

HF1 Határozzuk meg az alábbi ($\mathbb{R}$ -beli) hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát:

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n} & b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1) \cdot 2^n} & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \cdot (x-5)^n \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n & e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n & \end{array}$$

HF2 Fejtsük hatványsorba (Taylor-sorba) az alábbi ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú) függvényeket először az $x_0 = 0$, majd az $x_0 = 2$, végül az $x_0 = -1$ középpont körül:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \frac{1}{1-x} & b) f(x) = \frac{3x}{1+x} & c) f(x) = \frac{2x}{3-x} \\ d) f(x) = \frac{1}{3-2x} & e) f(x) = \frac{x}{2+x} & \end{array}$$

HF3 Írjuk fel az $f(x) = \ln(1+x^2)$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény Taylor sorát!

HF4 Igazoljuk, hogy az alábbi függvénysorozatok pontonként konvergensek. Mi a határfüggvény? Egyenletes-e a konvergencia? (Természetesen mindenhol $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{array}{ll} (a) f_n(x) = x^n & (x \in [0, 1], \quad x \in [0, 1), \quad x \in [0, \beta], \text{ ahol } 0 < \beta < 1 \text{ rögzített}) \\ (b) f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} & (x \in \mathbb{R}) \\ (c) f_n(x) = n^2xe^{-nx} & (x \geq 0) \end{array}$$

Megjegyzés: Ezek a példák benne vannak a jegyzetben. A feladat az, hogy gondoljuk át még egyszer a megoldást.

HF5 Igazoljuk, hogy az alábbi függvénysorozatok pontonként konvergensek. Mi a határfüggvény? Egyenletes-e a konvergencia? (Természetesen mindenhol $n \in \mathbb{N}$)

$$(a) f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad (x \in [0, 2], \quad x \in (0, 2], \quad x \in [\beta, 2], \quad x \in (\beta, 2], \text{ ahol } 0 < \beta < 2 \text{ rögzített})$$

- (b) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ($x \in [0, +\infty)$, $x \in (0, +\infty)$, $x \in [\beta, +\infty)$, ahol $\beta > 0$ rögzített)
- (c) $f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$ ($x \in \mathbb{R}$)
- (d) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ ($x \in [0, 1]$)
- (e) $f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}$ ($x \in (0, 1)$)
- (f) $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ ($x \in [0, 1]$)
-

HF6

Igazoljuk, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek!

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{e^{nx}}$ ($x \in [\beta, +\infty)$, ahol $\beta > 0$ rögzített)
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{ne^{nx}}$ ($x \in (0, +\infty)))$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ ($x \in \mathbb{R}$)
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ ($x \in \mathbb{R}$)
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ ($x \geq 0$)