

1. Csörgő 11. hét

1.1. feladat

$$y'' + 12y' + 45y = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 12\lambda + 45 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $-6 \pm 3i$. Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = e^{-6x} \cos(3x)$$

$$y_2 = e^{-6x} \sin(3x).$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 e^{-6x} \cos(3x) + c_2 e^{-6x} \sin(3x).$$

1.2. feladat

$$y'' - y = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

Az egyenlet gyökei ± 1 . Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = e^{-x}.$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

1.3. feladat

$$y'' + y = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $\pm i$. Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = \cos x$$

$$y_2 = \sin x.$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

1.4. feladat

$$y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

Az egyenlet gyöke háromszoros multiplicitással 1. Ekkor a három alapmegoldás

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = x e^x$$

$$y_3 = x^2 e^x.$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

1.5. feladat

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $1 \pm 2i$. Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = e^x \cos(2x)$$

$$y_2 = e^x \sin(2x).$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x).$$

1.6. feladat

$$y'' - 2y' - 8y = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $-2, 4$. Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = e^{-2x}$$

$$y_2 = e^{4x}.$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}.$$

1.7. feladat

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Az egyenlet gyöke kétszeres multiplicitással -2 . Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = e^{-2x}$$

$$y_2 = x e^{-2x}.$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

1.8. feladat

$$4y'' + 4y' + y = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0.$$

Az egyenlet gyöke kétszeres multiplicitással $-\frac{1}{2}$. Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_2 = x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

1.9. feladat

$$y^{(5)} - 8y''' + 16y' = 0$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^5 - 8\lambda^3 + 16\lambda = 0.$$

Az egyenlet gyöke kétszeres multiplicitással -2 , kétszeres multiplicitással 2 és 0 . Ekkor az öt alapmegoldás

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= e^{-2x} \\ y_3 &= xe^{-2x} \\ y_4 &= e^{2x} \\ y_5 &= xe^{2x}. \end{aligned}$$

Ekkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y = c_1 + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x} + c_4e^{2x} + c_5xe^{2x}.$$

1.10. feladat

$$y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$$

1.10.1. Homogén általános megoldás

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $-1, 2$. Ekkor a két alapmegoldás

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \\ y_2 &= e^{2x}. \end{aligned}$$

Ekkor differenciálegyenlet homogén általános megoldása

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}.$$

1.10.2. Állandók variálása

Legyen

$$y_p = \gamma_1e^{-x} + \gamma_2e^{2x}.$$

Ekkor tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$\begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^{3x} \end{pmatrix} = \frac{1}{3e^x} \begin{pmatrix} 2e^{2x} & -e^{2x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= -\frac{8}{3}e^{4x} \implies \gamma_1 = -\frac{2}{3}e^{4x} \\ \gamma_2' &= \frac{8}{3}e^x \implies \gamma_2 = \frac{8}{3}e^x. \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve

$$y_p = 2e^{3x}$$

így az inhomogén általános megoldás

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + 2e^{3x}.$$

1.10.3. Próbafüggvény

Legyen

$$y_p = Ae^{3x}.$$

Ekkor

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = 4Ae^{3x} = 8e^{3x} \implies A = 2.$$

Az inhomogén általános megoldás

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + 2e^{3x}.$$

1.11. feladat

$$y'' + y' - 6y = x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -\frac{1}{9}$$

1.11.1. Homogén általános megoldás

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $-3, 2$. Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = e^{-3x}$$

$$y_2 = e^{2x}.$$

Ekkor differenciálegyenlet homogén általános megoldása

$$y_h = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}.$$

1.11.2. Próbafüggvény

Legyen

$$y_p = Ax + B.$$

Ekkor

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = -6Ax + A - 6B = x \implies A = -\frac{1}{6} \quad B = -\frac{1}{36}.$$

Az inhomogén általános megoldás

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}.$$

1.11.3. Kezdetiértékek

Az $y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{9}$ kezdetiértékek mellett $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{36}$.

