1}$$

1.19. feladat

$$f(x) = \frac{2x}{3-x}$$

Láthatjuk, hogy

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{6n!}{(3-x_0)^{n+1}}.$$

1.19.1. $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} x^n$$

1.19.2. $x_0 = 2$

$$f(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} 6(x-2)^n$$

1.19.3. $x_0 = -1$

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4^{n+1}} x^n$$

1.20. feladat

$$f(x) = \frac{1}{3-2x}$$

1.20.1. $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{3-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} x^n$$

1.20.2. $x_0 = 2$

$$f(x) = \frac{1}{-1-2(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^n (x-2)^n$$

1.20.3. $x_0 = -1$

$$f(x) = \frac{1}{5-2(x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}} (x+1)^n$$

1.21. feladat

$$f(x) = \frac{x}{2+x}$$

Láthatjuk, hogy

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{2(-1)^{n+1}n!}{(2+x_0)^{n+1}}.$$

1.21.1. $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} x^n$$

1.21.2. $x_0 = 2$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} (x-2)^n$$

1.21.3. $x_0 = -1$

$$f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2(x+1)^n$$

1.22. feladat

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n}$$