Kétváltozós függvény szélsőértéke

Sütő Andrea

Kétváltozós függvény szélsőértéke

Legyen adott $f(x, y)$ kétváltozós függvény és ez legyen folytonosan totálisan differenciálható, azaz létezzenek az elsőrendű parciális deriváltjai és legyenek folytonosak. A $z = f(x, y)$ egy felület. A függvénynek helyi maximuma van az (x_0, y_0) pontban, ha az (x_0, y_0) helynek van olyan környezete, hogy abban minden (x, y) helyre fennáll az

$$f(x, y) - f(x_{0,} y_0) < 0$$

Egyenlőtlenség. A $z = f(x, y)$ felületen az (x_0, y_0, z_0) pont magasabban van, mint a környezet tetszőleges pontja. A helyi minimumra

$$f(x, y) - f(x_{0,} y_0) > 0$$

Egyenlőtlenség teljesül. Most a $z = f(x, y)$ felületen az (x_0, y_0, z_0) pont alacsonyabban van, mint a környezet tetszőleges pontja, azaz z_0 kisebb mint a környezet z értékei.

Kétváltozós esetben a szélsőérték helyen áthaladó valamennyi az (x, y) síkra merőleges síknak és a felületnek a metszetgörbéjén relatív szélsőérték van. Az egyes metszetgörbék (x_0, y_0, z_0) pontbeli értintője tehát a felület illő pontbeli érintősíkja párhuzamos az (x, y) síkkal. A **szélsőérték létezésének szükséges feltétele** az elsőrendű parciális deriváltak eltűnése, tehát

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$
$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Ebből az egyenletrendszerből kell az x_0 és y_0 ismeretlent kiszámítani. A feltétel szükséges, de nem elégséges. Megmutatjuk egy egyszerű példán, hogy a parciális deriváltak zérus volta nem elegendő a szélsőérték létezéséhez.

Tekintsük az $f(x, y) = (x - y)(x - 2y) = 2y^2 - 3xy + x^2$ függvényt. Erre az

$$f(0,0) = -3y + 2x\,|_{(0,0)} = 0$$
$$f(0,0) = 4y - 3x\,|_{(0,0)} = 0$$

Szükséges feltétel teljesül a $(0,0)$ pontban. Ha megvizsgáljuk az f függvény előjelét az origó környezetében, azt látjuk, hogy a függvény mind pozitív, mind negatív értéket felvesz, ezért nincs szélsőértéke az origóban.

A szélsőérték létezésének elégséges feltételének megállapításához vezessük be a következő jelölést: legyenek a függvénynek folytonos másodrendű deriváltjai az *** környezetében, ekkor

$$f_{\min} = f(-2,1) = 0$$

A felület (x_0, y_0) - pontját elliptikusnak nevezzük, ha $D(x_0, y_0) > 0$, parabolikusnak nevezzük, ha $D(x_0, y_0) = 0$, hiperbolikusnak nevezzük, ha $D(x_0, y_0) < 0$.

Tekintsük az f függvény másodfokú Taylor- polinomját, azaz

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[f'x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'y(x_0,y_0)(y-y_0) \right] +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''xx(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f''xy(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''yy(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right]$$

A szükséges feltétel miatt $f'x(x_0,y_0)=0$, $f'y(x_0,y_0)=0$, így az (x_0,y_0) pont környezetében

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx$$
$$\approx \frac{1}{2!}\left[f''xx(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f''xy(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''yy(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right]$$

Alakítsuk át ezt a kifejezést, szorozzuk és osszuk $f''xx(x_0,y_0) \neq 0-$nal és alakítsunk teljes négyzetté:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$
$$\frac{1}{2f''xx(x_0,y_0)}\Big[\; f''xx^2(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''xy(x_0,y_0)f''xx(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$
$$+f''xy^2(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + f''xx(x_0,y_0)f''yy(x_0,y_0)(y-y_0)^2 - f''xy^2(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + R_3 \Big] =$$
$$= \frac{1}{2f''xx(x_0,y_0)}\Big[\; \left[f''xx(x_0,y_0)(x-x_0) - f''xy(x_0,y_0)(y-y_0) \right]^2 + D(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + R_3 \Big]$$

Itt R_3 harmadfokon tartalmazza $(x-x_0)$- és $(y-y_0)$ mennyiségeket, míg az előtte lévő kifejezés csak másodfokon. Tehát ha $(x-x_0)$ és $(y-y_0)$ abszolút értékben elég kicsi, akkor $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ előjelének eldöntésénél R_3 elhanyagolható az előtte lévő kifejezés mellett. Most mivel

$$\left[\; f''xx(x_0,y_0)(x-x_0) - f''xy(x_0,y_0)(y-y_0) \;\right]^2 D(x_0,y_0)(y-y_0)^2 > 0$$

Ha $D(x_0,y_0) > 0$. Ekkor $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ eljelét $f''xx(x_0,y_0)$ előjele dönti el.
A következő esetekben fordulhat elő:
Ha $D(x_0,y_0) > 0$ és $f''xx(x_0,y_0) < 0,$,akkor $f(x,y)-f(x_0,y_0) < 0,$, tehát helyi maximum,
$f''xx(x_0,y_0) > 0,$ akkor $f(x,y)-f(x_0,y_0) > 0,$ tehát helyi minimum,

Ha $D(x_0, y_0) < 0,$ akkor nincs szélsőérték, hanem nyeregpont van,
Ha $D(x_0, y_0) = 0,$ akkor csak további vizsgálatokkal lehet eldönteni, hogy van-e szélsőérték, vagy nincs.

