ANALÍZIS II.

Előadás jegyzetek

Vágó Zsuzsanna

2003. május

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Többváltozós valós függvények

1.1. $\mathbb{R}^2$ topológiája

1.1.1. Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$-ben.

A sík pontjait rögzített koordináta-rendszerben megadott rendezett számpárokkal jellemezzük: $P = (x, y)$. Ezen pontok halmazát $\mathbb{R}^2$-vel jelöljük.

1.1.1. Definíció. *Legyen $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két pont $\mathbb{R}^2$-ben. Ezek távolsága:*

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Két pont távolságának jelölésére szokás még az alábbiakat is használni:

$$\rho(P, P'), \qquad \|P - P'\|.$$

1.1.2. Definíció. *Legyen adottak $C \epsilon \mathbb{R}^2$, $C = (A, B)$, $\varepsilon > 0$ valós szám. A C pont körüli ε-sugarú gömböt*

$$S(C, \varepsilon) = \{P \epsilon \mathbb{R}^2 : \overline{PC} < \varepsilon\}$$

definiálja.

Így egy körlemezt kapunk C középponttal.

Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:

$$P_n = (x_n, y_n), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

Példa. $P_n = (n, n^2)$, $P_n = ((-1)^n, 2)$.

Megjegyzés: A sorozat tagjai nem feltétlenül különböznek.

1.1.3. Definíció. *A (P_n) sorozat korlátos, ha létezik egy olyan $S(C, \varepsilon)$ gömb, amely a sorozat minden elemét tartalmazza. Tehát ez azt jelenti, hogy (P_n) korlátos, ha létezik $C = (A, B)$ és $\varepsilon > 0$ hogy minden $P_n = (x_n, y_n)$-re teljesül, hogy*

$$\sqrt{(x_n - A)^2 + (y_n - B)^2} < \varepsilon.$$

Példa. : $P_n^{(1)} = (n, n^2)$ nem korlátos; $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$ korlátos.

1.1.4. Definíció. *A (P_n) sorozat konvergens és határértéke Q, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{P_nQ} = 0.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q.$$

Ezzel ekvivalens definíció:

1.1.5. Definíció. *A (P_n) sorozat konvergens és határértéke Q ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén:*

$$\|P_n - Q\| < \varepsilon.$$

Másképp fogalmazva: Minden $\varepsilon > 0$ esetén az $S(Q, \varepsilon)$ gömbön kívül csak véges sok pont van (véges sok indexű).

Következmény. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

Példa. Legyen $P_n = (e^{-n/4} \cos n, e^{-n/4} \sin n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Ekkor

$$\|P_n - 0\| = \|P_n\| = \sqrt{e^{-n/2} \cos^2 n + e^{-n/2} \sin^2 n} = \sqrt{e^{-n/2}} = e^{-n/4}.$$

Igy $P_n \to 0$.

1.1.1. Állítás. *Tekintsük a $P_n = (x_n, y_n)$ elemekből álló sorozatot. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

1. *(P_n) konvergens és*
$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q = (x, y).$$

2. *Az (x_n) és (y_n) sorozatok konvergensek és*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x; \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $N(\varepsilon)$ index, hogy $\|P_n - Q\| < \varepsilon$, ha $n \geq N(\varepsilon)$. Ekkor nyilván $|x_n - x| < \varepsilon$ és $|y_n - y| < \varepsilon$ is teljesülnek.

2. $\Rightarrow$ 1. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy küszöbindex, hogy minden $n \geq N$-re:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor $|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2 < \varepsilon^2$ így $\|P_n - Q\| = \sqrt{|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2} < \varepsilon$.

Cauchy-féle feltétel

A (P_n) sorozat teljesíti a Cauchy-féle feltételt, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre minden $n, m \geq N$ esetén

$$\|P_n - P_m\| < \varepsilon.$$

1.1.2. Állítás. *A (P_n) pontsorozat pontosan akkor konvergens, ha teljesíti a Cauchy-féle feltételt.*

Bizonyítás. Csak az egyik irányt bizonyítjuk. Belátjuk, hogy ha a sorozat konvergens, akkor teljesíti a Cauchy-féle feltételt. A konvergencia miatt ε-hoz létezik N küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P\| < \varepsilon/2$$

minden $n \geq N$ esetén. Ekkor ha $n, m \geq N$, akkor a háromszögegyenlőtlenséget felhasználva azt írhatjuk, hogy

$$\|P_n - P_m\| < \|P_n - P\| + \|P - P_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Bolzano-Weierstrass-tétel

1.1.1. Tétel. *Legyen (P_n) korlátos pontsorozat a síkon. Ekkor létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Ha (P_n) korlátos és $P_n = (x_n, y_n)$, akkor (x_n) és (y_n) is korlátos sorozatok. Ekkor létezik (x_n)-nek konvergens részsorozata, legyen ez (x_{m_k}), illetve létezik (y_{m_k})-nak is konvergens részsorozata, ez legyen (y_{n_k}). Ekkor nyilván $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ is konvergens.

1.1.2. Általánosítás $\mathbb{R}^n$-re

Az n dimenziós $\mathbb{R}^n$ elemeit rendezett szám n-esek jelentik: $P = (x_1, ..., x_n)\epsilon\mathbb{R}^n$, $P' = (x'_1, ..., x'_n)\epsilon\mathbb{R}^n$. Ezeket hívjuk az n dimenziós tér pontjainak.

1.1.6. Definíció. *A két pont távolsága:*

$$\|P - P'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x'_i)^2} =$$

$$= \rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + ... + (x_n - x'_n)^2}$$

1.1.3. Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

1.1.7. Definíció. $\mathbb{R}^2$ *részhalmazait tartományoknak nevezzük.*

Példa. Téglalap. (Ez a két dimenziós intervallum) Legyenek $a < b$ és $c < d$ rögzített valós számok:

$$T = \{(x, y) : \; a \le x \le b, \quad c \le y \le d\}$$

Az intervallumot direkt szorzat alakban is írhatjuk: $[a, b] \times [c, d]$

Példa. Gömb. (Ez 2 dimenzióban egy körlemeznek felel meg) Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám és $C\epsilon\mathbb{R}^2$ síkbeli pont adottak,

$$S(C, \varepsilon) = \{(x, y) : \sqrt{(x - A)^2 + (y - B)^2} < \varepsilon\}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy egy dimenzióban egy a pont környezetei az a középpontú $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervallumok voltak, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén. Ezt általánosítjuk.

1.1.8. Definíció. *Egy $P = (x, y)$ pont környezetei azon $S\subset\mathbb{R}^2$ tartományok, melyek P közeppontú gömbök.*

Tekintsünk egy teszőleges $S\subset\mathbb{R}^2$ tartományt.

1.1.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy* $Q \epsilon \mathbb{R}^2$ *határpontja* S*-nek, ha a* Q *pontnak minden* U *környezete rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: létezik* $P' \epsilon U$*, melyre* $P' \epsilon S$ *és létezik* $P'' \epsilon U$ *melyre* $P'' \notin S$*.*

Ha Q nem határpontja S-nek, akkor van olyan U környezete, melyre az alábbi két eset közül valamelyik teljesül

1. vagy $U \subset S$, ezek a belső pontok,
2. vagy $U \cap S = \emptyset$, ezek a külső pontok

1.1.1. Következmény. *Tetszőleges* S *halmaz esetén a síkot 3 diszjunkt részre osztjuk:*

- *külső pontok,*
- *belső pontok, ezek halmazát :* $\operatorname{int}(S)$ *jelöli. (Ez az 'interior' szóból ered.)*
- *határpontok, ezeket halmazát* ∂S *jelöli. Lehetnek határpontok, amelyek elemei az adott halmaznak, és lehetnek, amelyek nem elemei.*

1.1.10. Definíció. *Az* S *halmaz zárt, ha minden határpontját tartalmazza. Az* S *halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont. Az* S *halmaz lezárása:*

$$\overline{S} = S \cup \partial S$$

Példa. A gömb nyílt halmaz. Ennek határpontjai:

$$\partial S(C, r) = \{P : \ \|P - C\| = r\},$$

és így lezárása:

$$\overline{S(C, r)} = \{P : \ \|P - C\| \leq r\}.$$

Példa. Legyen $S = \{(x, y) : \ x, y \epsilon \mathbb{Q}\}$. Ekkor a halmaz lezárása $\overline{S} = \mathbb{R}^2$.

1.1.11. Definíció. P *az* S *halmaz torlódási pontja, ha létezik olyan* (P_n) *sorozat, meyre* $(P_n) \subset S$*,* $p_n \neq P$*, és* $\lim_{n \to \infty} (P_n) = P$*.*

Torlódási pontok lehetnek: belső pontok és határpontok.

1.1.3. Állítás. *Ha P határpontja az S halmaznak, akkor torlódási pont is.*

Bizonyítás. Minden n-re $S(P, 1/n)$ tartalmaz S-beli pontot. Legyen ez P_n. Ekkor $\lim_{n\to\infty} P_n = P$.

1.1.12. Definíció. *Legyen P és P' két $\mathbb{R}^2$-beli pont. Őket összekötő folytonos vonal egy olyan*

$$\gamma : [\alpha, \beta] \ \to \ \mathbb{R}^2$$

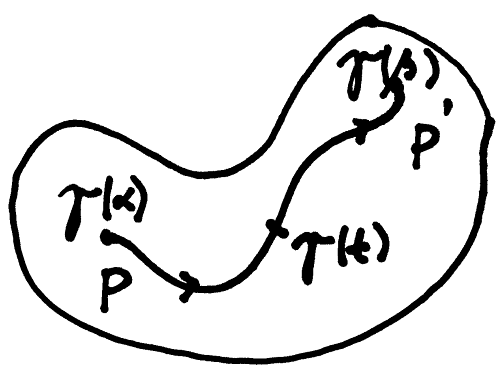
függvény, mely egy korlátos és zárt $[\alpha, \beta]$ valós intervallumon van értelmezve, értékkészlete $\mathbb{R}^2$-beli,

$$\gamma(\alpha) = P, \qquad \gamma(\beta) = P'.$$

Feltesszük továbbá, hogy a $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ koordinátafüggvények,

$$x, y : [\alpha, \beta] \ \to \ \mathbb{R}$$

folytonosak.



1.1. ábra. Két pontot összekötő vonal.

