HATÁRÉRTÉKSZÁMÍTÁSI FOGÁSOK KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEKRE

(Összeállította: Csörgő István, 2009.)

Ebben az iratban olyan fogásokat ismertetünk, melyeket jól hasznosíthatunk a kétváltozós függvények határértékének kiszámításánál. A jegyzettel összhangban csak véges helyen vett véges határértékekkel foglalkozunk.

A feladat a következő:

Adott az f $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvény, továbbá a $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont, melyről feltesszük, hogy az f értelmezési tartományának (D_f-nek) torlódási pontja.

Kérdés, hogy létezik-e a

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

véges határérték, és ha igen, akkor mennyi.

1. (*konstansfüggvény*) A konstansfüggvény határértéke minden pontban a helyettesítési érték. Ez a határérték definíciójából azonnal következik (ε-hoz bármely $\delta > 0$ jó). Tehát a konstansfüggvények folytonosak.

2. *(Lipschitz-típusú becslés)* Azt, hogy $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f = L$ sokszor így bizonyítjuk:

   Az $|f(x,y) - L|$ eltérést felülről becsüljük a változók $||(x,y) - (x_0,y_0)||$ eltérésének valamely 0-hoz tartó függvényével, pl. $||(x,y) - (x_0,y_0)||$ konstansszorosával (ld. jegyzet 24. oldal, Lipschitz-folytonosság), azaz bebizonyítjuk, hogy

   $$|f(x,y) - L| \le K \cdot ||(x,y) - (x_0,y_0)||.$$

   A becslés során sokszor felhasználjuk az alábbi észrevételt:

   $$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2: \quad |a| \le ||(a,b)|| \quad \text{és} \quad |b| \le ||(a,b)||, \tag{1.1}$$

   melyek egyszerűen igazolhatók. Például az első:

   $$|a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} = ||(a,b)||.$$

   Az egyenlőtlenségek geometriai tartalma az, hogy a derékszögű háromszög befogóinak hossza legfeljebb akkora, mint az átfogóé.

$\boxed{\text{Példa:}}$

Vegyük az x-tengelyre való merőleges vetítést:

$$f(x,y) = x \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Tetszőleges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban a határérték x_0, ugyanis:

$$|f(x,y) - x_0| = |x - x_0| \leq ||(x - x_0,\, y - y_0)|| = ||(x,y) - (x_0, y_0)||,$$

tehát teljesül a Lipschitz-típusú becslés a $K = 1$ konstanssal.

Az x-tengelyre való merőleges vetítés tehát folytonos függvény. Hasonlóan igazolható, hogy az y-tengelyre való merőleges vetítés is folytonos.

$\boxed{\text{Példa:}}$ (Kissé bonyolultabb az előzőnél.)

$$\lim_{(x,y)\to(0;\,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

ugyanis:

$$\left| \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3 - xy^2|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |x| \cdot |y|^2}{x^2 + y^2} \leq$$

$$\leq \frac{||(x,y)||^3 + ||(x,y)|| \cdot ||(x,y)||^2}{||(x,y)||^2} = \frac{2 \cdot ||(x,y)||^3}{||(x,y)||^2} = 2 \cdot ||(x,y)|| =$$

$$= 2 \cdot ||(x,y) - (0;\, 0)||.$$

Az első becslést a háromszög-egyenlőtlenség, a másodikat pedig a (1.1) egyenlőtlenség alapján végeztük.

3. *(felépítés)* A határérték és az algebrai műveletek kapcsolatát kifejező szabályok (összeg, szorzat, hányados határértéke) alkalmazásával egyszerűbb függvényekből bonyolultabbakat építhetünk fel. Nem alkalmazható a módszer, ha f egy olyan törtfüggvény, melynek számlálója is és nevezője is 0-hoz tart ($\frac{0}{0}$ típusú határérték).

4. *(folytonosság)* Ha az f függvény a vizsgált (x_0, y_0) helyen folytonos (pl. folytonos alapfüggvényekből épül fel folytonosságtartó műveletekkel:

összeg, szorzat, hányados, kompozíció), akkor határértéke nyilvánvalóan a helyettesítési értékkel egyenlő.

Példa:

Az $f(x,y) = \dfrac{2x+3y+7}{x^2-5y}$ függvény az alábbi módon épül fel folytonos alapfüggvényekből:

$$f = \frac{g_1 \cdot g_2 + g_3 \cdot g_4 + g_5}{g_2 \cdot g_2 + g_6 \cdot g_4},$$

ahol

$$\begin{array}{ccc} g_1(x,y) = 2, & g_2(x,y) = x, & g_3(x,y) = 3, \\ g_4(x,y) = y, & g_5(x,y) = 7, & g_6(x,y) = -5, \end{array}$$

ezért

$$\lim_{(x,y)\to(3;\,2)} f(x,y) = f(3;\,2) = -19.$$

5. *(az értelmezési tartomány felosztása)* Az egyváltozós függvények bal és jobb oldali határértékének kétváltozós megfelelőjeként alkalmazható az alábbi eljárás:

   Az f értelmezési tartományát felosztjuk két halmaz uniójára:

$$D_f = A \cup B$$

   úgy, hogy az (x_0, y_0) pont mindkét résznek torlódási pontja legyen. Jelölje g az f függvény A-ra, h pedig a B-re való leszűkítését.

