

Tartalomjegyzék

1. Többváltozós valós függvények	7
1.1. $\mathbb{R}^2$ topológiája	8
1.1.1. Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$ -ben.	8
1.1.2. Halmazok $\mathbb{R}^2$ -ben	11
1.1.3. Polárkoordináták	15
1.1.4. Általánosítás $\mathbb{R}^n$ -re	16
1.2. Kétváltozós függvények	17
1.2.1. Geometriai reprezentáció	18
1.2.2. Folytonosság	20
1.2.3. Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények	24
1.2.4. Határérték	27
1.3. Differenciálszámítás	29
1.3.1. Parciális deriváltak	29
1.3.2. Teljes differenciálhatóság	37
1.3.3. Iránymenti derivált	41

1.3.4.	Magasabb rendű deriváltak	43
1.3.5.	Összetett függvény. Láncszabály két dimenzióban . . .	44
1.3.6.	Implicit függvény tétel	49
1.4.	Általánosítás $\mathbb{R}^n$ -re	52
1.4.1.	Parciális derivált, teljes derivált	52
1.4.2.	Íránymenti derivált	53
1.4.3.	Összetett függvény	54
1.5.	Szélsőérték számítás	54
1.6.	Feltételes szélsőérték	59
1.7.	Függvényrendszerek	63
1.7.1.	Invertálhatóság	64
1.7.2.	Az inverz leképezés differenciálhatósága	64
1.8.	Kitekintés n dimenzióra	68
1.8.1.	Szélsőérték	68
1.8.2.	Lagrange-féle középértéktétel	69
1.8.3.	Taylor-formula	70
2.	Többszörös integrálok	73
2.1.	Az integrál értelmezése	74
2.1.1.	Jordan mérték $\mathbb{R}^2$ -ben	74
2.1.2.	Kettős integrál	78
2.1.3.	A kettős integrál alaptulajdonságai	82

2.1.4. Kettős integrál kiszámítása	84
2.2. Koordináta transzformáció	88
2.2.1. Lineáris (affin) transzformáció	88
2.2.2. Általános transzformáció	90
2.3. Kitekintés a hármas integrálokra	94
2.3.1. Az integrál értelmezése	94
2.3.2. Koordináta transzformáció	97
2.4. Improprius integrálok	99
2.4.1. Nem korlátos függvény integrálja	99
2.4.2. Integrálás nem korlátos tartományon	102
2.5. Vonalintegrál	105
2.5.1. Valós függvény vonalintegrálja	105
2.5.2. Vektormező vonalintegrálja	106
2.5.3. Primitív függvény keresés	110
2.6. Felületi integrál	111
2.6.1. Felület	111
2.6.2. Felületi integrál	112
2.6.3. Felületi integrál kiszámítása	113
2.7. Két gyakorlati alkalmazás	115
2.7.1. A tömegközéppont kiszámítása	115
2.7.2. A felszín meghatározása	117

3. Fourier analízis II. rész	121
3.1. Fourier transzformáció bevezetése	122
3.2. A Fourier transzformáció tulajdonságai	124
3.3. Az alaptétel	127
3.4. További tulajdonságok	129
4. Differenciálegyenletek	131
4.1. Differenciálegyenletek általános leírása	132
4.1.1. Differenciálegyenletek osztályozása	132
4.1.2. Elsőrendű differenciálegyenletek	133
4.2. Magasabb rendű differenciálegyenletek	136
4.2.1. Lineárisan független függvények	136
4.2.2. n -edrendű lineáris differenciálegyenlet	139
4.2.3. Homogén lineáris, állandó együtthatós egyenletek	140
4.2.4. Inhomogén lineáris egyenletek	146
4.3. Differenciálegyenlet-rendszerek	151
4.3.1. Alapfeladat	151
4.3.2. Lineáris, állandó együtthatós homogén DER	153
5. Komplex függvénytan	159
5.1. Komplex számok, sorozatok	160
5.1.1. Komplex számsorozatok	160
5.1.2. Végtelen sorok	162

5.1.3. Hatványsorok	163
5.2. Komplex függvények	164
5.2.1. Komplex függvény kanonikus alakja	165
5.2.2. Határérték, folytonosság	166
5.2.3. Differenciálhatóság	167
5.2.4. Elemi függvények	170
5.2.5. Harmonikus függvény	173
5.3. Komplex vonalintegrálok	174
5.3.1. Komplex vonalintegrál definíciója	174
5.3.2. Vonalintegrál kiszámítása	177
5.3.3. Taylor-sorfejtés és Laurent-sorfejtés	182
5.3.4. Zérus, pólus és reziduum	182
5.3.5. Reziduum tétel és alkalmazásai	185

1. fejezet

Többsváltozós valós függvények

1.1. $\mathbb{R}^2$ topológiája

1.1.1. Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$ -ben.

A sík pontjait rögzített koordináta-rendszerben megadott rendezett számpárokkal jellemezzük: $P = (x, y)$. Ezen pontok halmazát $\mathbb{R}^2$ -vel jelöljük.

