1. Várdai 1. hét

1.1. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5x^n}{n^2}$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{5}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{5} \right| = 1$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 1$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2} = \frac{5\pi^2}{6}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot (-1)^n}{n^2}$$

Leibniz típusú sor, tehát konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = [-1, 1]$.

1.2. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$$

A gyökkritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{5^n} \right|} = \frac{1}{5}$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 5$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 5)^n}{5^n}$$

nyilván nem konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = (-5, 5)$.

1.3. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n}$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n} \right| = \frac{1}{4}$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 4$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\pm 4)^n}{4^n}$$

nyilván nem konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = (-4, 4)$.

1.4. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

A hányadosrkritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = 1$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 1$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\pm 1)^n$$

nyilván nem konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = (-1, 1)$.

1.5. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! \right| = 0$$

így a konvergenciasugár $\varrho = \infty$. Emiatt $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

1.6. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \infty$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 0$. Emiatt $\mathcal{H} = \{0\}$.

1.7. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

A gyökkritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

így a konvergenciasugár $\frac{1}{e}$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{\pm 1}{e}\right)^n$$

nyilván nem konvergens (a divergencia-teszt miatt). Emiatt $\mathcal{H} = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

1.8. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x+2)^n$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} \right| = 2$$

így a konvergenciasugár $\varrho = \frac{1}{2}$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

nyilván nem konvergens, de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

Leibniz típusú sor, tehát konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = \left[\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}\right)$.

1.9. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n}$$

A hányadoskritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot n \right| = 1$$

így a konvergenciasugár $\varrho = 1$. Továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

nyilván nem konvergens, de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Leibniz típusú sor, tehát konvergens. Emiatt $\mathcal{H} = [3, 5)$.

1.10. feladat

$$f(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

1.11. feladat

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-x)^n$$

1.12. feladat

$$f(x) = \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

(Taylor-sor)

1.13. feladat

$$f(x) = \frac{x}{4-x} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

1.14. feladat

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

1.15. feladat

$$f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$$

Tudjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-4x^2)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^{2n}.$$

Ekkor

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^{2n} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int (2x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{2n+1}.$$

1.16. feladat

$$f(x) = \operatorname{sh}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

1.17. feladat

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$$

1.18. feladat

$$f(x) = \sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

1.19. feladat

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Tudjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Ekkor

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = 2\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right) \mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \int x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}.$$

1.20. feladat

$$f(x) = x^2 e^x = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$$

1.21. feladat

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos(2x)} = \sqrt{2\cos^2 x} = \sqrt{2}\left|\cos x\right| = \sqrt{2}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right|$$

Abszolútérték jel nélkül csak $x \in \left(\frac{-1}{2}\pi + 2k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi\right)$ intervallumokra helyes a sor, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

1.22. feladat

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

A binomiális sor szerint

$$\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} - k\right)}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!} x^{2n}.$$

1.23. feladat

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Tudjuk, hogy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Ekkor

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

1.24. feladat

$$f(x) = \arcsin x$$

Tudjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ekkor a binomiális sor szerint kifejtve

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Ekkor

$$f(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$