   Ha

$$\lim_{(x_0,y_0)} g = \lim_{(x_0,y_0)} h = L,$$

   akkor $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f = L$.

Példa:

Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\lim_{(x,y)\to(0;\,0)} \frac{\sin xy}{y} =?$$

Szeretnénk a törtet x-szel bővíteni, hogy alkalmazhassuk az egyváltozós

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

nevezetes határértéket. Ehhez azonban fel kell tennünk, hogy $x \neq 0$, azaz az y-tengely pontjait másképpen kell kezelnünk.

Legyen tehát A az értelmezési tartománynak az y-tengelyen kívüli része, B pedig az értelmezési tartománynak az y-tengelyre eső része, azaz:

$$A = \{(x,y) \mid x \neq 0,\ y \neq 0\}, \qquad B = \{(0,y) \mid y \neq 0\}.$$

Nyilvánvalóan $D_f = A \cup B$. Jelölje g az f A-ra, h pedig a B-re való leszűkítését. Ekkor – mivel $(x,y) \in A$ esetén $x \neq 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{\sin xy}{xy} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Felhasználtuk, hogy $(x,y) \to (0,0)$ esetén $x \cdot y \to 0 \cdot 0 = 0$.

Másrészt:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin 0y}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0.$$

A két határérték megegyezik, tehát

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Nyilvánvalóan alkalmazható az eljárás abban az esetben is, ha D_f-et több, de véges számú halmaz uniójára bontjuk. Végtelen számú halmaz uniójára való felbontás azonban általában nem vezet helyes eredményre, erre a következő pontban mutatunk példát.

6. *(a kétféle tartás módszere)* Végül egy gyakran használt „trükk”, amely annak megmutatására alkalmas, hogy nincs határérték. Alapja az az észrevétel, hogy ha egy függvénynek egy pontban van határértéke, akkor „bármilyen módon” tartva a ponthoz, ezt a határértéket kell kapnunk.

   Ha tehát találunk két olyan „tartási módot” az (x_0, y_0) pontba, hogy a függvényértékek nem ugyanoda tartanak, akkor a függvénynek ebben a pontban nincs határértéke. A „tartási mód” azt jelenti, hogy az (x_0, y_0) ponthoz való közeledéskor nem lépünk ki egy előre megadott halmazból. Pl. közeledhetünk az adott pontba egyenesek, félegyenesek, parabolaívek, vagy egyéb más halmazok mentén.

$\boxed{\text{Példa:}}$

Vegyük az alábbi feladatot:

$$\lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{xy}{x-y} =?$$

A függvény értelmezési tartománya az $y = x$ egyenestől megfosztott sík. Közeledjünk az origóba az $y = mx$ egyenes mentén, ahol $m \neq 1$ tetszőlegesen rögzített valós szám (az egyenes meredeksége):

$$f(x, mx) = \frac{xmx}{x - mx} = \frac{mx}{1-m} \to 0 \qquad (x \to 0),$$

továbbá az y-tengely mentén

$$f(0, y) = \frac{0y}{0-y} = 0 \to 0 \qquad (x \to 0).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a függvény minden egyenes mentén 0-hoz tart. Azonban közeledjünk az origóba az $y = \dfrac{x}{x+1}$ hiperbola mentén:

$$f(x, \frac{x}{x+1}) = \frac{x \cdot \dfrac{x}{x+1}}{x - \dfrac{x}{x+1}} = \frac{\dfrac{x^2}{x+1}}{\dfrac{x^2+x-x}{x+1}} = 1 \to 1.$$

Tehát találtunk kétféle $(0, 0)$-ba tartási módot (egyenes mentén és hiperbola mentén) úgy, hogy a függvényértékek nem ugyanoda tartanak. Ezért a keresett határérték nem létezik.

Megjegyzés: A vizsgált végtelen sok egyenes uniója kiadja az értelmezési tartományt, a függvény bármelyikükre való leszűkítése ugyanoda tart (a 0-hoz), mégsincs határérték. Ez bizonyítja azt, amit az előző pont végén megjegyeztünk, vagyis azt, hogy az előző pontban leírt módszer nem működik végtelen sok halmazra való felbontás esetén.