1.1.1. Definíció. Legyen $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két pont $\mathbb{R}^2$ -ben. Ezek távolsága:

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Két pont távolságának jelölésére szokás még az alábbiakat is használni:

$$\rho(P, P'), \quad \|P - P'\|.$$

Az origóból az (x, y) pontba mutató vektor hossza

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Használni fogjuk a lineáris algebrából ismert háromszög egyenlőtlenséget, miszerint

$$\|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

1.1.2. Definíció. Legyen adott a $C \in \mathbb{R}^2$ pont, $C = (A, B)$, és az $\varepsilon > 0$ valós szám. A C pont körüli ε -sugarú gömböt így definiáljuk:

$$S(C, \varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \overline{PC} < \varepsilon\}.$$

Ezzel egy körlemezt kapunk C középponttal.

1.1.3. Definíció. Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:

$$P_n = (x_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

1. *Példa.* Két pontsorozat: $P_n^{(1)} = (n, n^2)$, illetve $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$.

Megjegyzés: A sorozat tagjai nem feltétlenül különböznek.

1.1.4. Definíció. A (P_n) sorozat korlátos, ha létezik egy olyan $S(C, \varepsilon)$ gömb, amely a sorozat minden elemét tartalmazza. Tehát ez azt jelenti, hogy (P_n) korlátos, ha létezik $C = (A, B)$ és $\varepsilon > 0$ hogy minden $P_n = (x_n, y_n)$ -re teljesül, hogy

$$\sqrt{(x_n - A)^2 + (y_n - B)^2} < \varepsilon.$$

1. *Példa.* (folytatás) $P_n^{(1)} = (n, n^2)$ nem korlátos; $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$ korlátos.

1.1.5. Definíció. A (P_n) sorozat konvergens és határértéke Q , ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - Q\| = 0.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q.$$

Ezzel ekvivalens definíció:

1.1.6. Definíció. A (P_n) sorozat konvergens és határértéke Q ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N(\varepsilon)$ esetén:

$$\|P_n - Q\| < \varepsilon.$$

Másképp fogalmazva: Minden $\varepsilon > 0$ esetén az $S(Q, \varepsilon)$ gömbön kívül csak véges sok pont van (véges sok indexű).

Következmény. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

2. *Példa.* Legyen $P_n = (e^{-n/4} \cos(n), e^{-n/4} \sin(n))$, $n = 1, 2, \dots$ Ekkor

$$\|P_n - (0, 0)\| = \|P_n\| = \sqrt{e^{-n/2} \cos^2 n + e^{-n/2} \sin^2 n} = \sqrt{e^{-n/2}} = e^{-n/4}.$$

Így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (0, 0).$$

1.1.1. Állítás. Tekintsük a $P_n = (x_n, y_n)$ elemekből álló sorozatot. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

1. (P_n) konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q = (x, y).$$

2. Az (x_n) és (y_n) sorozatok konvergensek és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. A pontsorozat konvergenciája miatt minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik egy $N(\varepsilon)$ index, hogy $\|P_n - Q\| < \varepsilon$, ha $n \geq N(\varepsilon)$. Mivel

$$|x_n - x| < \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2},$$

ezért $|x_n - x| < \varepsilon$ és hasonlóan $|y_n - y| < \varepsilon$ is teljesül.

2. $\Rightarrow$ 1. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik egy küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ -re:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \varepsilon^2$ így

$$\|P_n - Q\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Cauchy-féle feltétel

1.1.7. Definíció. A (P_n) sorozat teljesíti a Cauchy-féle feltételt, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre minden $n, m \geq N$ esetén

$$\|P_n - P_m\| < \varepsilon.$$

1.1.2. Állítás. A (P_n) pontsorozat pontosan akkor konvergens, ha teljesíti a Cauchy-féle feltételt.

Bizonyítás. Csak az egyik irányt bizonyítjuk. Belátjuk, hogy ha a sorozat konvergens, akkor teljesíti a Cauchy-féle feltételt. A konvergencia miatt ε -hoz létezik N küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P\| < \varepsilon/2$$

minden $n \geq N$ esetén. Ekkor ha $n, m \geq N$, akkor a háromszögegyenlőtlenséget felhasználva azt írhatjuk, hogy

$$\|P_n - P_m\| < \|P_n - P\| + \|P - P_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

1.1.1. Tétel. *(Bolzano-Weierstrass-tétel) Legyen (P_n) korlátos pontsorozat a síkon. Ekkor létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Ha (P_n) korlátos és $P_n = (x_n, y_n)$, akkor (x_n) és (y_n) is korlátos sorozatok. Ekkor létezik (x_n) -nek konvergens részsorozata, legyen ez (x_{n_k}) , illetve létezik (y_{n_k}) -nak is konvergens részsorozata, ez legyen (y_{n_k}) . Ekkor nyilván $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ is konvergens.

1.1.2. Halmazok $\mathbb{R}^2$ -ben

$\mathbb{R}^2$ részhalmazait tartományoknak is nevezzük.

Példa. Téglalap. (Ez a kétdimenziós intervallum.) Legyenek $a < b$ és $c < d$ rögzített valós számok:

$$T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

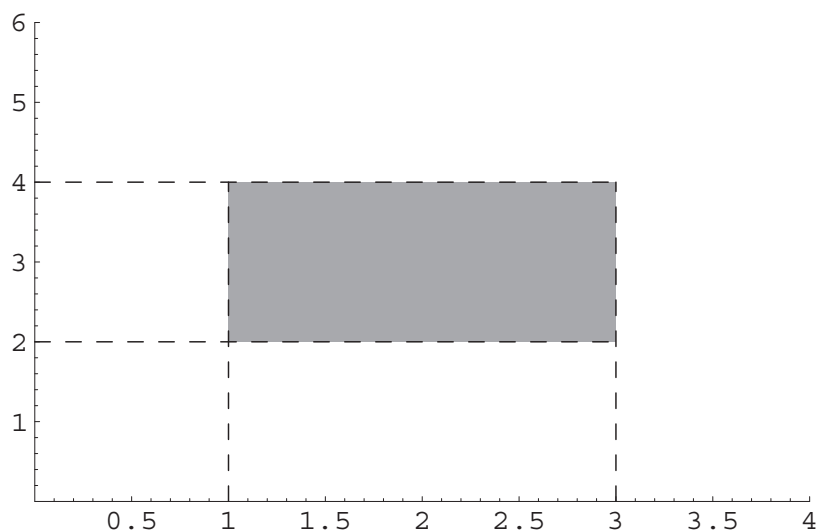
A kétdimenziós intervallumot direkt szorzat alakban is írhatjuk: $[a, b] \times [c, d]$.

Példa. Gömb. (Ez kétdimenzióban egy körlemeznek felel meg.) Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám és $C \in \mathbb{R}^2$ síkbeli pont adottak,

$$S(C, \varepsilon) = \{(x, y) : \sqrt{(x - A)^2 + (y - B)^2} < \varepsilon\}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy egydimenzióban az a pont környezetei az a középpontú $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumok voltak, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén. Ezt általánosítjuk.

1.1.8. Definíció. Egy $P = (x, y)$ pont környezetei azon $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományok, melyek P középpontú gömbök.



1.1. ábra. Kétdimenziós intervallum

Tekintsünk egy tetszőleges $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományt.

1.1.9. Definíció. - Azt mondjuk, hogy egy $Q \in \mathbb{R}^2$ belső pontja S -nek, ha Q -nak van olyan U környezete, melyre $U \subset S$.

- Azt mondjuk, hogy egy $Q \in \mathbb{R}^2$ külső pontja S -nek, ha Q -nak van olyan U környezete, melyre $U \cap S = \emptyset$.

- Azt mondjuk, hogy egy $Q \in \mathbb{R}^2$ határpontja S -nek, ha a Q pontnak minden U környezete rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy van olyan $P' \in U$ pontja melyre $P' \in S$ és van olyan $P'' \in U$ pontja melyre $P'' \notin S$.

1.1.1. Következmény. Tetszőleges S halmaz esetén a síkot 3 diszjunkt részre oszthatjuk:

- külső pontok, ezek halmazát $\text{ext}(S)$ jelöli. (Ez az 'exterior' szóból ered.)
- belső pontok, ezek halmazát $\text{int}(S)$ jelöli. (Ez az 'interior' szóból ered.)
- határpontok, ezeket halmazát ∂S jelöli. Lehetnek határpontok, amelyek elemei az adott halmaznak, és lehetnek, amelyek nem elemei.

1.1.10. Definíció. Az S halmaz zárt, ha minden határpontját tartalmazza. Az S halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont. Az S halmaz lezárása:

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Példa. A gömb nyílt halmaz. Ennek határpontjai:

$$\partial S(C, r) = \{P : \|P - C\| = r\},$$

és így lezárása:

$$\overline{S(C, r)} = \{P : \|P - C\| \leq r\}.$$

Példa. Legyen $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$ a sík racionális koordinátájú pontjainak halmaza. Ekkor a halmaz lezárása $\overline{S} = \mathbb{R}^2$.

1.1.11. Definíció. P az S halmaz torlódási pontja, ha létezik olyan $(P_n) \subset S$ sorozat, melyre $P_n \neq P$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$.

Torlódási pontok lehetnek belső pontok és határpontok. Zárt halmaz minden torlódási pontját tartalmazza.

1.1.12. Definíció. Legyen P és P' két $\mathbb{R}^2$ -beli pont. Az ezeket összekötő folytonos vonal egy olyan

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

függvény, mely egy korlátos és zárt $[\alpha, \beta]$ valós intervallumon van értelmezve és értékkészlete $\mathbb{R}^2$ -beli. Továbbá

$$\gamma(\alpha) = P, \quad \gamma(\beta) = P'.$$

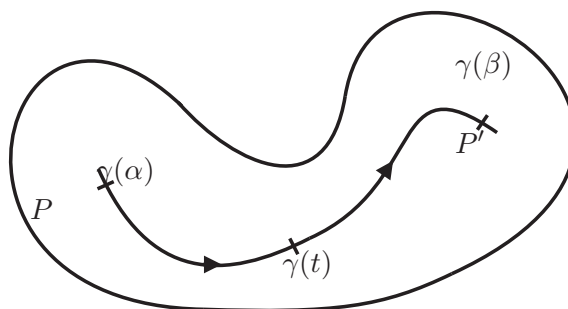
A $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ pont koordinátáit jelölje

$$\gamma(t) =: (x(t), y(t)).$$

Feltesszük, hogy ezek az $(x(t), y(t))$ koordináta-függvények,

$$x, y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

folytonosak.



1.2. ábra. Két pontot összekötő vonal.

Egy $\{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ vonalat is $\mathbb{R}^2$ -beli részhalmaznak tekintünk, természetes módon.

1.1.13. Definíció. Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományt összefüggőnek nevezzük, ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.

1.1.14. Definíció. Legyen $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két $\mathbb{R}^2$ -beli pont. A két pontot összekötő szakaszt az alábbi

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

függvény írja le:

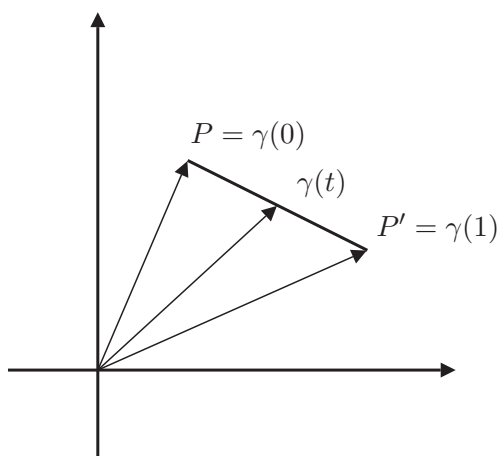
$$\gamma(t) := P + t(P' - P).$$

Speciálisan tehát $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = P'$.

A szakasz is folytonos vonal, mégpedig az alábbi koordináta-függvényekkel:

$$\begin{aligned} x(t) &= x + t(x' - x), \\ y(t) &= y + t(y' - y). \end{aligned}$$

1.1.15. Definíció. Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományt konvernek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.



1.3. ábra. Két pontot összekötő szakasz.

1.1.3. Polárkoordináták

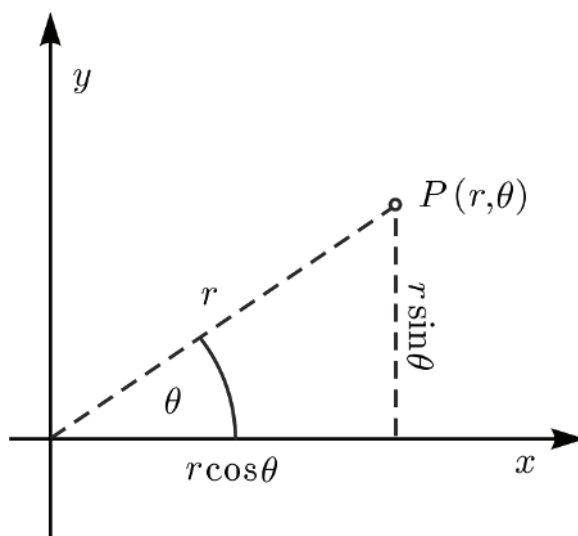
A síkbeli pontokat nem csak a megszokott Descartes-féle koordinárendszerben tudjuk megadni. Sokszor hasznos lesz a most bevezetésre kerülő polárkoordináták használata.

1.1.16. Definíció. Egy adott $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pont polárkoordinátái (r, θ) , melyeket így definiálunk:

- r : a pont origótól vett távolsága,
- θ : az origóból az adott pontba mutató vektornak az x tengely pozitív részével bezárt szöge.

Így tehát a polárkoordinátákra $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Ha r és θ adottak, akkor $x = r \cos(\theta)$; $y = r \sin(\theta)$. A fenti hozzárendelés egy-egyértelmű megfeleltetés, kivéve a $(0, 0)$ pontot.



1.4. ábra. A polárkoordináták értelmezése.

1.1.4. Általánosítás $\mathbb{R}^n$ -re

$\mathbb{R}^n$ elemeit a rendezett szám n -esek jelentik: $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $P' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$. Ezeket az n dimenziós tér pontjainak hívjuk.

1.1.17. Definíció. A két pont távolsága:

$$\|P - P'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} = ((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2)^{1/2}.$$

A távolságot szoktuk így is jelölni: $\rho(P, P')$.

1.1.18. Definíció. Egy $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pont környezetei n -dimenziós gömbök, melyeket így értelmezünk:

$$S(P, \varepsilon) = \left\{ Q = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n (x_k - x'_k)^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

1.2. Kétváltozós függvények

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely S elemeihez egy valós számot rendel. Értelmezési tartományát D_f -fel jelöljük (= "domain"), értékkészletét R_f -fel (= "range").

Függvény megadása azt jelenti, hogy megadjuk az értelmezési tartományt (ha ez megváltozik, már egy másik függvényt adunk meg) és a hozzárendelés módját. Ez mindig egyértelmű, például az $u = \arctan(y/x)$ függvény esetében meg kell adni, hogy a főág értékére gondolunk.

Elnevezések: (x, y) : független változó, u : függő változó.

Legegyszerűbb példák:

1. *Lineáris függvény.*

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

2. *Másodfokú polinom.*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

ahol $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

3. *Polinomokat* két dimenzióban úgy definiáljuk, mint monomiálok összege. Egy monomiál általános alakja:

$$a_{mn}x^m y^n.$$

Együtthatója $a_{mn} \in \mathbb{R}$, foka a benne levő fokok összege: $m + n$. Egy polinom fokát úgy definiáljuk, mint a legmagasabb fokú monomiáljának foka.

Egy polinom *homogén*, ha a polinomban szereplő monomiálok foka ugyanaz. Például homogén másodfokú polinom

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

További kétváltozós függvények konstrukciója az ismert egyváltozós függvények segítségével történhet, például:

$$u = \sin(xy) \quad \text{vagy} \quad u = \ln(y^2 + \cos(x/2)).$$

1.2.1. Geometriai reprezentáció

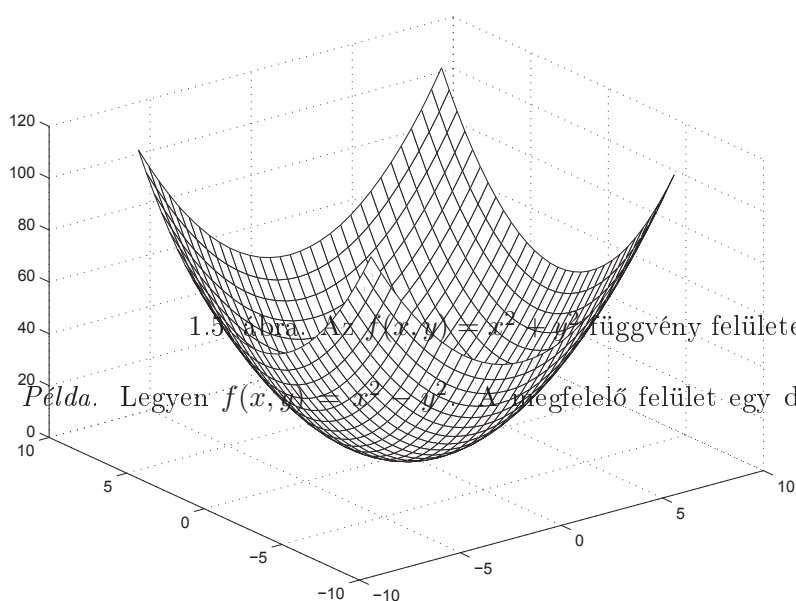
Ahogy az egyváltozós függvényt görbe segítségével tudtuk reprezentálni, a kétváltozós függvényt felületként fogjuk megadni. Ehhez tekintjük a háromdimenziós koordinátarendszert, melyben a koordináta tengelyek x, y és u . A függvény értelmezési tartományának tetszőleges (x, y) pontja fölött kijelöljük azt a P pontot, melynek harmadik koordinátája $u = f(x, y)$. Ha (x, y) bejárja a függvény értelmezési tartományát, akkor a megfelelő P pontok egy felületet fognak megadni.

Tehát az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a térben az (x, y, u) számhármassok írják le, ahol $u = f(x, y)$. Az

$$\{(x, y, u) : u = f(x, y), (x, y) \in S\}$$

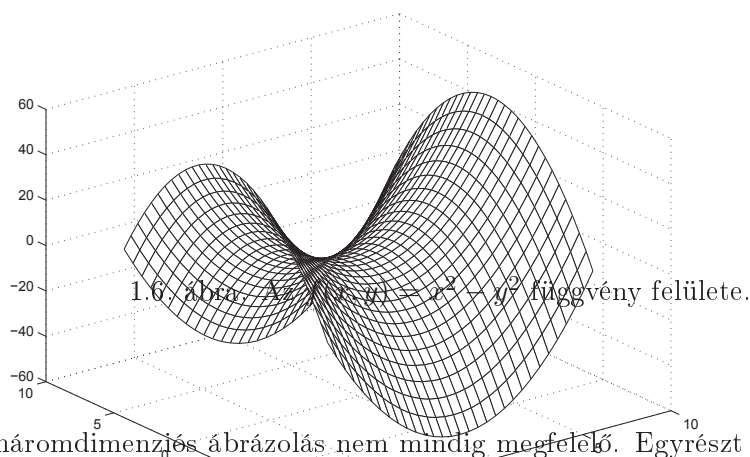
pontok felületet alkotnak a térben.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A felület egy darabja az 1.5. ábrán látható.



Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A megfelelő felület egy darabja az 1.6.

ábrán látható.

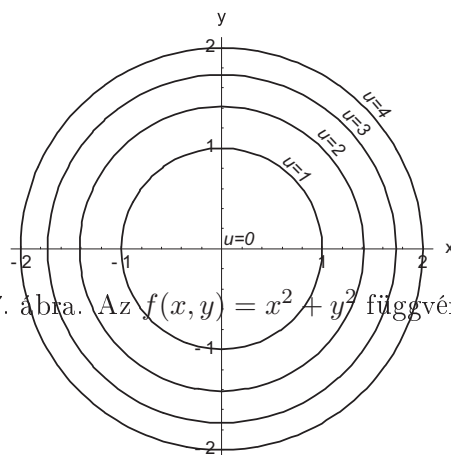
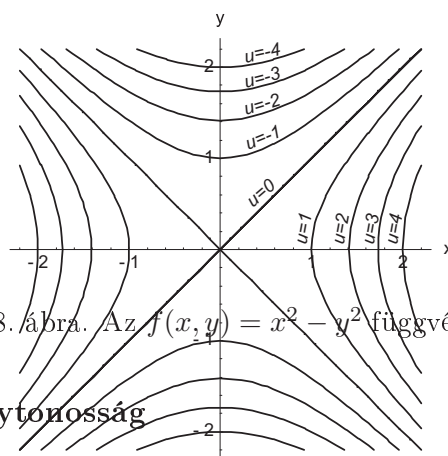


A háromdimenziós ábrázolás nem mindig megfelelő. Egyrészt ezt több független változóra nem tudjuk kiterjeszteni. Másrészt még két független változó esetén is szerencsésebb az x, y síkban dolgozni, itt gond nélkül tudunk rajzolni. Ehhez ad segítséget a szintvonalak segítségével történő ábrázolás. Ekkor a síkban ábrázoljuk azokat az (x, y) pontokat, melyekre $f(x, y) = k$ valamely rögzített $k \in \mathbb{R}$ mellett.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A szintvonalak koncentrikus körök, melyekből néhány az 1.7 ábrán látható.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A szintvonalak hiperbolák és egyenesek, melyekből néhány a 1.8 ábrán látható.

A szintvonalakkal történő ábrázolásnak egyik előnye, hogy kiterjeszthető háromváltozós $f(x, y, z)$ függvényekre. Ekkor szintvonalak helyett $k = f(x, y, z)$ szintfelületeket kapunk, ahol k tetszőleges konstans.

1.7. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény szintvonalai1.8. ábra. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény szintvonalai

1.2.2. Folytonosság

Azt fogjuk megfogalmazni, hogy mit jelent az a tulajdonság, hogy egy f függvény folytonos a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban. Heurisztikusan elképzelve azt várjuk, hogy ha (x, y) közel van (x_0, y_0) -hoz, akkor $f(x, y)$ is közel van $f(x_0, y_0)$ -hoz.

1.2.1. Definíció. Legyen (x_0, y_0) az f függvény értelmezési tartományá-

nak egy pontja. Az f függvény folytonos (x_0, y_0) -ban, ha $f(x_0, y_0)$ tetszőleges U környezetéhez létezik (x_0, y_0) -nak olyan V környezete, hogy minden $(x, y) \in V$, $(x, y) \in D_f$ esetén $f(x, y) \in U$.

Figyelembe véve a környezet definícióját, ezt így átfogalmazhatjuk:

1.2.2. Definíció. Legyen $P_0 = (x_0, y_0)$ az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik egy $\delta > 0$ szám, melyre

$$\forall (x, y) \in D_f, \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

esetén

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

teljesül.

1.2.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény sorozatfolytonos az értelmezési tartomány P_0 pontjában, ha minden $(P_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0).$$

A kétfajta fogalom ekvivalenciájáról szól az alábbi tétel:

1.2.1. Tétel. Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos P_0 -ban, ha ott sorozatfolytonos.

Bizonyítás. Teljesen analóg az egyváltozós esettel, az olvasóra bízunk.

Könnyen látható a fenti tétel alapján, hogy folytonos függvények összege, szorzata, skalárszorosa is folytonos lesz.

1.2.4. Definíció. Ha egy függvény értelmezési tartományának egy pontjában nem folytonos, akkor ott szakadása van.

Példák folytonosságra:

1. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{ha } y \neq 0 \\ 0 & \text{ha } y = 0 \end{cases}.$$

Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$, szakadás az $y = 0$ egyenes mentén van, hiszen a függvény tetszőleges (x, y) pontban folytonos, kivéve ha $y = 0$.

2. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A függvény folytonos, ha sem x sem y nem 0. Ha $y \neq 0$, akkor $f(x, y)$, mint x függvénye folytonos, és

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Ha $x \neq 0$, akkor $f(x, y)$, mint y függvénye folytonos, és

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Tekintsük az $x = y$ egyenest. Ezen egyenes mentén $f(x, x) \equiv 1$. Tehát ha ennek az egyenesnek a mentén egy sorozattal tartunk 0-ba, akkor a függvényértékek sorozata azonosan 1 lesz, így a határérték is. f tehát *nem folytonos a $(0, 0)$ -ban*.

3. Példa. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Folytonos-e a $(0, 0)$ pontban?

Igen. A sorozatfolytonosságot igazoljuk. Legyen (P_n) egy olyan sorozat, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$. Legyenek (P_n) polárkoordinátái $P_n = (r_n, \theta_n)$.

Ekkor nyilván $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, míg a (θ_n) sorozat bármilyen lehet. A fenti képletnek megfelelően $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén $f(x, y)$ így írható:

$$f(x, y) = \frac{r^2 \cos^2(\theta) r^2 \sin^2(\theta)}{r^2} = r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta).$$

Ezért valóban

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = 0,$$

tehát a függvény valóban folytonos.

1.2.2. Tétel. (*Bolzano tétel*) Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melynek értelmezési tartománya $S \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő. Legyen a tartomány két tetszőleges pontja $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$, melyekre

$$a = f(x, y) < f(x', y') = b.$$

Ekkor tetszőleges $c \in (a, b)$ számhoz létezik egy olyan $Q = (x_0, y_0) \in S$ pont, melyre $f(x_0, y_0) = c$.

Bizonyítás. Az S tartomány összefüggő, ezért létezik P -t és P' -t összekötő S -beli folytonos görbe. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan

$$\begin{aligned} \gamma : [\alpha, \beta] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

függvény, melyre

$$\gamma(\alpha) = (x, y), \quad \gamma(\beta) = (x', y'),$$

és az $(x(t), y(t))$ koordináta-függvények folytonosak. Vezessük be az

$$F(t) := f(x(t), y(t))$$

valós függvényt. $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, melyre $F(\alpha) = a$ és $F(\beta) = b$. Így az egydimenziós folytonos függvényekre ismert Bolzano-tétel szerint létezik olyan $\xi \in (\alpha, \beta)$, melyre $F(\xi) = c$. Ezért a $Q := \gamma(\xi) \in S$ pontra $f(Q) = c$.

1.2.5. Definíció. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos S -ben, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $P, P' \in S$ pontokra

$$\|P - P'\| < \delta \quad \text{akkor} \quad |f(P) - f(P')| < \varepsilon.$$

A $\delta = \delta(\varepsilon)$ számot az ε -hoz tartozó folytonossági modulusnak hívjuk.

1.2.6. Definíció. Az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény Lipschitz folytonos, ha létezik egy olyan $L > 0$ szám, melyre

$$|f(P) - f(P')| \leq L \cdot \|P - P'\|$$

teljesül minden $P, P' \in S$ pontra. Az L számot Lipschitz-konstansnak hívjuk.

Megjegyzés. Egyenletes folytonosságot *tartományban* definiáltuk, nem pedig pontban.

1.2.1. Állítás. Ha f egyenletesen folytonos S -n, akkor S minden pontjában folytonos. Ha f Lipschitz folytonos egy tartományban, akkor ott egyenletesen is folytonos.

Bizonyítás. Tetszőleges ε számhoz a $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ megfeleltetés jó lesz.

1.2.3. Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

1.2.3. Tétel. Legyen S korlátos és zárt tartomány $\mathbb{R}^2$ -ben. Tegyük fel, hogy $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen is folytonos.

Bizonyítás. Indirekt, "lemásoljuk" az egyváltozós bizonyítást. Tegyük fel, hogy a függvény nem egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, melyre nincs "jó" δ , azaz minden $\delta > 0$ -hoz léteznek P, P' pontok, melyekre

$$\|P - P'\| < \delta, \quad \text{de} \quad |f(P) - f(P')| > \varepsilon.$$

Tekintsük ezt az ε -t. Ekkor a $\delta = 1/n$ -hez is létezik P_n, P'_n , hogy:

$$\|P_n - P'_n\| < \frac{1}{n}, \quad |f(P_n) - f(P'_n)| > \varepsilon.$$

Vizsgáljuk meg a (P_n) és (P'_n) sorozatokat.

Mivel S korlátos, mind a két sorozat korlátos, ezért létezik konvergens részsorozatok. Legyenek ezek az egyszerűség kedvéért maguk az eredeti sorozatok:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P'_n = P'.$$

Belátjuk, hogy $P = P'$. Ezek távolságát becsüljük a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\begin{aligned} \|P - P'\| &= \|P - P_n + P_n - P'_n + P'_n - P'\| \leq \\ &\leq \|P - P_n\| + \|P_n - P'_n\| + \|P'_n - P'\|. \end{aligned}$$

Legyen $\eta > 0$ tetszőleges. Ehhez létezik N küszöbindex, hogy ha $n > N$ akkor

$$\|P_n - P\| < \frac{\eta}{3}, \quad \|P'_n - P'\| < \frac{\eta}{3}, \quad \frac{1}{n} < \frac{\eta}{3}$$

Ezért az előző egyenlőtlenséget folytatva:

$$\|P - P'\| \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta$$

Így a $P = P'$ pont az S tartománynak egy toródási pontja, és S zártsága miatt $P \in S$. Itt a függvény folytonos. A kiválasztott $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\forall Q$ -ra: $\|Q - P\| < \delta$ -ból következik, hogy $|f(Q) - f(P)| < \varepsilon$, ami ellentmond az indirekt feltételnek. Ezzel az tételt beláttuk.

1.2.4. Tétel. (Weierstrass I. tétele) Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt. Ekkor f korlátos, azaz értékkészlete korlátos.

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy f értékkészlete nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy minden n természetes számnál nagyobb értéket felvesz valamely $P_n = (x_n, y_n) \in S$ pontban, azaz

$$|f(x_n, y_n)| > n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mivel a (P_n) pontsorozat része a korlátos S halmaznak, ezért a pontsorozat is korlátos. Kiválasztható belőle konvergens rész-sorozat, legyen ez (P_{n_k}) . Ennek határértékét jelölje P_0 . S zárttsága miatt $P_0 \in S$, és itt f folytonos. Ezért egyrészt a folytonosság miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) < \infty,$$

másrészt az indirekt feltevés szerint

$$|f(x_{n_k}, y_{n_k})| > n_k, \quad n_k \rightarrow \infty,$$

ami ellentmondás.