1.1.13. Definíció. *Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományt összefüggőnek nevezzük, ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.*

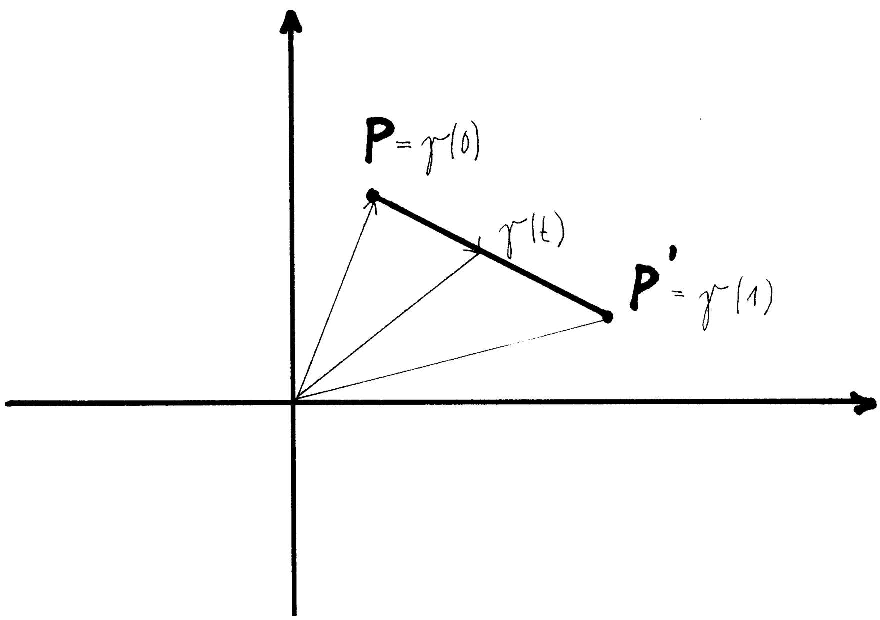
1.1.14. Definíció. *Legyen P és P' két $\mathbb{R}^2$-beli pont. A két pontot összekötő szakasz egy*

$$\gamma : [0, 1] \ \to \mathbb{R}^2$$

függvény, melyre

$$\gamma(t) := P + t(P' - P).$$

Speciálisan tehát $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = P'$.



1.2. ábra. Két pontot összekötő szakasz.

1.1.15. Definíció. *Az* $S \subset \mathbb{R}^2$ *tartományt konvexnek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.*

1.2. Kétváltozós függvények

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely S elemeihez egy valós számot rendel. Értelmezési tartományát D_f -fel jelöljük (="domain"), értékkészletét R_f-fel (="range").

Függvény megadása azt jelenti, hogy megadjuk az értelmezési tartományt (ha ez megváltozik, már egy másik függvényt adunk meg) és a hozzárendelés módját. Ez mindig egyértelmű, például az $u = \arctan(y/x)$ függvény esetében meg kell adni, hogy a főág értékére gondolunk. *Elnevezések:* (x, y): független változó, u: függő változó.

Legegyszerűbb példák:

1. *Lineáris függvény.*

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

ahol $a, b, c \epsilon \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

2. *Másodfokú polinom.*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

ahol $a, b, c, d, e, f \epsilon \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$

3. *Polinom*okat két dimenzióban úgy értelmezzük, mint monomiálok összege. Egy monomiál általános alakja:

$$a_{mn} x^m y^n.$$

Együtthatója $a_{mn} \epsilon \mathbb{R}$, foka a benne levő fokok összege: $m + n$. Egy polinom fokát úgy definiáljuk, mint a legmagasabb fokú monomiáljának foka .

Egy polinom *homogén*, ha a polinomban szereplő monomiálok foka ugyanaz. Például homogén másodfokú polinom

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

További példa kétváltozós függvényre:

$$f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2),$$

ennek értelmezési tartománya $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

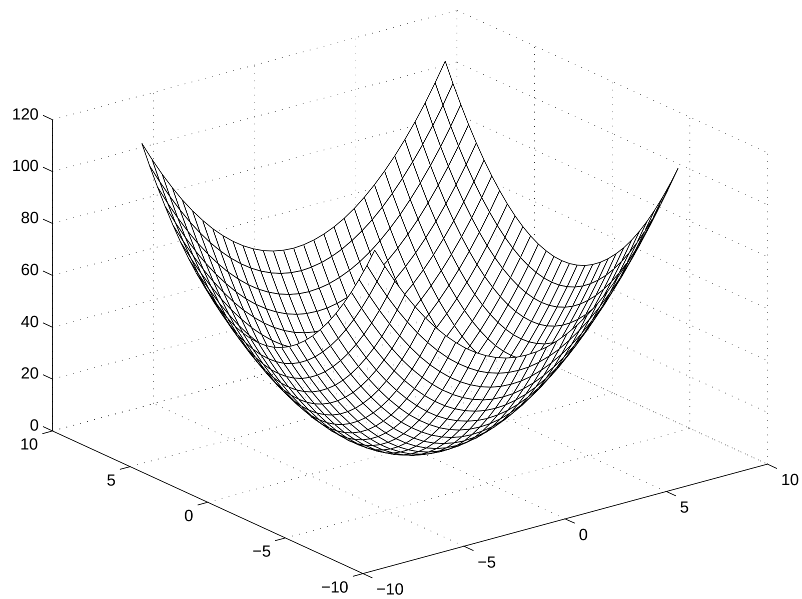
1.2.1. Geometriai reprezentáció

Az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt a térben az (x, y, u) számhármasok írják le, ahol $u = f(x, y)$. Az $\{(x, y, u) : \ u = f(x, y), \ (x, y) \epsilon S\}$ pontok felületet alkotnak a térben.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A felület egy darabja a 1.3. ábrán látható.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A megfelelő felület egy darabja a 1.4. ábrán látható.

Szintvonalak segítségével történő ábrázolás:



1.3. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény grafikonja.

A síkban ábrázoljuk azokat az (x, y) pontokat, melyekre $f(x, y) = k$ valamely rögzített $k \epsilon \mathbb{R}$ mellett.

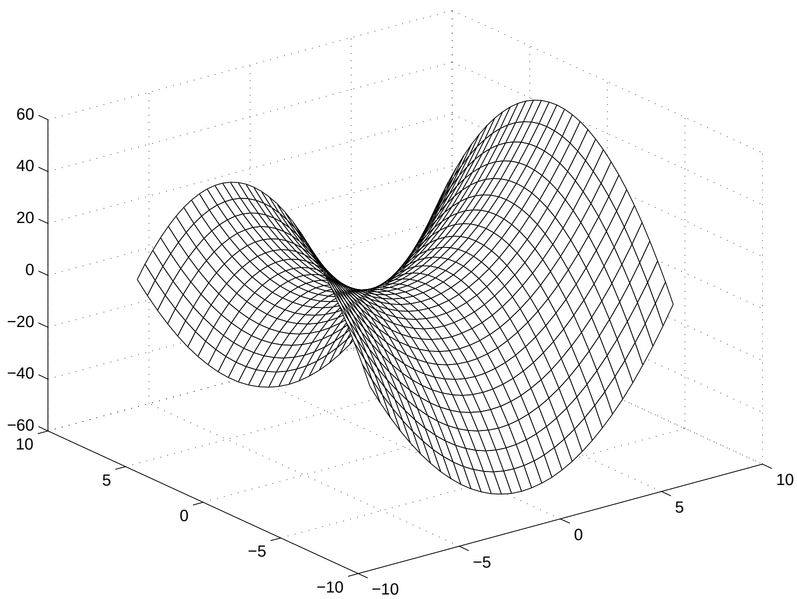
1.2.2. Folytonosság

Azt fogjuk megfogalmazni, hogy mit jelent az a tulajdonság, hogy egy f függvény folytonos a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban. Heurisztikusan, azt várjuk, hogy ha P közel van a P_0-hoz, akkor $f(P)$ is közel van $f(P_0)$-hoz.

1.2.1. Definíció. *Legyen P_0 az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvény folytonos a P_0 - ban, ha $f(P_0)$ tetszőleges U környezetéhez létezik P_0-nak olyan V környezete, hogy minden $P \epsilon V$-re $P \epsilon D_f$ esetén $f(P) \epsilon U$.*

Figyelembe véve a környezet definícióját, ezt így átfogalmazhatjuk:

1.2.2. Definíció. *Legyen $P_0 = (x_0, y_0)$ az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvény folytonos a P_0 pontban, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\delta > 0$ szám, melyre minden $(x, y) \epsilon D_f$ és $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ esetén $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ teljesül.*



1.4. ábra. Az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény grafikonja.

1.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvény sorozat-folytonos a P_0-ban, ha minden $(P_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre $\lim_{n\to\infty}(P_n) = P_0$, teljesül hogy $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$.*

A kétfajta fogalom ekvivalenciájáról szól az alábbi tétel:

1.2.1. Tétel. *Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos P_0-ban, ha ott sorozat-folytonos.*

Bizonyítás. HF

1.2.4. Definíció. *Ha egy függvény valahol nem folytonos, akkor ott szakadása van.*

Példák folytonosságra:

1. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}.$$

Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$, szakadás az $y = 0$ egyenes mentén van, hiszen a függvény tetszőleges (x, y) pontban folytonos, kivéve ha $y = 0$.

2. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha } \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A függvény folytonos, ha sem x sem y nem 0. Ha $y \neq 0$, akkor $f(x, y)$, mint x függvénye folytonos, és

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = 0.$$

Ha $x \neq 0$, akkor $f(x, y)$, mint y függvénye folytonos, és

$$\lim_{y \to 0} f(x,y) = 0.$$

Tekintsük az $x = y$ egyenest. Ezen egyenes mentén $f(x, x) \equiv 1$. Tehát ha ennek az egyenesnek a mentén egy sorozattal tartunk 0-ba, akkor a függvényértékek sorozata azonosan 1 lesz, így a határérték is. f tehát *nem folytonos a* $(0, 0)$*-ban.*

1.2.5. Definíció. *Egy adott* $(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2$ *pontot megadhatunk a polárkoordináták segítségével. Egyrészt a pont origótól vett távolsága:* r*, másrészt az origóból az pontba mutató vektornak az* x *tengellyel bezárt szöge:* θ

Így tehát a polárkoordinátákra $r\epsilon\mathbb{R}^+$, $\theta\epsilon[0, 2\pi)$.

1.2.1. Állítás. *A fenti hozzárendelés egy-egyértelmű megfeleltetés. (Kivéve a* $(0, 0)$ *pontot.)*

Bizonyítás. Ha adott (x, y), akkor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $\theta = \arctan(y/x)$, ennek a "főága". Ha r és θ adottak, akkor $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$

3. Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Folytonos-e a $(0,0)$ pontban?

A sorozat-folytonosságot igazoljuk. Legyen $\lim_{n\to\infty}(P_n)=0$ egy sorozat, és (P_n) polárkoordinátái legyenek $P_n=(r_n,\theta_n)$. Ekkor nyilván $\lim_{n\to\infty} r_n=0$, míg a (θ_n) sorozat bármilyen lehet. A fenti állításnak megfelelően $f(x,y)$ így írható, ha $(x,y)\neq 0$:

$$f(x,y)=\frac{r^2\cos^2(\theta)r^2\sin^2(\theta)}{r^2}=r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$$

Ezért valóban

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n)=0,$$

tehát a függvény folytonos.

1.2.2. Tétel. *(Bolzano tétel) Legyen* $f:S\to\mathbb{R}$ *adott folytonos függvény,* $S\subset\mathbb{R}^2$ *összefüggő tartomány. Legyen a tartomány két tetszőleges pontja* $P=(x.y)$ *és* $P'=(x',y')$, *melyekre például*

$$a=f(x,y)<f(x',y')=b.$$

Ekkor tetszőleges $c\epsilon(a,b)$ *számhoz létezik egy olyan* $Q=(x_0,y_0)\epsilon S$ *pont, melyre* $f(x_0,y_0)=c$.

Bizonyítás. Az S tartomány összefüggősége miatt létezik P-t és P'-t összekötő S-beli folytonos út. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan

$$\gamma:[\alpha,\beta]\ \to\ \mathbb{R}^2$$

függvény, melyre

$$\gamma(\alpha)=(x,y),\qquad \gamma(\beta)=(x',y'),$$

és a

$$\gamma(t)=(x(t),y(t))$$

koordináta-függvények folytonosak. Vezessük de az alábbi valós függvényt:

$$\begin{aligned} F:[\alpha,\beta] &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto f(x(t),y(t)). \end{aligned}$$

Ekkor F folytonos, és $F(\alpha)=a$, $F(\beta)=b$. Igy az egy-dimenziós folytonos függvényekre ismert Bolzano-tétel szerint létezik olyan $\xi\epsilon(\alpha,\beta)$, melyre $F(\xi)=c$. Ezért a $Q:=\gamma(\xi)\epsilon S$ pontra $f(Q)=c$.

1.2.6. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ adott függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos S-ben, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $P, P' \epsilon S$ pontokra $\|P - P'\| < \delta$, akkor $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$. A $\delta = \delta(\varepsilon)$ számot az ε-hoz tartozó folytonossági modulusnak hívjuk.*

1.2.7. Definíció. *Az $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény Lipschitz folytonos, ha létezik egy olyan $L > 0$ szám, melyre*

$$|f(P) - f(P')| \leq L \cdot \|P - P'\|$$

teljesül minden $P, P' \epsilon S$ pontra. (Itt $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$) Az L számot Lipschitz-konstansnak hívjuk.

1.2.2. Állítás. *Ha f egyenletesen folytonos S-n, akkor S minden pontjában folytonos. Ha f Lipschitz folytonos egy tartományban, akkor ott egyenletesen is folytonos.*

1.2.3. Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

1.2.3. Tétel. *Legyen S korlátos és zárt tartomány $\mathbb{R}^2$-ben. Tegyük fel, hogy $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy a függvény nem egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ hogy $\forall \delta > 0$-hoz léteznek P, P' pontok, melyekre $\|P - P'\| < \delta$, de $|f(P) - f(P')| > \varepsilon$. Tekintsük ezt az ε-t. Ekkor a $\delta = \frac{1}{n}$-hez is létezik P_n, P'_n, hogy:

$$\|P_n - P'_n\| < \frac{1}{n}, \qquad |f(P_n) - f(P'_n)| > \varepsilon.$$

Tekintsük a (P_n) és (P'_n) sorozatokat.

Mivel S korlátos, mind a két sorozat korlátos, ezért létezik konvergens részsorozatuk. Legyenek ezek az egyszerűség kedvéért maguk az eredeti sorozatok:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} P'_n = P'.$$

Belátjuk, hogy $P = P'$. Ezek távolságát becsüljük a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\|P - P'\| = \|P - P_n + P_n - P'_n + P'_n - P'\| \leq$$

$$\leq \|P - P_n\| + \|P_n - P'_n\| + \|P'_n - P'\|.$$

Legyen $\eta > 0$ tetszőleges. Ehhez létezik N küszöbindex, hogy ha $n > N$ akkor

$$\|P_n - P\| < \frac{\eta}{3}, \qquad \|P'_n - P'\| < \frac{\eta}{3}, \qquad \frac{1}{n} < \frac{\eta}{3}$$

Ezért az előző egyenlőtlenséget folytatva:

$$\|P - P'\| \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta$$

Így $P = P'$ és S zártsága miatt $P \epsilon S$. Ezért itt a függvény folytonos. A kiválasztott $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\forall Q$-ra: $\|Q - P\| < \delta$-ból következik, hogy $|f(Q) - f(P)| < \varepsilon$, ami ellentmond az indirekt feltételnek. Ezzel az tételt beláttuk.

1.2.4. Tétel. *(I. Weierstrass-tétel) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt. Ekkor f korlátos, azaz értékkészlete korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $H := \{f(x, y) : \ (x, y) \epsilon S\}$. Jelölje ennek supremumát $\beta = \sup H$. ($\beta = \infty$ is megengedett.) A supremum definíciója miatt létezik $(h_n) \subset H$ sorozat, hogy

$$\lim_{n \to \infty} h_n = \beta.$$

Tudjuk, hogy $h_n = f(x_n, y_n)$, ahol $P_n = (x_n, y_n)$. A (P_n) sorozat S-ben van, ezért korlátos, tehát van konvergens részsorozata, legyen ez (P_{n_k}). $\lim_{k\to\infty}(P_{n_k}) = P \epsilon S$, hiszen S zárt. Ebben a P pontban a függvény folytonos, tehát $f(P_{n_k}) \to f(P)$, ha $k \to \infty$. Másrészt $f(P_{n_k}) \to \beta$, hiszen részsorozata $(f(x_n, y_n))$-nek, ezért $\beta = f(P) < \infty$.

A fenti tételből azonnal következik az alábbi:

1.2.5. Tétel. *(II. Weierstrass tétel) Korlátos és zárt tartományon folytonos függvény felveszi a maximumát és minimumát.*

1.2.4. Határérték

1.2.8. Definíció. *Legyen* $f : S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós valós függvény,* $P_0 = (x_0, y_0)\epsilon\mathbb{R}^2$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvény határértéke a* $P_0 = (x_0, y_0)$ *pontban* L, *azaz*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ *-hoz létezik* $\delta > 0$ *szám, hogy ha* $(x,y)\epsilon S$, $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, *akkor* $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

Az egydimenziós esethez hasonlóan most is megfogalmazható az *átviteli elv*:

1.2.3. Állítás.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

pontosan akkor teljesül, ha $\forall P_n = (x_n, y_n)\epsilon S$, $P_n \neq P_0$ *sorozatra, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

teljesül,hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = L.$$

1. példa: Legyen $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x\epsilon\mathbb{R}\}$, és tekintsük azt az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(x,y) = e^{-x^2/y},$$

ha $y \neq 0$. Legyen $P_0 = (x_0, 0)$ pont, ahol $x_0 \neq 0$ rögzített. Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} e^{-x^2/y} = \lim_{y\to 0} e^{-x_0^2/y} = 0$$

Ha az $y = kx^2$ parabola mentén tartunk a 0-hoz, azaz tekintünk egy $(x_n, kx_n^2) = P_n$ sorozatot, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n =$, akkor

$$f(P_n) = e^{-x^2/kx_n^2} = e^{-1/k}.$$

Tehát a $(0,0)$-beli határérték függ a sorozat választásától, ezért a függvény határértéke nem értelmezhető a $(0,0)$-ban.

2.példa: Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3x-y} & \text{ha} \quad 3x-y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad 3x-y = 0 \end{cases}$$

A $(0,0)$-beli határértéket kétfajta közelítéssel próbáljuk meg kiszámolni. Egyrészt

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+2y}{3x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Másrészt

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+2y}{3x-y} = \lim_{y\to 0} -2 = -2$$

Tehát mivel $-2 \neq 1/3$ ezért nincs határérték. Megjegyzzük, hogy ha a fenti határértékek egyenlőek lennének, az még nem volna elég a 2 dimenziós határérték létezéséhez.

1.3. Differenciálszámítás

1.3.1. Parciális deriváltak

1.3.1. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen (x_0, y_0) az S halmaz belső pontja. Ha létezik az*

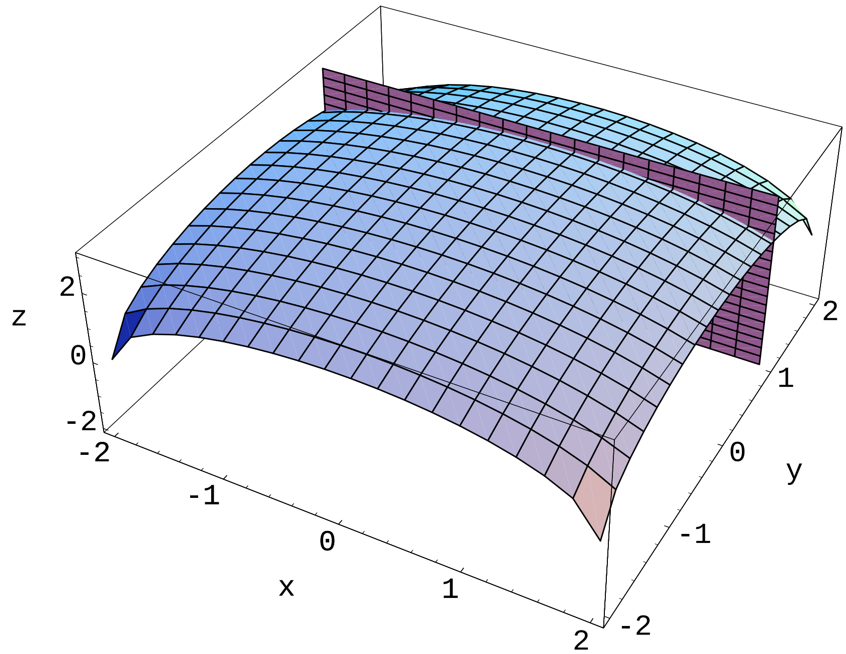
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

határérték, akkor ezt a mennyiséget a függvény x szerinti parciális deriváltjának nevezzük az (x_0, y_0) pontban. Ezt így jelöljük:

$$f'_x(x_0,y_0), \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0).$$

Hasonlóképpen definiáljuk az y szerinti parciális deriváltat az értelmezési tartomány belsejének egy (x_0, y_0) pontjában.

