PPKE ITK I. évfolyam 1., 4., 5. csoport

Analízis házi feladatok 2018. április 10., 13.

$\boxed{\text{HF34}}$ Ebben a feladatban egyenlettel adunk meg implicit függvényeket. Mindegyik esetben három kérdés van:

(a) Igazoljuk, hogy létezik a megadott $P_0(x_0, y_0)$ pont környezetében az $y = f(x)$ implicit függvény,

(b) Írjuk fel ebben a környezetben az f deriváltját ($f'(x) =?$),

(c) Számítsuk ki a deriváltat az x_0 helyen ($f'(x_0) =?$).

a) $x^y = y^x, \quad P_0 = (2;\, 4),$

b) (adott $a > 0$ esetén) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Descartes-levél), $P_0(x_0,\, y_0)$, ahol $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, és P_0 rajta van a görbén.

c) $x \cdot \sin y - \cos y + \cos 2y = 0, \quad P_0 = (1;\, \frac{\pi}{2}),$

d) $2y \cdot e^x = x \cdot e^y, \quad P_0 = (0;\, 0);$

e) $\dfrac{x^2 + 2xy - y^2 - 1}{x^2 + y^2}, \quad P_0 = (1;\, 2);$

f) $\dfrac{\ln(x^3y^2)}{xy} = 0, \quad P_0 = (1;\, 1);$

g) $\dfrac{x}{y}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = 0, \quad P_0 = (1;\, 1).$

$\boxed{\text{HF35}}$ Határozzuk meg az alábbi függvények feltételes abszolút szélsőértékeit (szélsőértékhelyek, szélsőértékek)

1. Lagrange-multiplikátoros eljárással;
2. (ahol nem túl bonyolult) az egyik változó kifejezésével:

(a) $f(x, y) = xy$, feltétel: $x + y = 1$;

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, feltétel: $x + y = 8$;

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2$, feltétel: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2$, feltétel: $xy = 3$;

(e) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$, feltétel: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, feltétel: $z^2 = x^2y + 4$;

(g) $f(x, y) = x$, feltétel: $x^3 - y^2 = 0$;

(h) $f(x, y) = x + y$, feltétel: $x^3 - y^2 = 0$;

(i) $f(x, y) = y$, feltétel: $x^3 - y^2 = 0$;

(j) $f(x, y) = x^3$, feltétel: $y - x^2 = 0$.

(k) $f(x,y) = \sin(x+y)$, feltétel: $x^2 + y^2 = 1$;

$\boxed{\text{HF36}}$ Adott kerületű téglalapokat megforgatunk az egyik oldaluk körül. Mikor lesz a keletkező henger térfogata a legnagyobb?

$\boxed{\text{HF37}}$ Az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gömbfelület mely pontjai vannak legnagyobb (legkisebb) távolságra a tér egy rögzített $P(a,b,c)$ pontjától? Pl. $P(1,5,-10)$, $P(1,2,2)$,$P(-2,1,0)$, $P(0,0,0)$.

$\boxed{\text{HF38}}$ Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit:

(a) $f(x,y) = 2xy - 3y \quad ((x,y) \in D)$, ahol a D halmaz az $y = x^2$ parabola, az x-tengely és az $x = 2$ egyenes által határolt síkrész;

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - x \quad ((x,y) \in D))$, ahol a D halmaz az $x^2 + y^2 = 1$ kör és a koordinátatengelyek által határolt síkrész;

(c) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 - y^2 \quad (x \geq -1,\ x - 1 \leq y \leq 4)$;

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy \quad (0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq x)$;

(e) $f(x,y) = 3x - 2y \quad (4x^2 + y^2 \leq 4)$;

(f) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y \quad (0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3)$.