1.2.5. Tétel. (*Weierstrass II. tétele*) *Korlátos és zárt tartományon folytonos függvény felveszi a maximumát és minimumát.*

Bizonyítás. Legyen $H := \{f(x, y) : (x, y) \in S\}$. Jelölje ennek supremumát $\beta = \sup H$. A supremum definíciója miatt létezik $(h_n) \subset H$ sorozat, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \beta.$$

Tudjuk, hogy $h_n = f(x_n, y_n)$, ahol $P_n = (x_n, y_n)$. A (P_n) sorozat S -ben van, ezért korlátos, tehát van konvergens részsorozata, legyen ez (P_{n_k}) .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k} = P \in S,$$

hiszen S zárt. Ebben a P pontban a függvény folytonos, tehát

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_{n_k}) = f(P).$$

Másrészt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_{n_k}) = \beta,$$

hiszen részsorozata $(f(x_n, y_n))$ -nek, ezért $\beta = f(P) < \infty$.

1.2.4. Határérték

1.2.7. Definíció. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ az értelmezési tartomány egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban L , azaz

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy ha

$$(x,y) \in S, \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta,$$

akkor $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

Az egydimenziós esethez hasonlóan most is megfogalmazható az *átviteli elv*:

1.2.2. Állítás.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

pontosan akkor teljesül, ha $\forall P_n = (x_n, y_n) \in S, P_n \neq P_0$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = L.$$

1. *Példa.* Legyen $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$, és tekintsük azt az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(x,y) = e^{-x^2/y},$$

ha $y \neq 0$. Legyen $P_0 = (x_0, 0)$ pont, ahol $x_0 \neq 0$ rögzített. Ekkor

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} e^{-x^2/y} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{-x_0^2/y} = 0$$

Ha az $y = kx^2$ parabola mentén tartunk a 0-hoz, azaz tekintünk egy $(x_n, kx_n^2) = P_n$ sorozatot, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Ekkor minden n -re

$$f(P_n) = e^{-x_n^2/kx_n^2} = e^{-1/k}.$$

Tehát a $(0, 0)$ -beli határérték függ a sorozat választásától, ezért a függvény határértéke nem létezik a $(0, 0)$ pontban.

2. *Példa.* Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x+2y}{3x-y} & \text{ha } 3x-y \neq 0 \\ 0 & \text{ha } 3x-y = 0 \end{cases}$$

Legyen $a_n = 1/n$, és az egyik pontsorozat

$$P_n = (a_n, a_n^2).$$

Ekkor

$$f(P_n) = \frac{n+2}{3n-1},$$

és így tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \frac{1}{3}.$$

Legyen egy másik pontsorozat

$$P'_n = (a_n^2, a_n).$$

Ekkor

$$f(P'_n) = \frac{1+2n}{3-n},$$

és így tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P'_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(P'_n) = -2.$$

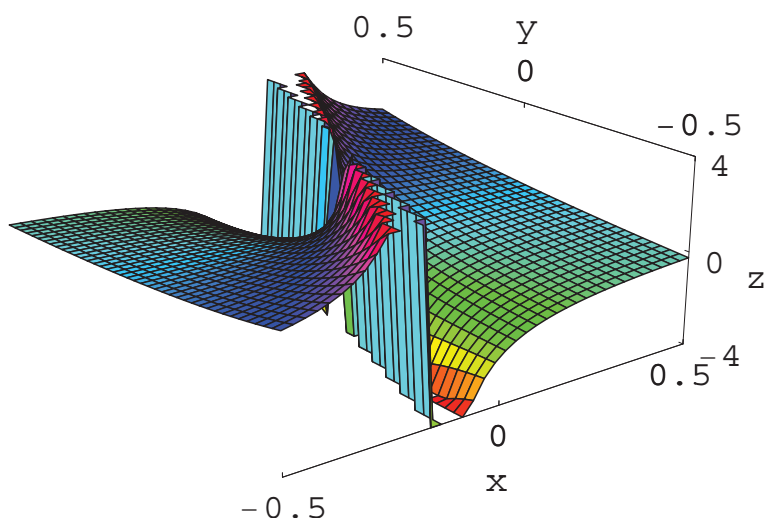
Ezért az origóban nincs határértéke a függvénynek. A fenti gondolatmenetben lényegében az történik, hogy a $(0, 0)$ -beli határértéket kétfajta közelítéssel próbáljuk meg kiszámolni. Egyrészt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x+2y}{3x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Másrészt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2y}{3x-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{-y} = -2$$

Tehát mivel $-2 \neq 1/3$ ezért nincs határérték. Megjegyezzük, hogy ha a fenti határértékek egyenlőek lennének, az még nem volna elég a kétdimenziós határérték létezéséhez.



1.9. ábra. A 2. példában szereplő függvény a 0 körül

1.3. Differenciálszámítás

1.3.1. Parciális deriváltak

1.3.1. Definíció. Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen (x_0, y_0) az S halmaz belső pontja. Ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

véges határérték, akkor ezt a mennyiséget a függvény x szerinti parciális deriváltjának nevezzük az (x_0, y_0) pontban. Ezt így jelöljük:

$$f'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

Ha létezik a

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

véges határérték, akkor ezt a mennyiséget a függvény y szerinti parciális deriváltjának nevezzük az (x_0, y_0) pontban. Ezt így jelöljük:

$$f'_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0).$$