Ha a függvény parciális deriváltjai egy S tartomány minden pontjában léteznek, akkor *parciális derivált-függvény*ről beszélünk. Megjegyezzük, hogy a parciális derivált-függvény ugyanolyan típusú, mint az eredeti; kétváltozós, valós függvény.



1.5. ábra. Rögzített $y = 1$ mellett egyváltozós függvényt kapunk.

Ezt a definíciót általánosíthatjuk $\mathbb{R}^n$-re.

1.3.2. Definíció. *Legyen* $S \subset \mathbb{R}^n$ *egy tartomány,* $x = (x_1, ..., x_n) \epsilon$ int S *Az* i*-dik változó szerinti parciális deriváltat így értelmezzük:*

$$f'_{x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{h \to x_i} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, h, x_{i+1} \ldots, x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h - x_i},$$

feltéve, hogy a fenti határtérték létezik

Példa. Ha $f(x, y) = xy$, akkor ennek parciális deriváltjai $f'_x(x, y) = y$, $f'_y(x, y) = x$.

Ha a parciális deriváltfüggvénynek létezik parciális deriváltja, akkor másodrendű parciális deriváltat kapunk. Például:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = f''_{xy}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)}{\Delta y}.$$

A parciális deriválást értelmezhetjük a következőképpen is. Rögzített x_0 mellett definiáljuk az $f_1(y) = f(x_0, y)$ egyváltozós valós függvényt. Ha (x_0, y_0) belső pontja D_f-nek, akkor y_0 belső pontja f_1 értelmezési tarományának. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f'_1(y_0).$$

Példa. $f(x,y) = x^2 + y^2$. Ekkor az első deriváltak

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x \\ f'_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2y, \end{aligned}$$

a második deriváltak

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2 \\ f''_{yy}(x,y) &= 2 \\ f''_{yx}(x,y) &= 0 \\ f''_{xy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

A parciális deriváltak kiszámítására alapvetően kétfajta módszert használunk. Egyrészt az egyváltozós valós függvényekre megismert módszerek alapján, másrészt közvetlenül a definíció alapján.

Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2 y}{x^2+y^2} + 2x + 3 & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 3 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Léteznek-e a parciális deriváltak a $(0,0)$ pontban?
Számoljuk ki a $f'_x(0,0)$ parciális deriváltat a definíció alapján:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + 3 - 3}{h} = 2.$$

Ugyanezt megtehetjük az egyváltozós valós függvényre megismert módszerek alapján. Ha $f(x,0) = f_1(x)$, akkor ez a függvény

$$f_1(x) := \begin{cases} \dfrac{0(x+2)^2}{x^2+0} + 2x + 3 = 2x + 3 & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ \\ 3 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ekkor $f'_1(0) = 2$, vagyis az x szerinti parciális derivált létezik.

Próbáljuk meg kiszámítani $f'_y(0,0)$-t először a definíció alapján.

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4}{h^2},$$

és a fenti határérték nem létezik. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az egyváltozós valós függvényekre megismert módszerek alapján számolunk. Legyen ugyanis $f(0,y) = f_2(y)$. Ekkor

$$f_2(y) := \begin{cases} \dfrac{y(0+2)^2}{0+y^2} + 3 = \dfrac{4}{y} + 3 & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ \\ 3 & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}$$

Ez a függvény nem deriválható $y = 0$-ban.

Láttuk, hogy egyváltozós valós függvények esetén ha egy függvény differenciálható egy a pontban, akkor ott folytonos is. Kérdés, hogy a ha a parciális deriváltak léteznek, akkor vajon folytonos-e a függvény az adott pontban? NEM FELTÉTLENÜL.

Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A parciális deriváltak léteznek a $(0,0)$ pontban, hiszen

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ f'_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0. \end{aligned}$$

Mégis azt állítjuk, hogy a függvény nem folytonos $(0,0)$-ban. $y = kx$-et behelyettesítve ugyanis azt kapjuk, hogy

$$f(x,kx) = \frac{2x \cdot kx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2},$$

vagyis különböző egyenesek mentén 0-hoz tarva a határérték az egyenes meredekségétől függ.

Szemléletesen, a probléma abból adódik, hogy a parciális deriváltak megadják a függvény simaságát az x ill. az y tengelyek mentén. Több információ nincs.

1.3.1. Tétel. *Legyen* $f : S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós valós függvény,* $(x_0, y_0) \epsilon \text{ int } S$. *Tegyük fel, hogy az* f'_x *és* f'_y *parciális deriváltak léteznek* (x_0, y_0) *valamely* $U \subset \mathbb{R}^2$ *környezetében. Tegyük fel továbbá, hogy a parciális deriváltak itt korlátosak, azaz*

$$|f'_x(x, y)| \leq M, \qquad |f'_y(x, y)| \leq M,$$

tetszőleges $(x, y) \epsilon U - ra$. *Ekkor* f *függvény folytonos az* (x_0, y_0)*-ban .*

Bizonyítás előtt ismétlésképpen kimondjuk a *Lagrange-féle középértéktételt*. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos illetve belső pontjaiban differenciálható függvény. Ekkor van olyan $\xi \epsilon [a, b]$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Kicsit másképpen megfogalmazva: ha $f : [a, a + h] \to \mathbb{R}$ folytonos és differenciálható, akkor létezik $\xi \epsilon [a, a + h]$, melyre $f(a + h) - f(a) = h \cdot f'(\xi)$. A $\xi = a + \theta h$ jelöléssel, ahol $0 < \theta < 1$, azt írhatjuk, hogy

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h).$$

Bizonyítás. Legyen $(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Nézzük meg a függvény megváltozását. A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leq$$

$$\leq |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| + |f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \quad (1.1)$$

A Lagrange-féle középértéktételből következik, hogy

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f_2(y_0 + \Delta y) - f_2(y_0) =$$

$$= f'_2(\xi_y)\Delta y = f'_y(x_0 + \Delta x, \xi_y)\Delta y.$$

A második tag hasonlóan írható:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0) = f'_1(\xi_x)\Delta x = f'_x(\xi_x, y_0)\Delta x.$$

Itt $\xi_x \epsilon (x_0, x_0 + \Delta x)$, $\xi_y \epsilon (y_0, y_0 + \Delta y)$. Így az (1.1) egyenlőtlenséget folytatva:

$$\leq |f'_x(\xi_x, y_0)||\Delta x| + |f'_y(x_0 + \Delta x, \xi_y)||\Delta y| \leq M(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

Tehát:

$$|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)| \leq M(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

ez pedig maga a Lipschitz-féle feltétel, tehát a függvény folytonos (x_0, y_0)-ban.

Az előző példa folytatása. Igazoljuk, hogy ebben az esetben nem teljesülnek a fenti tétel feltételei, azaz a $(0,0)$ bármely környezetében a parciális deriváltak nem korlátosak. **HF.**

Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{ha } \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Igazoljuk a fenti tétel segítségével, hogy $f(x,y)$ folytonos $(0,0)$-ban. Meghatározzuk a parciális deriváltakat a pontban és környezetében.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{h^2}}}{h} = 0,$$

$$f'_x(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Elegendő belátni, hogy ezek korlátosak a $(0,0)$ egy környezetében.

Tekintsünk egy r sugarú gömböt az origó körül.

$$U = \{(x,y): \ \sqrt{x^2+y^2} < r\}.$$

Itt $|f'_x|$ illetve $|f'_y|$ korlátosak. **HF.**

1.3.2. Tétel. *Legyen* $f: S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós valós függvény,* $(x,y) \epsilon \ \mathrm{int}\ S$*. Ha a pont egy környezetében léteznek az* f''_{xy} *és* f''_{yx} *másodrendű parciális deriváltak, és az adott pontban folytonosak is, akkor itt a deriválások sorrendje felcserélhető, azaz*

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

Példa. Adunk ellenpéldát arra, hogy a fenti egyenlőség nem teljesül, ha a tételbeli feltétel nem igaz. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Meghatározzuk a vegyes másodrendű parciális deriváltakat a $(0,0)$ pontban:

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}hy}{h} = y \lim_{h\to 0} \frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y,$$

