13. Számítsuk ki $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ közelítő értékét 5 tizedes pontossággal.

Megoldás. Használjuk fel e^{-x} hatványsorát:

$$\frac{1}{\sqrt[10]{e}} = e^{-0,1} = 1 - \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} - \frac{0,1^3}{3!} + \ldots \, .$$

Vegyük a sor első $n + 1$ tagját. Ekkor a (9) maradéktag: $R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} 0,1^{n+1}$, ahol ξ értéke 0 és 0,1 között van. Használjuk az $R_n \le \frac{2}{(n+1)!} 0,1^{n+1}$ becslést. Ha ez kisebb mint $5 \cdot 10^{-6}$, akkor a közelítő érték megfelelő. Próbálkozással azt kapjuk, hogy ez $n = 4$ -re már teljesül. Tehát

$$\frac{1}{\sqrt[10]{e}} \approx 1 - \frac{0,1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} - \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{4!} = 0,90484 \cdot$$

3. Feladatok

Számítsa ki az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát, majd vizsgálja meg, hogy a sorok a konvergenciaintervallum végpontjaiban konvergensek-e.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5x^n}{n^2}$; **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^n}{4^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$; **5.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$; **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$; **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x+2)^n$; **9.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n}$;

Fejtse x hatványai szerint haladó hatványsorba az alábbi függvényeket:

10. $f(x) = \frac{1}{1-0,5x}$; **11.** $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$; **12.** $f(x) = \ln(1-x)$;

13. $f(x) = \frac{x}{4-x}$; **14.** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; **15.** $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$;

16. $f(x) = \operatorname{sh} 2x$; **17.** $f(x) = \sin^2 x$; **18.** $f(x) = \sin x^2$;

19. $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$; **20.** $f(x) = x^2 e^x$; **21.** $f(x) = \sqrt{1+\cos 2x}$;

22. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; **23.** $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; **24.** $f(x) = \arcsin x$.

Fejtse Taylor-sorba a következő függvényeket a megadott helyen: