KOVÁCS BÉLA,

MATEMATIKA II.

5

A Műszaki Földtudományi Alapszak tananyagainak kifejlesztése a
TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0033 pályázat keretében valósult meg.

V. Fourier-sorok

1. Alapvető összefüggések

A 2π szerint periodikus *f* függvény **Fourier-sorának** nevezzük az

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots \qquad (1)$$

függvénysort, ha

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\quad k=0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

Ha *f* páros függvény, akkor valamennyi b_k együttható értéke nulla. Ha *f* páratlan, akkor mindegyik a_k együttható értéke nulla.

Az együtthatók kiszámításánál bármely $[c,\ c+2\pi]$ intervallumon lehet integrálni.

Ha az *f* függvény szakaszonként folytonos, és a szakadási helyeken a függvény értéke a bal oldali és a jobb oldali határérték számtani közepe, továbbá az f' derivált is szakaszonként folytonos, akkor a függvényt a Fourier-sora előállítja, azaz

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Ha az *f* függvény $2p$ szerint periodikus, akkor Fourier-sora

$$\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{\pi}{p}x+b_1\sin\frac{\pi}{p}x\right)+\ldots+\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)+\ldots, \qquad (3)$$

ahol

$$a_k=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{k\pi}{p}x\,dx,\ b_k=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{k\pi}{p}x\,dx,\quad k=0,1,2,\ldots \qquad (4)$$

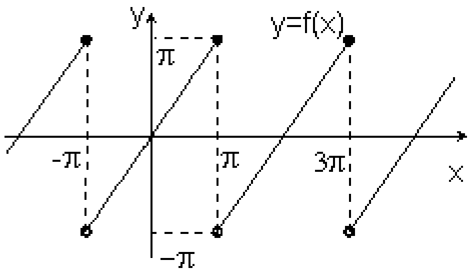
2. Mintapéldák

Megoldások: ⦿ láthatók ○ nem láthatók

Fejtsük Fourier-sorba az alábbi függvényeket:

1. $f(x)=x,\quad -\pi<x\le\pi,\quad f(x+2\pi)=f(x);$

Megoldás. A függvény képe (görbéje) a 4.1. ábrán látható.



4.1. ábra

Mivel f páratlan, ezért $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos k\pi}{k} + 0\right] = \frac{-2}{k}\cos k\pi;$$

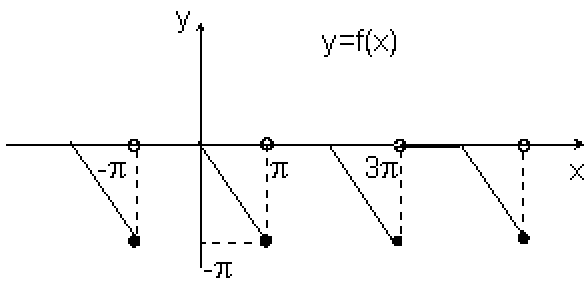
$$b_1 = \frac{2}{1},\quad b_2 = -\frac{2}{2},\quad b_3 = \frac{2}{3},\quad b_4 = -\frac{2}{4},\quad b_5 = \frac{2}{5}, \ldots\ .$$

Ez a Fourier-sor a szakadási helyek kivételével mindenütt elő is állítja a függvényt, így

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right),\quad x \neq (2k+1)\pi.$$

2. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$ $\quad f(x+2\pi) = f(x);$

Megoldás. A függvény nem páros és nem páratlan (4.2. ábra).



4.2. ábra

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0dx = \frac{-\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\cos kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0\cos kx dx =$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2\pi}(1-\cos k\pi),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0\sin kx dx =$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{-x\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{k\pi}(-\pi\cos k\pi) = \frac{\cos k\pi}{k}.$$

Néhány együttható értéke:

$$b_1 = -1,\quad b_2 = \frac{1}{2},\quad b_3 = \frac{-1}{3},\quad b_4 = \frac{1}{4},\quad b_5 = -\frac{-1}{5},\ldots\ .$$

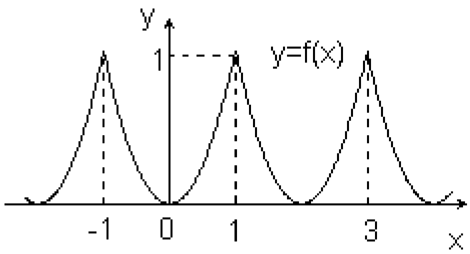
Tehát a szakadási helyek kivételével

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x - \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{2\cos 3x}{3^2\pi} - \frac{\sin 3x}{3} +$$

$$+\frac{\sin 4x}{4} + \frac{2\cos 5x}{5^2\pi} - \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\ .$$

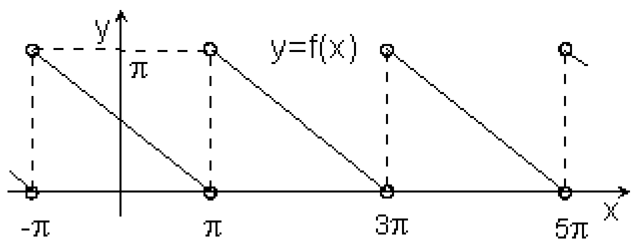
3. $f(x) = x^2,\quad -1 \le x \le 1,\quad f(x+2) = f(x).$

Megoldás. A függvény páros, periodusa $2p = 2$, tehát $p = 1$ (4.3. ábra).