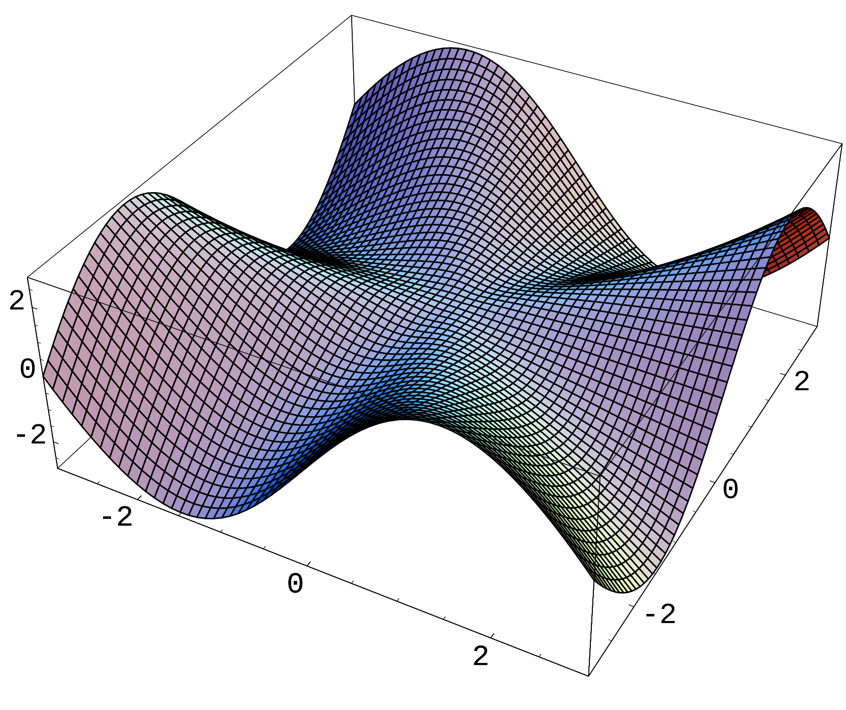
$$f''_{yx}(0,0) = -1.$$

Fordított sorrendben deriválva

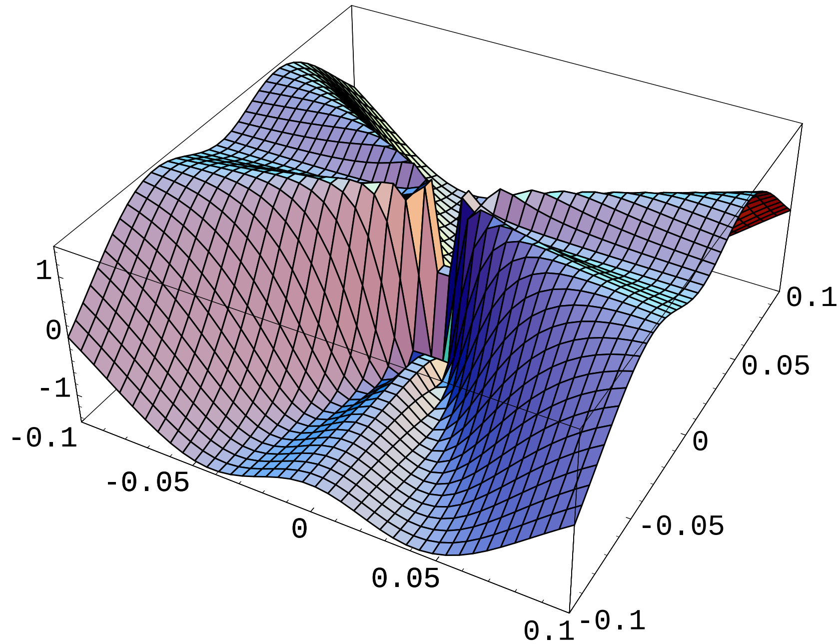
$$f'_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = x,$$

$$f''_{xy}(0,0) = 1.$$

HF: miért ellenpélda? (Ld. az ábrákat)



1.6. ábra. A példában szereplő függvény



1.7. ábra. A példában szereplő függvény vegyes második deriváltja , f''_{yx}.

1.3.2. Teljes differenciálhatóság

Emlékeztetünk arra, hogy az $f(x)$ egyváltozós valós függvény esetén azt mondtuk, hogy f differenciálható az $x\epsilon$ int D_f pontban, ha a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A$$

különbségi hányados határértéke létezik. Ekkor $f'(x) = A$

Ez azt jelenti, hogy ha Δx elég kicsi, akkor

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\cdot \Delta x,$$

ahol A független Δx-től és

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

1.3.3. Definíció. *Egy $h(x)$ függvény kisordó a 0-ban, ha*

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x} = 0.$$

Ezt úgy jelöljük, hogy $h(x) = o(x)$.

1.3.4. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(x, y) \epsilon$ int S. Azt mondjuk, hogy f függvény differenciálható (x, y)-ban, ha léteznek olyan A, B, C szḿok, hogy*

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \qquad (1.2)$$

teljesül elegendően kicsi Δx és Δy mellett, ahol A, B, C függetlenek Δx-től és Δy-tól.

1.3.3. Tétel. *Ha f differenciálható az (x, y) pontban, akkor ott folytonos is és léteznek az adott pontban vett parciális deriváltak. Továbbá a (1.2) képletben szereplő konstansok*

$$C = f(x, y); \qquad A = f'_x(x, y); \qquad B = f'_y(x, y).$$

Bizonyítás.

1. Válasszunk $\Delta x = \Delta y = 0$-t. Ekkor az (1.2) egyenlet fennáll:

   $$f(x, y) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C + 0 = C.$$

   Tehát a C megegyezik a helyettesítési értékkel. Ez alapján könnyen beláthatjuk a folytonosságot:

   $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) =$$

   $$= \lim_{\Delta x \to 0} A\Delta x + \lim_{\Delta y \to 0} B\Delta y + C + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = C.$$

2. Igazoljuk az A-ra vonatkozó állítást. Legyen $\Delta y = 0$. Ekkor az egyenlet:

   $$f(x + \Delta x, y) = A\Delta x + f(x, y) + o(|\Delta x|).$$

   Ez alapján számoljuk ki a parciális deriváltat:

   $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}) = A.$$

Következmény. Ha az f függvény diffferenciálható az (x, y) pontban, akkor elegendően kicsi Δx, Δy mellett így írható:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y)+f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \quad (1.3)$$

A derivált geometriai jelentése is hasonló az egydimenziós esethez. Ha a függvény differenciálható egy pontban, akkor a pont közelében a függvény értékét az érintősík segítségével közelíthetjük. A sík megadásához megadjuk egy pontját - ez $(x, y, f(x, y))$ - és megadjuk a sík meredekségét, ami a két parciális derivált.

1.3.5. Definíció. *Ha az f függvény differenciálható az (x, y) pontban, akkor ebben a pontban a derivált az alábbi kétdimenziós vektor lesz:*

$$\text{grad } f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

Ha az f függvény egy S_0 halmaz minden pontjában differenciálható, akkor a deriváltfüggvény

$$\text{grad } f : \ S_0 \to \mathbb{R}^2$$

típusú lesz.

1.3.4. Tétel. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, $(x, y)\epsilon$ int S. Tegyük fel, hogy $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ parciális deriváltak léteznek egy környezetben, és folytonosak ebben a pontban. Ekkor f differenciálható (x, y)- ban.*

Bizonyítás. A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x+\Delta x, y)-f(x, y) =$$

$$= f'_y(x + \Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta y + f'_x(x + \theta'\Delta x, y)\Delta x$$

valamely $0 < \theta, \theta' < 1$ konstansokkal. A parciális deriváltak folytonossága miatt:

$$f'_y(x + \Delta x, y + \theta\Delta y) = f'_y(x, y) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$$

$$f'_x(x + \theta'\Delta x, y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_2(\Delta x),$$

ahol

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2(\Delta x) = 0.$$

Így az előző egyenlőségbe visszahelyettesítve:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \Delta x\varepsilon_2 + \Delta y\varepsilon_1,$$

azaz f differenciálható.

Megjegyzés. A (1.3) összefüggés tömören így is írható:

$$\Delta f(x,y) := f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \text{grad } f(x,y)\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}).$$

Megjegyzés A fenti tétel feltétele *nem szükséges* a teljes differenciálhatósághoz. Legyen ugyanis

$$f(x,y) = |xy|.$$

Ekkor

$$f(x,y) - f(0,0) = 0\cdot x + 0\cdot y + |xy|$$

megfelel a (1.2) feltételnek, hiszen

$$|xy| = o(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Másrészt könnyen belátható, hogy $f'_x(0,y)$, $y\neq 0$ és $f'_y(x,0)$, $x\neq 0$ parciális deriváltak nem léteznek. **HF**.

A fenti definíciókat általánosítjuk $\mathbb{R}^n$-re. Legyen $S\subset\mathbb{R}^n$ adott tartomány, S elemei: $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Adott egy $f:\ S\to\mathbb{R}$ n-változós valós függvény.

1.3.6. Definíció. *Legyen x belső pontja S-nek. Az f függvény differenciálható x-ben, ha elegendően kicsi $\Delta x = (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$ megváltozás esetén, ahol $x+\Delta x\epsilon S$, teljesül az alábbi összefüggés:*

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(\|\Delta x\|), \tag{1.4}$$

ahol $A\epsilon\mathbb{R}^n$ független Δx-től, $\|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}$

Következmény. A kétváltozós esethez hasonlóan igazolható, hogy ha f differenciálható, akkor a (1.4) képletben szereplő konstans

$$A = (f'_{x_1}(x),\ldots,f'_{x_n}(x)).$$

1.3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy f függvény parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy adott x pontban. Ekkor f teljesen differenciálható.*

1.3.3. Iránymenti derivált

1.3.7. Definíció. *Legyen $\alpha\epsilon[0,2\pi)$. Az α irányú iránymenti deriváltat így értelmezzük:*

$$D_\alpha f(x,y) = \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0+} \frac{f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha) - f(x,y)}{\rho},$$

ha ez a határérték létezik.

Ez azt jelenti, hogy az $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ fügvényértéket csak megadott irányban nézzük, nevezetesen:

$$\Delta x = \rho\cos\alpha, \qquad \Delta y = \rho\sin\alpha,$$

ahol $\rho\epsilon\mathbb{R}^+$.

1.3.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható (x,y)-ban. Ekkor itt létezik az iránymenti derivált tetszőleges $\alpha\epsilon[0,2\pi)$ esetén, és*

$$D_\alpha f(x,y) = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha.$$

Bizonyítás. A differenciálhatóság miatt

$$f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha) = f(x,y) + f'_x(x,y)\rho\cos\alpha + f'_y(x,y)\rho\sin\alpha + o(|\rho|)$$

ha $|\rho|$ elegendően kicsi. Ebből következik, hogy

$$\frac{f(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\sin\alpha) - f(x,y)}{\rho} = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha + \frac{o(|\rho|)}{\rho},$$

melynek határértékeként az állítást kapjuk.

Megjegyzés. Speciális esetben, $\alpha = 0$ ill. $\alpha = \pi/2$-re megkapjuk a parciális deriváltakat:

$$D_{\alpha=0} f(x,y) = f'_x(x,y), \qquad D_{\alpha=\pi/2} f(x,y) = f'_y(x,y).$$

Általában az iránymenti derivált:

1.3.8. Definíció. *Adott egy* $v \epsilon \mathbb{R}^2$ *irány, melyre* $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$. *A* v *iránymenti deriváltat egy* (x, y) *pontban így értelmezzük:*

$$D_v f(x,y) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{f(x + \rho v_1, y + \rho v_2) - f(x,y)}{\rho},$$

ha ez a határérték létezik.

Megjegyzés. A $D_v f(x, y)$ iránymenti derivált valós szám.

Ezt a definíciót általánosítjuk $\mathbb{R}^n$-re:

1.3.9. Definíció. *Legyen adott az* $f : S \to \mathbb{R}$ *függvény, ahol* $S \subset \mathbb{R}^n$ *egy adott tartomány,* $x \epsilon \operatorname{int} S$ *belső pontja* S*-nek. Adott egy* v *irány, azaz* $v = (v_1, \ldots, v_n) \epsilon \mathbb{R}^n$*, melyre:* $\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)^{1/2} = 1$. *Ekkor az* f *függvény* v *irányú deriváltja*

$$D_v f(x) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{f(x + \rho v) - f(x)}{\rho},$$

ha létezik és véges.

1.3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy* f *teljesen differenciálható* x*-ben. Ekkor minden* v *irányban létezik* $D_v f(x)$ *és*

$$D_v f(x) = v_1 f'_{x_1}(x) + \ldots + v_n f'_{x_n}(x) = \sum_{i=1}^n v_i f'_{x_i}(x)$$

Példa. Legyen

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

azaz a függvény egy ponthoz hozzárendeli az origótól vett távolságát.

Adott α irányhoz tartozó irányvektor $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Határozzuk meg a $D_\alpha f(x, y)$ iránymenti deriváltat.

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta,$$

$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\theta,$$

ahol θ az (x, y) pont második polárkoordinátája. Ekkor:

$$D_\alpha f(x,y) = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha = \cos\theta\,\cos\alpha + \sin\theta\,\sin\alpha = \cos(\theta-\alpha).$$

Megjegyezzük, hogy ha $\alpha = \theta$, akkor az iránymenti derivált maximális, míg $\theta - \alpha = \pi/2$ esetén az iránymenti derivált 0.
HF Hogyan értelmezhetjük geometriailag ezt a tényt?

1.3.4. Összetett függvény differenciálása

Adott $f(u, v)$ kétváltozós függvény, ahol az u és v változók nem függetlenek, hanem

$$u = \Phi(x, y), \qquad v = \Psi(x, y).$$

1.3.10. Definíció. *Legyenek $\Psi, \Phi : R \to \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ adott kétváltozós függvények. Jelölje: $S := \{(u, v) : u = \Phi(x, y),\ v = \Psi(x, y),\ (x, y)\epsilon R\}$. Ekkor az összetett függvény, melyet az*

$$F(x, y) = f(\Phi(x, y), \Psi(x, y))$$

képlet definiál olyan $F : R \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény , melyre

$$(x, y) \mapsto f(\Phi(x, y), \Psi(x, y)).$$

Példa. Legyen

$$F(x, y) = e^{xy} sin(x + y).$$

Ezt a függvényt így tudjuk összetett függvényként értelmezni. Legyenek

$$\begin{aligned} u &= \Phi(x, y) = xy \\ v &= \Psi(x, y) = x + y \\ f(u, v) &= e^u \sin(v) \end{aligned}$$

A definícióból könnyen adódik az alábbi állítás:

1.3.2. Állítás. *Ha a Φ, Ψ függvények folytonosak (x, y)-ban, és f folytonos az*

$$(u, v) = \Phi(x, y), \Psi)(x, y))$$

pontban, akkor F is folytonos (x, y)-ban.

1.3.7. Tétel. *(Láncszabály.) Tegyük fel, hogy Φ, Ψ differenciálhatók (x, y)-ban, és f is differenciálható az $(u, v) = (\Phi(x, y), \Psi(x, y))$ pontban. Ekkor F is differenciálható (x, y)-ban, és parciális deriváltjai:*

$$F'_x(x, y) = f'_u(u, v)\Phi'_x(x, y) + f'_v(u, v)\Psi'_x(x, y),$$

$$F'_y(x, y) = f'_u(u, v)\Phi'_y(x, y) + f'_v(u, v)\Psi'_y(x, y).$$

Bizonyítás. Írjuk fel az F összetett függvény megváltozását:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) =$$

$$= f(\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y), \Psi(x + \Delta x, y + \Delta y)) - f(\Phi(x, y), \Psi(x, y)) =$$
$$= f'_u(\Phi(x, y), \Psi(x, y))\Delta\Phi + f'_v(\Phi(x, y), \Psi(x, y))\Delta\Psi + \varepsilon_1(x, y),$$

ahol $\varepsilon_1(x, y) = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. Itt felhasználtuk a külső függvény differenciálhatóságát. A belső függvények megvátozásait így írhatjuk:

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Phi(x, y) = \Phi'_x(x, y)\Delta x + \Phi'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_2(x, y),$$

$$\Delta\Psi = \Psi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Psi(x, y) = \Psi'_x(x, y)\Delta x + \Psi'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_3(x, y),$$

ahol $\varepsilon_2(x, y)$ és $\varepsilon_3(x, y)$ is $o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$ függvények. Mindezeket visszahelyettesítve megkapjuk F differenciálhatóságát.

Példa. (folytatás) A fenti függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$F'_x(x, y) = e^u \sin(v)y + e^u \cos(v) = e^{xy} \left(\sin(x + y)y + \cos(x + y)\right).$$

Általános eset. Legyen $f(u_1, \ldots, u_n)$ n-változós függvény, és adottak a $\Phi_1(x, y), \ldots,$ $\Phi_n(x, y)$ kétváltozós függvények közös $D_{\Phi_i} = R \subset \mathbb{R}^2$ értelmezési tartománnyal.

Az összetett függvény így írható:

$$F(x, y) = f(\Phi_1(x, y), \ldots \Phi_n(x, y)).$$

Ha f és Φ_i, $i = 1, \ldots, n$ differenciálhatóak, akkor F is differenciálható, és

$$F'_x(x, y) = f'_{u_1}(u_1, \ldots, u_n)\Phi'_{1x}(x, y) + \ldots + f'_{u_n}(u_1, \ldots, u_n)\Phi'_{nx}(x, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1, \ldots, u_n)\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}(x, y).$$

$$F'_y(x,y) = f'_{u_1}\Phi'_{1y}(x,y) + \ldots + f'_{u_n}(u_1,\ldots,u_n)\Phi'_{ny}(x,y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}(x,y).$$

Példa. Legyen

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Helyettesítsük be x és y helyére a polárkoordinátákat, legyenek tehát

$$\begin{aligned} x &= x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y &= y(r,\theta) = r\sin(\theta). \end{aligned}$$

Ekkor az összetett függvény

$$F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2.$$

Számoljuk ki F θ szerinti parciális deriváltját a láncszabály alapján. A képlet, amit használnunk kell:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Ezek a parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r(-\sin(\theta)) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos(\theta). \end{aligned}$$

Így ezekből összerakva a deriváltat ezt kapjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = 2xr(-\sin(\theta)) + 2yr\cos(\theta) = 2r\cos(\theta)r(-\sin(\theta)) + 2r\sin(\theta)r\cos(\theta) = 0.$$

1.3.5. Implicit függvény tétel

Példafeladat: Adott a síkban egy görbe, melyet az $F(x,y) = 0$ implicit alak ír le. Adott a görbének egy pontja, (x_0, y_0). A pont környezetében keressük a görbe explicit alakját, egy olyan $y = f(x)$ függvényt, melyre $F(x, f(x)) = 0$ és $f(x_0) = y_0$

1.3.8. Tétel. *(Implicit függvény tétel.) Tegyük fel, hogy az F kétváltozós függvény differenciálható az (x_0, y_0) pont egy környezetében, és ebben a pontban*

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Ezenfelül feltesszük, hogy $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (azaz az érintősík ferde). Ekkor létezik egy kétdimenziós intervallum,

$$I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta) = I_1 \times I_2$$

hogy minden $x \epsilon I_1$ esetén az $F(x, y) = 0$ eggyenletnek pontosan egy $y = f(x)$ megoldása van, és $y \epsilon I_2$. Tehát létezik egy

$$f : I_1 \to I_2$$

valós függvény, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $f(x_0) = y_0$.
- $f(x) \epsilon I_2$, $\forall x \epsilon I_1$.
- $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \epsilon I_1$.
- $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, $\forall x \epsilon I_1$

Továbbá f differenciálható I_1-ben, és deriváltja így számolható:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Megjegyzés. Az implicit függvény tétel a görbe *lokális tulajdonság*át fogalmazza meg. Másrészt csak egzisztenciáról van szó, tehát annyit állít csak, hogy *létezik* a megfelelő függvény, de nem adja meg a konstrukciót.

A fenti tételt nem bizonyítjuk. Ha már tudjuk, hogy f differenciálható, akkor deriváltját kiszámolhatjuk. Deriváljuk az $F(x, f(x)) = 0$ egyenletet x szerint:

$$F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) f'(x) = 0, \tag{1.5}$$

ahonnan a Tétel utolsó állítása következik.

Példa. Tekintsük az

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

egyenlet megoldását. Ha ebből explicit módon megpróbáljuk az y-t kifejezni:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2},$$

ami nem egyértelmű. Konkrét (x_0, y_0) esetén az implicit függvény segítségével a körívnek azt a darabját kapjuk meg , ahol az adott pont szerepel. Három eset lehetséges.

1. Ha $x_0 \epsilon (-1,1)$ és $y_0 > 0$, akkor a megoldásfügvény

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

2. Ha $x_0 \epsilon (-1,1)$ és $y_0 < 0$, akkor a megoldásfügvény

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

3. Ha $x_0 = \pm 1$, akkor $y_0 = 0$. Ekkor $F'_y(x_0, 0) = 0$, és valóban, a megoldás nem folytatható.

Példa. Tekintsük a Déscartes-féle görbét, amelyet az

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

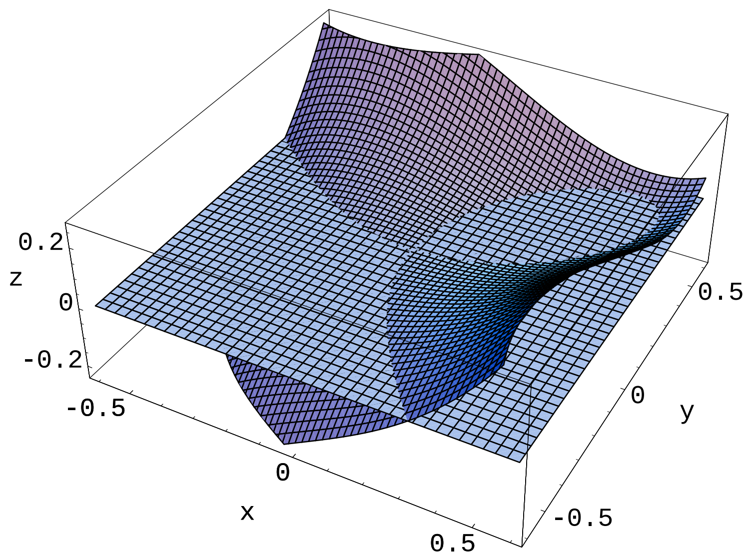
egyenlet ad meg, ahol $a > 0$ egy valós paraméter.

