

HF46 Jelölje R az xy síkon az egységgör I. síknegyedbe eső részét.

$$\iint_R \sin(x^2 + y^2) d(x, y) = ?$$

HF47 Határozzuk meg az alábbi kettős integrált

$$\iint_R (x^2 + y^2) d(x, y),$$

ahol R az a tartomány, melyet az $r = \theta$ és $r = 2\theta$ spirálok fognak közre, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

HF48 Jelölje T az xy síknak az alábbi tartományait:

- a) az origó középpontú, 2 sugarú zárt körlemez;
- b) a $(2, 0)$ középpontú, 2 sugarú zárt körlemez;
- c) a $(0, 2)$ középpontú, 2 sugarú zárt körlemez.

Számítsuk ki mindhárom esetben annak a hengerszerű testnek a térfogatát, amelyet a $z = x^2 + y^2$ felület, az xy sík fent megadott T tartománya, továbbá a T határgörbéjére állított, z -tengellyel párhuzamos alkotók határolnak.

HF49 Jelölje T azt a síkbeli tartományt, melyet az $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ kör, valamint az $y = \sqrt{3}x$ és az $x = \sqrt{3}y$ egyenesek határolnak.

- a) Számítsuk ki kettős integrállal a T tartomány területét;
 - b) Ellenőrizzük az eredményt elemi úton (a tartomány két körszelet különbsége);
-

HF50 Határozzuk meg a $z = 4 - y^2$ parabolikus henger, az $x^2 + y^2 = 1$ körhenger és a $z = 0$ sík által határolt test térfogatát.

HF51 Számítsuk ki az alább megadott f függvény hármas integrálját a megadott R tartományon (ahol lehet, többféleképpen is: különféle sorrendek, szeparabilitás):

- a) $f(x, y, z) = 2x - 4y + 6z - 3$, tartomány: $R = [0; 2] \times [0; 1] \times [0; 3]$;

- b) $f(x, y, z) = x - 2y + 4z$, a tartomány pedig az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ síkok által határolt poliéder;
- c) $f(x, y, z) = x^2 + 2y + z^2$, a tartomány pedig az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = 2$, $y = 2$ síkok által határolt poliéder;
- d) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, a tartomány pedig az $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = x + y$ síkok által határolt poliéder.

HF52

$$\iiint_R x^2 + y^2 \, dR = ?,$$

ahol R jelöli az $x^2 + y^2 = 4$ hengernek a $z = 0$ és a $z = 8$ síkok közötti részét.

HF53

Számítsuk ki az alább megadott $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény hármas integrálját a megadott R tartományon:

$f(x, y, z) = x^2 + y^2$, az R tartomány pedig az xy síkon álló, M magasságú egyenes körkúp, melynek alapköre az xy sík egységgöre. ($M > 0$ adott, és a kúp csúcsa tehát $(0, 0, M)$.)

HF54

Jelölje R az egységgömbnek a koordinátarendszer pozitív nyolcadába eső részét.

$$\iiint_R x^2 y z \, d(x, y, z) = ?$$

HF55

Határozzuk meg a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelület, az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ körhengerpalást és az xy sík közötti térrész térfogatát.

HF56

Határozzuk meg az R sugarú, 2α nyílásszögű gömbcikk térfogatát.

HF57

Számítsuk ki a $z = x^2 + y^2$ és a $z = 27 - 2x^2 - 2y^2$ felületek által határolt tartomány térfogatát.

HF58 Határozzuk meg

- a) az $x^2 + y^2 \leq R^2$ körlap
 - b) az $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$ félkörlap
 - c) az $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$ félkör alakú drót
- tömegközéppontját, ha a sűrűségfüggvény: $\varrho(x, y) = R - y$. ($R > 0$ adott.)
-

HF59 Adott $R > 0$ esetén tekintsünk egy R sugarú félkörlemez. Határozzuk meg tömegközéppontjának helyét az alábbi esetekben:

- a) sűrűsége a lemez minden pontjában ugyanakkora (homogén tömegeloszlás);
 - b) sűrűsége egyenesen arányos a középponttól mért távolsággal, az arányossági tényező adott $k > 0$ szám;
 - c) sűrűsége egyenesen arányos az átmérőtől mért távolsággal, az arányossági tényező adott $k > 0$ szám.
-

HF60 Jelölje T azt a síkbeli tartományt, melyet az $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ kör, valamint az $y = \sqrt{3}x$ és az $x = \sqrt{3}y$ egyenesek határolnak.

Homogén tömegeloszlást feltételezve, határozzuk meg T tömegközéppontjának helyét.

HF61 Határozzuk meg a

$$0 \leq x \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - z^2}, \quad 0 \leq z \leq 1$$

nyolcadgömb tömegét, ha a sűrűségfüggvény: $\varrho(x, y, z) = xyz$.

HF62 Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$ félgömb alakú test tömegközéppontjának koordinátáit, ha sűrűsége egyenesen arányos a z -tengelytől mért távolsággal.

HF63 Számítsuk ki az alább megadott F függvény vonalintegrálját a megadott γ görbe mentén:

- a) $F(x, y) = (y, x)$, a γ görbe a $(-1, 1)$ pontból a $(2, 3)$ pontba vezető egyenes szakasz;
- b) $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, $\gamma(t) = (t, t^2)$ ($0 \leq t \leq 1$);
- c) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, $\gamma(t) = (t, 1 - |1 - t|)$ ($0 \leq t \leq 2$);
- d) $F(x, y) = (\frac{x + y}{x^2 + y^2}, \frac{x - y}{x^2 + y^2})$, a γ görbe az origó középpontú, R sugarú körvonal egyszeri pozitív körüljárással ($R > 0$ adott);

- e) $F(x, y) = (x^2y, -xy), \gamma(t) = (t^3, t^4) \quad (0 \leq t \leq 1);$
- f) $F(x, y, z) = (y + z, -x^2, -4y^2), \gamma(t) = (t, t^2, t^4) \quad (0 \leq t \leq 1);$
- g) $F(x, y, z) = (x^2, xy, z^2), \gamma(t) = (\sin t, \cos t, t^2) \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$
- h) $F(x, y, z) = (x, y, -z), \quad \gamma(t) = (t^2, t, \frac{1}{t}) \quad (1 \leq t \leq 2).$