4.3. ábra

A párosság miatt $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ .A többi együttható a (4) képlettel számítható.



4.4. ábra

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3};$$

$$a_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x^2\cos\frac{k\pi}{1}x dx = \frac{4}{k^2\pi^2}\cos k\pi;$$

, , , .

$$a_1 = \frac{-4}{\pi^2} \quad a_2 = \frac{4}{2^2\pi^2} \quad a_3 = \frac{-4}{3^2\pi^2} \quad a_4 = \frac{4}{4^2\pi^2}, \ldots$$

A függvény mindenütt folytonos, ezért Fourier-sora előállítja azt, tehát

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \ldots\right).$$

Helyettesítsünk mindkét oldalon x helyére 1-et. Ekkor

$$f(1) = 1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \ldots\right),$$

ahonnan átrendezéssel a

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

egyenlőséget kapjuk.

3. Feladatok

Fejtse Fourier-sorba a következő függvényeket:

1. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, ha $-\pi < x < \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$;

2. $f(x) = |x|$, ha $-\pi < x < \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$;

3. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

4. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } 0 \le x < 2, \\ 0, & \text{ha } 2 \le x < 4, \end{cases}$ $f(x + 4) = f(x)$;

5. $f(x) = \begin{cases} A, & \text{ha } 0 \le x < p, \quad A \text{ állandó} \\ 0, & \text{ha } p \le x < 2p, \quad f(x+2p) = f(x). \end{cases}$

Megoldások

1. A függvény grafikonja a 4.4. ábrán látható.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos kx dx = \frac{1}{2\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin kx}{k} - \frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin kx dx = \frac{1}{2\pi}\left[(x - \pi)\frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\cos k\pi}{k},$$

$$b_1 = -1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{-1}{3}, \quad b_4 = \frac{1}{4}, \quad b_5 = -\frac{1}{5} \ldots.$$

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} - \sin x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 5x}{5} + \dots \, .$$

2. A függvény páros, tehát $b_k = 0$, $k = 1,2,\dots$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi,$$

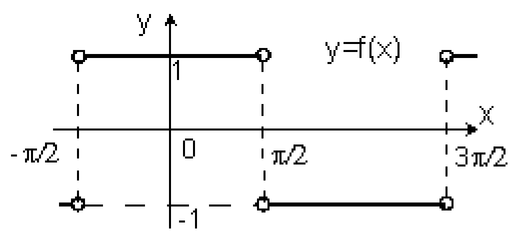
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi k^2}\left[\cos k\pi - 1\right],$$

$$a_1 = \frac{-4}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{-4}{3^2\pi}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{-4}{5^2\pi}, \dots \, .$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right].$$

3. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ -1, & \text{ha } \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}, \quad f(x+2\pi) = f(x) \end{cases}$.

A függvény grafikonja a 4.5. ábrán látható.



4.5. ábra

Páros függvényről van szó, tehát $b_k = 0$.

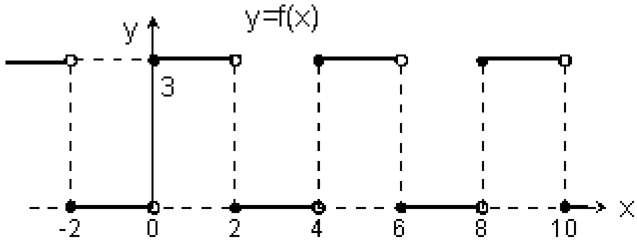
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-1) dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos kx) dx = \frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2},$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{3\pi}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{4}{5\pi}, \dots \, .$$

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi}\left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots\right].$$

4. A függvény $2p = 4$ szerint periodikus, grafikonja a 4.6. ábrán látható.



4.6. ábra

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 3dx + \frac{1}{2}\int_2^4 0dx = 3,$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 3\cos\frac{k\pi}{2}x dx + 0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2 = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^2 3\sin\frac{k\pi}{2}x dx + 0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{k\pi}\left[-\cos\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2 = \frac{3}{k\pi}\left[1-\cos k\pi\right],$$

$$b_1 = \frac{6}{\pi}\cdot\frac{1}{1},\quad b_2 = 0,\quad b_3 = \frac{6}{\pi}\cdot\frac{1}{3},\quad b_4 = 0,\quad b_5 = \frac{6}{\pi}\cdot\frac{1}{5},\ldots .$$

$$f(x) \approx \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}x}{3} + \frac{\sin\frac{5\pi}{2}x}{5} + \ldots\right].$$

5. Az előző feladat általánosításáról van szó.

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^p A dx + 0 = A,$$

$$a_k = 0,\quad b_k = \frac{1}{p}\int_0^p A\sin\frac{k\pi}{p}x dx + 0 = \frac{A}{k\pi}\left[1-\cos k\pi\right],$$

$$b_1 = \frac{2A}{\pi},\quad b_2 = 0,\quad b_3 = \frac{2A}{\pi}\cdot\frac{1}{3},\quad b_4 = 0,\quad b_5 = \frac{2A}{\pi}\cdot\frac{1}{5},\ldots .$$

$$f(x) \approx \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{p}x + \frac{\sin\frac{3\pi}{p}x}{3} + \frac{\sin\frac{5\pi}{p}x}{5} + \ldots\right].$$