A parciális deriváltakat kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$F'_x(x,y) = 3x^2 - 3ay, \qquad F'_y(x,y) = 3y^2 - 3ax.$$

Vagyis $F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0$, a $(0,0)$ környezetében tehát nem folytatható (nem egyértelmű) a megoldás. Bármely más pont a görbén alkalmas kiindulási pontnak. Látható, hogy van olyan x, amihez 1, illetve van olyan, amihez 3 y tartozik. Deriváltja:

$$f'(x,y) = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{af(x) - x^2}{f^2(x) - ax}$$



1.8. ábra. A Déscartes-féle görbe, mint az $z = F(x, y)$ felületnek és az x, y síknak a metszete.

Megjegyzés. Az (1.5) összefüggés újabb deriválásával f magasabbrendű deriváltjait is ki tudjuk fejezni. Például a második derivált:

$$F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{yx}(x, f(x))f'(x) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x)+$$

$$+F''_{yy}(x, f(x))(f'(x))^2 + F''_{yy}(x, f(x))f''(x) = 0.$$

Ebből pedig $f''(x)$ kifejezhető.

1.4. Differenciálszámítás alkalmazásai

1.4.1. Szélsőértékszámítás

Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$.

1.4.1. Definíció. $(x_0, y_0) \epsilon S$ *lokális maximum (minimum), ha létezik a pontnak olyan* U *környezete, hogy minden* $(x, y) \epsilon U \cap D_f$*-re*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \qquad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Megjegyzés. (x_0, y_0) lehet az értelmezési tartomány határpontja.

1.4.2. Definíció. *(x_0, y_0) globális maximum (minimum), ha minden $(x, y)\epsilon D_f$ esetén*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \qquad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Megjegyzés. A Weierstrass tételből következik, hogy ha S korlátos és zárt, akkor biztosan létezik globális minimum és maximum.

Példa. Tekintsük az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvényt az $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartományon. Nyilvánvalóan a függvény globális maximumhelyei a $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ körvonal pontjai, és egyetlen globális minimumhelye a $(0, 0)$ pont.

1.4.1. Tétel. *(Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére) Tegyük fel, hogy az f függvénynek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van, és tegyük fel, hogy a függvény itt differenciálható. Ekkor szükséges, hogy* grad $f(x_0, y_0) = 0$, *azaz*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

teljesüljön.

Bizonyítás. Jelölje $f_1(x) = f(x, y_0)$. Ekkor x_0 lokális szélsőértéke f_1-nek. Vagyis $f'_1(x_0) = 0$, másrészt $f'_1(x) = f'_x(x, y_0)$.

Példa. Legyen $f(x, y) = xy$, mely mindenütt értelmezve van. Parciális deriváltjai:

$$f'_x(x, y) = y, \qquad f'_y(x, y) = x.$$

A $(0, 0)$-ban $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, mégis ez a pont nem szélsőérték, mert minden síknegyedben más lesz az előjele, tehát bármely környezetében van pozitív és negatív érték is.

1.4.3. Definíció. *Ha* grad $f(x_0, y_0) = 0$, *akkor (x_0, y_0) stacionárius (vagy kritikus) pont.*

1.4.2. Tétel. *(Általános tétel.) Legyen f n-változós függvény, $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$. Ha az $x \epsilon S$ szésőérték-helyen a függvény differenciálható, akkor* grad $f(x) = 0$

Példa. Határozzuk meg, hogy milyen háromszög esetén lesz a szögek a sinusainak a szorzata maximális. Ha a háromszög két szöge x és y, akkor a harmadik szög $180^o - x - y$. Így a minimalizálandó függvény:

$$f(x, y) = \sin x \sin y \sin(180 - x - y) = \sin x \sin y \sin(x + y),$$

ahol

$$f : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}.$$

Előzetesen megállapíthatjuk, hogy ha $0 < x, y < \pi$, akkor $f(x, y) > 0$, egyébként a határon $f(x, y) = 0$. Ezért D_f belsejében f pozitív, a ∂D_f-en az $f = 0$. Tehát a függvény maximuma létezik (mivel D_f korlátos és zárt) és belső pontban van.

Meghatározzuk a stacionárius pontokat.

$$f'_x(x, y) = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0,$$

$$f'_y(x, y) = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0.$$

A fenti egyenleteket egymásból kivonva azt kapjuk, hogy $\tan y = \tan x$, vagyis a stacionárius pontban $x = y$. Ezt visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\cos x \sin x \sin 2x + \sin^2 x \cos 2x = 0,$$

amiből trigonometrikus azonosságok felhasználásával (és $\sin x \neq 0$ miatt

$$\cos x \sin 2x + \sin x \cos 2x = \sin 3x = 0$$

adódik. Ebből azt kapjuk, hogy

$$x = y = \frac{\pi}{3},$$

tehát a háromszög egyenlőoldalú.

1.4.4. Definíció. *Tekintsük az $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvényt, és legyen (x_0, y_0) belső pontja S-nek. Azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható ebben a pontban, ha a függvény differenciálható a pont egy környezetében, és az $f'_x(x, y)$ és az $f'_y(x, y)$ parciális derivált függvények is differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban. Ekkor értelmezhetőek az $f''_{xx}(x_0, y_0)$, az $f''_{xy}(x_0, y_0)$, $f''_{yx}(x_0, y_0)$ és az $f''_{yy}(x_0, y_0)$ másodrendű parciális deriváltak.*

1.4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy f kétszer differenciáható az értelmezési tartomány belsejében lévő (x, y) pontban. Ekkor itt*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Megjegyzés. Egy függvény első deriváltja

$$\text{grad } f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y))$$

sorvektor. Második deriváltja mátrix:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}.$$

A fenti mátrixot az adott ponthoz tartozó *Hesse mátrix*nak hívjuk. Általában, egy n-változós függvény esetén a Hesse mátrix olyan $n \times n$ dimenziós mátrix, melynek (i, j)-dik eleme:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

1.4.4. Tétel. *(Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.) Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pont stacionárius pontja f-nek, és itt f kétszer differenciálható. Ha ebben a pontban*

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

akkor a pontban lokális szélsősérték van. Ha emellett $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor lokális minimum, ha $f''_{xx}x_0, y_0) < 0$, akkor lokális maximum. Ha

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0,$$

akkor nincs szélsőérték. Ha pedig

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0,$$

akkor a szélsőérték eldöntéséhez további vizsgálat szükséges.

Emlékeztető: Az A $n \times n$-es mátrix pozitív (negatív) definit, ha minden $x \epsilon \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $x^T A x > 0$ (< 0). Ha létezik $x \epsilon \mathbb{R}^n$, melyre $x^T A x > 0$ és létezik $y \epsilon \mathbb{R}^n$,hogy $y^T A y < 0$, akkor a mátrix indefinit. Példaként tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixokat. Nyilván $A > 0$ (pozitiv definit), $B < 0$ (negativ definit) és C indefinit.

1.4.5. Tétel. *(Az előző tétel átfogalmazása.) Tegyük fel, hogy (x_0, y_0) egy stacionárius pontja f-nek. Ekkor ha a $H(x_0, y_0)$ Hesse mátrix*

- *pozitív definit, akkor itt a függvénynek minimuma van,*
- *negatív definit, akkor maximuma van,*
- *indefinit, akkor nincs szélsőértéke,*
- *szemidefinit, akkor nem eldönthető.*

Szélsőérték általánosítása

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. $f : S \to \mathbb{R}$ n-változós függvény, kétszer differenciálható az $x \epsilon$ int (S) pontban. Tegyük fel, hogy grad $f(x) = 0$. (Ez a szükséges feltétel). Jelölje H a pontbeli Hesse mátrixot, melynek (i, j)-dik eleme

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(x)$$

Ha:

1 $H > 0$, akkor x lokális mimimum,

2 $H < 0$, akkor x lokális maximum,

3 H indefinit, akkor nincs szélsőérték,

4 H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.

Speciális esetként vizsgáljuk meg, hogy $n = 2$-ben mit jelent a definitség.

1.4.1. Állítás. *Legyen H egy kétváltozós függvény Hesse mátrixa az (x, y) pontban, azaz*

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{yx}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

1 $H > 0 \;\Leftrightarrow\; \det(H) > 0$ *és* $f''_{xx} > 0$

2 $H < 0 \;\Leftrightarrow\; \det(H) > 0$ *és* $f''_{xx} < 0$

3 $H \leq 0$ *vagy* $H \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad det(H) = 0$

4 H *indefinit* $\Leftrightarrow \quad \det(H) < 0$

Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2,$$

értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$. Lokális szélsőérték meghatározáshoz számoljuk ki a gradiens-t:

$$f'_x(x, y) = 2x - 3y, \qquad f'_y(x, y) = -3x + 2y.$$

A gradiensvektor egyetlen pontban tűnik el, ez a $(0, 0)$ pont. A Hesse mátrix minden pontban ugyanaz:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{yx}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel det $H = -5 < 0$, ezért a mátrix indefinit, tehát a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y,$$

értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$. A stacionárius pontokat meghatározó egyenletrendszer

$$f'_x(x, y) = 2x + y + 1 = 0, \qquad f'_y(x, y) = x + 2y + 1 = 0,$$

ennek egyetlen megoldása

$$(x, y) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

lehetséges szélsőérték. A második deriváltak

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \qquad f''_{yy}(x, y) = 2, \qquad f''_{xy}(x, y) = 1.$$

A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pozitiv definit, ezért a stacionárius pont lokális minimum.

1.4.2. Feltételes szélsőérték

Mintafeladat: Legyen adott $\mathbb{R}^3$-ban egy $\Phi(x, y, z) = 0$ felület. A felület melyik pontja van az origóhoz a legközelebb? Más szóval határozzuk meg a

$$\min(x^2 + y^2 + z^2)$$

értékét, ahol a változók nem függetlenek, hanem fennáll a $\Phi(x, y, z) = 0$ összefüggés. Első megoldásként a $\Phi(x, y, z) = 0$ alakból explicit módon kifejezzük az egyik változót: $z = F(x, y)$, és minimalizáljuk az

$$x^2 + y^2 + (F(x, y))^2, \qquad (x, y) \epsilon D_f$$

kétváltozós függvényt. Ennek hátránya, hogy egyrészt egyáltalán nem biztos, hogy explicit megoldás létezik, másrészt önkényesen részesítjük elönyben az egyik változót. Második megoldásként közvetlenül optimalizálunk. Ez azt jelenti, hogy az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény megszorítását tekintjük az

$$\{(x, y, z) : \ \Phi(x, y, z) = 0\}$$

halmazon, és itt keressük a szélsőértéket. A gondot az okozza, hogy a fenti halmaznak általában nincs belső pontja, tehát a korábbi fejezet tételeit nem alkalmazhatjuk.