1.12. feladat

$$y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23 \quad y(0) = \frac{3}{2} \quad y'(0) = 0$$

1.12.1. Homogén általános megoldás

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $-3 \pm 5i$. Ekkor a két alapmegoldás

$$y_1 = e^{-3x} \cos(5x)$$

$$y_2 = e^{-3x} \sin(5x).$$

Ekkor differenciálegyenlet homogén általános megoldása

$$y_h = c_1e^{-3x} \cos(5x) + c_2e^{-3x} \sin(5x).$$

1.12.2. Próbafüggvény

Legyen

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Ekkor

$$y_p'' + 6y_p' + 34y_p = 34Ax^2 + (12A + 34B)x + 2A + 6B + 34C = 17x^2 - 62x + 23$$

amiből

$$A = \frac{1}{2} \quad B = -2 \quad C = 1.$$

Az inhomogén általános megoldás

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-3x} \cos(5x) + c_2 e^{-3x} \sin(5x) + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

1.13. feladat

$$y'' + 2y' + y = \sin x \quad y(0) = \frac{3}{2} \quad y'(0) = 0$$

1.13.1. Homogén általános megoldás

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Az egyenlet gyöke kétszeres multiplicitással -1 . Ekkor a két alapsmegoldás

$$y_1 = e^{-x}$$

$$y_2 = xe^{-x}.$$

Ekkor differenciálegyenlet homogén általános megoldása

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

1.13.2. Próbafüggvény

Legyen

$$y_p = A \sin x + B \cos x.$$

Ekkor

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 2A \cos x - 2B \sin x = \sin x \implies A = 0 \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Az inhomogén általános megoldás

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x$$

1.13.3. Kezdetiértékek

Az $y(0) = \frac{3}{2}, y'(0) = 0$ kezdetiértékek mellett $c_1 = 2, c_2 = 2$.

1.14. feladat

$$y'' - y = e^x(2x + 3) \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 4$$

1.14.1. Homogén általános megoldás

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Az egyenlet gyökei ± 1 . Ekkor a két alapmegoldás

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \\ y_2 &= e^x. \end{aligned}$$

Ekkor differenciálegyenlet homogén általános megoldása

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^x.$$

1.14.2. Próbafüggvény

Legyen

$$y_p = x e^x (Ax + B).$$

Ekkor

$$y_p'' - y_p = e^x (4Ax + 2A + 2B) = e^x (2x + 3) \implies A = \frac{1}{2} \quad B = 1.$$

Az inhomogén általános megoldás

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + x e^x.$$

1.14.3. Kezdetiértékek

Az $y(0) = 1, y'(0) = 4$ kezdetiértékek mellett $c_1 = -1, c_2 = 2$.

1.15. feladat

$$y'' + y' - 20y = -18x e^{-5x}$$

1.15.1. Homogén általános megoldás

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + \lambda - 20 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $-5, 4$. Ekkor a két alapmegoldás

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-5x} \\ y_2 &= e^{4x}. \end{aligned}$$

Ekkor differenciálegyenlet homogén általános megoldása

$$y_h = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{4x}.$$

1.15.2. Állandók variálása

Legyen

$$y_p = \gamma_1 e^{-5x} + \gamma_2 e^{4x}.$$

Ekkor tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18x e^{-5x} \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-5x} & e^{4x} \\ -5e^{-5x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -18xe^{-5x} \end{pmatrix} = \frac{1}{9e^{-x}} \begin{pmatrix} 4e^{4x} & -e^{4x} \\ 5e^{-5x} & e^{-5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -18xe^{-5x} \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$\begin{aligned} \gamma'_1 = 2x &\implies \gamma_1 = x^2 \\ \gamma'_2 = -2xe^{-9x} &\implies \gamma_2 = \frac{2}{81}e^{-9x}(9x+1). \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve

$$y_p = x^2e^{-5x} + \frac{2}{81}e^{-5x}(9x+1)$$

így az inhomogén általános megoldás

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-5x} + c_2e^{4x} + e^{-5x}\left(x^2 + \frac{2}{9}x\right).$$