Összefoglalva:
A $z = f(x, y)$ függvény szélsőértékének szükséges feltétele, hogy egy (x_0, y_0) helyen $f'x = 0$ és $f'y = 0$. Az egyenletrendszer megoldásait, a lehetséges szélsőérték helyeket, stacionárius pontnak nevezzük.

Elégséges feltétel, ha ezen kívül még a stacionárius pontokban (a stacionárius pontban) $f''xx f''yy - (f''xy)^2 > 0$ .Ekkor , ha $f''xx > 0$,akkor ott minimum, ha pedig $f''xx < 0$, akkor maximum van.

Megoldási menet egyszerűen- segédlet

1)
Adott $f(x, y)$ kétváltozós függvény

$$\left.\begin{aligned} f'x &= .... = 0 \\ f'y &= .... = 0 \end{aligned}\right\} \text{ lehetséges szélsőérték}$$

$p_1(..,..)$
$p_2(..,..)$
$p_3(..,..)$

2)
$f''xx = ...$
$f''xy = ...$
$f''yy = ...$

3)

$$D = \begin{pmatrix} f''xx & f''xy \\ f''yx & f''yy \end{pmatrix} = ...$$

Ha $D(p_1) = ... > 0$ akkor szélsőérték
Ha $D(p_1) = ... < 0$ akkor nem szélsőérték!

Vagy

$$D = f''xx \cdot f''yy - (f''xy)^2 = \ldots.$$

4)
$f''xx(p_1) = ...$ $\quad > 0 \min$
$\quad < 0 \max$

---

5)

$f(p_1) = ...$

4.23. Példa

Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x,y) = 3(x+2)^2 + 4(y-1)^2$ függvénynek hol lehe szélsőértéke, van-e a lehetséges helye(ke)n szélsőértéke, és milyen ez a szélsőérték, ha létezik!

Meghatározzuk az elsőrendű parciális deriváltakat:

$f'_x(x,y) = 6(x+2)$

$f'_y(x,y) = 8(y-1)$

És megoldjuk az $f'_x = 0$ és $f'_y = 0$ egyenletrendszert:

$6(x+2) = 0$

$8(y-1) = 0$

Megoldásként $x = -2, y = 1$ dódik, azaz $P_0(-2,1)$ lehetséges szélsőérték helyet kapjuk, ez a stacionárius pont. Meghatározzuk a másodrendű parciális deriváltakat:

$f''_{xx}(x,y) = 6$

$f''_{xy}(x,y) = 0$

$f''_{yy}(x,y) = 8$

Mivel a másodrendű parciális deriváltak konstansok, így a P_0 Helyen felvett értékei is ugyanezek a konstansok.

Megvizsgáljuk $D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ előjelét a P_0 Pontban $D(-2,1) = f''_{xx}(-2,1) \cdot f''_{yy}(-2,1) - (f''_{xy}(-2,1))^2 = 48 > 0,$ ezért megállapíthatjuk, hogy ebben a pontban van szélsőértéke. Mivel $f''_{xx}(-2,1) = 6 > 0,$ ezért f -nek minimuma van. A minimumérték a függvényérték: $f_{\min} = f(-2,1) = 0$

(Vadászné Dr. Bognár Gabriella – Matematika Informatikusok és műszakiak részére II.)

FELADAT

Hol és milyen szélsőértéke van $f(x,y) = 2x^2y + 2xy - 3y^2$ **?**

Szükséges feltétel: $\begin{matrix} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{matrix} \rightarrow$

$$f'x = 4xy + 2y$$
$$f'y = 2x^2 + 2x - 6y \rightarrow \qquad y = \frac{2x^2 + 2x}{6} = \frac{x^2 + x}{3}$$

$$4x\frac{x^2 + x}{3} + 2\frac{x^2 + x}{3} = 0$$
$$\frac{x^2 + x}{3} \cdot (4x + 2) = 0$$

a)
$$x^2 + x = 0$$
$$x(x + 1) = 0$$
$$x_1 = 0; x_2 = -1$$
$$y_1 = 0; y_2 = 0$$

b.)

$$4x + 2 = 0$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}$$
$$y_3 = -\frac{1}{12}$$

Tehát a lehetséges szélsőértékek : $p_1(0,0)$, $p_2(-1,0)$, $p_3(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12})$

$$f''xx = 4y$$
$$f''xy = 4x + 2$$
$$f''yy = -6$$

	$p_1(0,0)$	$p_2(-1,0)$	$p_3(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12})$
$f''xx = 4y$	0	0	$-\frac{1}{3}$
$f''yy = -6$	-6	-6	-6
$f''xy = 4x + 2$	2	-2	0
Determináns	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = -4$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = -4$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = 2$
Szélsőérték	Nem	Nem	Szélsőérték

$f''xx(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}) = -\frac{1}{3} < 0,$ tehát maximum hely!

$$f_{\max} = f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{48}$$

Felhasznált irodalom:

Dr. Körtesi Péter – Matematika II. előadás sorozat
Dr. Árvai-Homolya Szilvia – Matematika II. gyakorlati anyag
Vadászné Dr. Bognár Gabriella – Matematika Informatikusok és Műszakiak részére II.