PPKE ITK I. évfolyam 1., 4., 5. csoport

Analízis házi feladatok 2018. március 6., 9.
(Összeállította: Csörgő István)

$\boxed{\text{HF16}}$ Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{1}{x-y};$$

$$c)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2};\qquad d)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2};$$

$$e)\quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};\qquad f)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2};$$

$$g)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-x+y}{x^2y+x+y};\qquad h)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

$\boxed{\text{HF17}}$ Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ típusú függvényeket:

$$a)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y} & \text{ha}\quad x+y\neq 0,\\[2ex] 0 & \text{ha}\quad x+y=0;\end{cases}$$

$$b)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$c)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$\boxed{\text{HF18}}$ Számítsuk ki az alábbi $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ típusú függvények parciális deriváltjait:

$$a)\ f(x,y)=x^2-5xy+3y^2-6x+7y+8;\qquad b)\ f(x,y)=\arcsin\frac{x}{y};$$

$$c)\ f(x,y)=\frac{xy}{x+y};\qquad d)\ f(x,y)=\sqrt{x^3-5x^2y+y^4};$$

$$e)\ f(x,y)=e^{x^2y}-2x^2y^3\sin(x+y);\qquad f)\ f(x,y)=e^x\cos y-x\ln y;\qquad g)\ f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1-y};$$

$$h)\ f(x,y)=\frac{e^{2x-3y}}{2x-3y};\qquad i)\ f(x,y)=\frac{x\cdot\operatorname{tg}\ x}{e^{xy}}.$$

$\boxed{\text{HF19}}$ Igazoljuk, hogy az

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R})$$

függvény kielégíti a

$$u'_t - u''_{xx} = 0$$

parciális differenciálegyenletet (hővezetési egyenlet).