Feladat. Legyen adott az f kétváltozós differenciálható függvény, és ennek keressük azon a halmazon a szélsőértékeit, ahol a $\Phi(x, y) = 0$ összefüggés teljesül.

A szükséges feltétel előtt lássuk szemléletesen, hogy mit várhatunk. Képzeljünk el egy olyan ábrát, ahol egyszerre látható a $\Phi(x,y)=0$ feltétel, és az $f(x,y)=c$ szintvonalak, különböző c értékek mellett. Amely c-re van közös pont, ott van megoldása a

$$\Phi(x,y)=0, \qquad f(x,y)=c$$

egyenletrendszernek. Mivel f folytonos (hisz differenciálható is), ezért a szintvonalak is monoton módon változnak. Így azt a szintvonalat keressük, ami "utoljára" metszi a $\Phi(x,y)=0$ görbét. Ebben az (x,y) pontban görbék érintik egymást, az érintők megegyeznek, azaz

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}=\frac{\Phi'_x(x,y)}{\Phi'_y(x,y)}.$$

Ezt egy kicsit másképp átrendezve azt kapjuk, hogy van egy olyan λ valós szám, melyre

$$\frac{f'_x(x,y)}{\Phi'_x(x,y)}=\frac{f'_y(x,y)}{\Phi'_y(x,y)}=\lambda.$$

Tehát szemléletesn azt várjuk, hogy ha (x,y) feltételes szélsőérték, akkor létezik olyan λ, melyre:

$$f'_x(x,y)-\lambda\Phi'_x(x,y)=0,$$

$$f'_y(x,y)-\lambda\Phi'_y(x,y)=0$$

teljesül. Erről szól a következő tétel.

1.4.6. Tétel. *(Szükséges feltétel) Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ függvény differenciálható, és feltételes szélsőértéke van az (x_0,y_0) pontban a $\Phi(x,y)=0$ feltétel mellett. Ekkor létezik $\lambda_0\epsilon\mathbb{R}$, melyre:*

$$f'_x(x_0,y_0)-\lambda_0\Phi'_x(x_0,y_0)=0,$$

$$f'_y(x_0,y_0)-\lambda_0\Phi'_y(x_0,y_0)=0,$$

azaz (x_0,y_0,λ_0) stacionárius pontja az $F: D_f\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ háronváltozós függvénynek, ahol

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\Phi(x,y).$$

A fenti tételt átfogalmazva kimondjuk a *Lagrange-féle multiplikátor szabály*t. Tekinsük az alábbi feltételes optimalizálási feladatot:

$$\min_{\{\Phi(x,y)=0\}} f(x,y) \qquad \text{vagy} \qquad \max_{\{\Phi(x,y)=0\}} f(x,y).$$

Ehelyett tekinthetjük az

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\Phi(x,y), \qquad (x,y)\epsilon D_f, \lambda\epsilon\mathbb{R}$$

függvény *feltétel nélküli* szélsőérték feladatát.

Példa. Legyen $f(x,y) = xy$, és ennek szeretnénk meghatározni feltételes szélsőértékét az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. (A görbe mentén nincs belső pont!). Alkalmazzuk a Lagrange-féle multiplikátor szabályt. Eszerint az alábbi függvény stacionárius pontjait keressük:

$$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Megjegyezzük, hogy az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltételből adódó halmaz korlátos és zárt, tehát biztosan létezik szélsőérték. A függvényértékek nagyságrendjŕe egy előzetes becslést kaphatunk a számtani-mértani közép közti összefüggés alkalmazásával, hiszen

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = |xy|$$

miatt a feltételi halmazon

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2},$$

azaz

$$-\frac{1}{2} \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2}. \tag{1.6}$$

A Lagrange függvény gradiense:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= y - 2\lambda x, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x - 2\lambda y, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 1. \end{aligned}$$

A grad $F(x,y,\lambda) = 0$ egyenletrendszer megoldásaként

$$\lambda_1 = 0.5, \qquad \text{vagy} \qquad \lambda_2 = -0.5$$

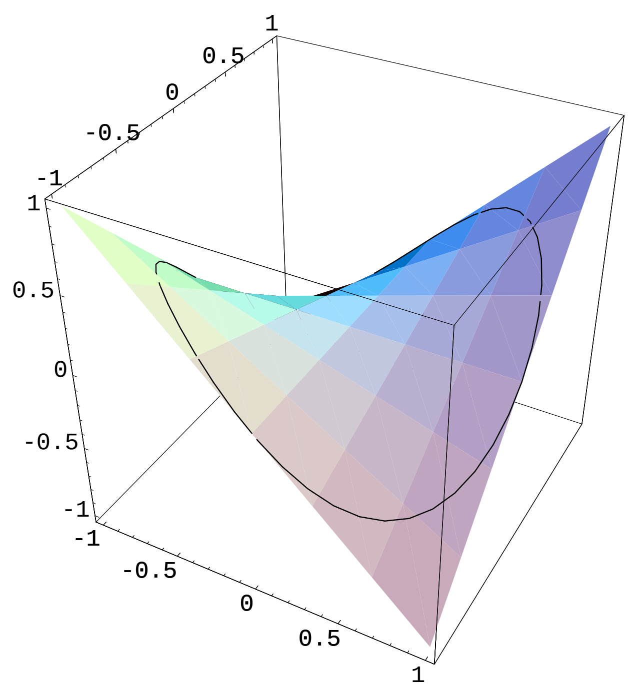
adódik. Így visszahelyettesítve a λ-kat négy stacionárius ponot kapunk:

$$(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \qquad (x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$
$$(x_3, y_3) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \qquad (x_4, y_4) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

A megfelelő függvényértékek:

$$f(x_1, y_1) = 0.5, \qquad f(x_2, y_2) = 0.5,$$
$$f(x_3, y_3) = -0.5, \qquad f(x_4, y_4) = -0.5.$$

A (1.6) összefüggést felhasználva azt kapjuk, hogy $f(x_1, y_1)$ és $f(x_2, y_2)$ globális maximumok, $f(x_3, y_3)$ és $f(x_4, y_4)$ pedig globális minimumok.



1.9. ábra. A példa feltételes szélsőérték számításra

1.4.3. Függvényrendszerek

Ebben a fejezetben egyszerre több függgvényt tekintünk. Speciálisan, a függvények száma megegyezik a változók számával. Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ egy tartomány, ahol adott két függvény, $\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}$. A függvényrendszer amit tekintünk:

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x, y) \\ \eta &= \Psi(x, y). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ezt úgy értelmezzük, mint $\mathbb{R}^2$ térbeli leképezés, mely az (x, y) ponthoz a (ξ, η) pontot rendeli hozzá .

Példa. Az affin leképezést így definiáljuk:

$$\begin{aligned}\xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy.\end{aligned}$$

Ezzel már korábban találkoztunk, mint $\mathbb{R}^2$-beli lineáris leképezés. Tömören így írhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Invertálhatóság

Függvényrendszerekkel kapcsolatosan felmerülő első kérdés, hogy vajon - mint egy $\mathbb{R}^2$-beli leképezés - invertálható-e? Legyen B a képtér:

$$B = \{(\xi, \eta) : \ \xi = \Phi(x, y), \eta = \Psi(x, y)) : (x, y) \epsilon R\}.$$

Tegyük fel, hogy a leképezés injektív, azaz különböző R-beli pontokhoz a képtérben különböző (ξ, η) pontok tartoznak. Ekkor a (1.7) rendszer *invertálható*. Az inverz rendszer ilyen alakú lesz:

$$\begin{aligned}x &= g(\xi, \eta) \\ y &= h(\xi, \eta).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Példa. A korábban bevezetett polárkoordináták spciális $\mathbb{R}^2$-beli leképezést jelentenek:

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \xi \geq 0 \\ \eta &= \arctan \frac{y}{x}, \quad \eta \epsilon [0, 2\pi).\end{aligned}$$

Ennek inverzét is meghatároztuk:

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos(\eta) \\ y &= \xi \sin(\eta).\end{aligned}$$

Az inverz leképezés differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy a kiinduló (1.7) egyenletredszer függvényei és az inverz (1.8) rendszer függvényei is differenciálhatók.

1.4.5. Definíció. *A (1.7) rendszerhez tartozó Jacobi mátrix-ot így definiáljuk:*

$$\mathcal{J}(x,y) := \begin{pmatrix} \Phi'_x(x,y) & \Phi'_y(x,y) \\ \\ \Psi'_x(x,y) & \Psi'_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } \Phi \\ \\ \text{grad } \Psi \end{pmatrix}.$$

A fenti mátrix determinánsát Jacobi determinánsnak hívjuk:

$$D(x,y) := \Phi'_x(x,y)\Psi'_y(x,y) - \Psi'_x(x,y)\Phi'_y(x,y).$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixát így jelöljük:

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) := \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi,\eta) & g'_\eta(\xi,\eta) \\ \\ h'_\xi(\xi,\eta) & h'_\eta(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

1.4.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy a Jacobi determináns nem* 0, *azaz a (1.7) rendszer Jacobi mátrixa nem szinguláris. Ekkor az inverz rendszer deriváltja így írható:*

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \mathcal{J}^{-1}(x,y),$$

ahol (x,y) *és* (ξ,η) *egymás képei.*

Bizonyítás. A (1.8) egyenleteket (1.7)-be helyettesítve az alábbi azonosságokat kapjuk:

$$\xi = \Phi(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)) \tag{1.9}$$
$$\eta = \Psi(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)) \tag{1.10}$$

Mivel feltettük, hogy g és h is differenciálhatóak, ezért deriválhatjuk a fenti azonosságokat ξ és η szerint.

Deriváljuk mindkét egyenletet ξ szerint, majd η szerint. Az áttekinthetőbb jelölés kedvéért az argumentumokat nem írjuk ki. Ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} 1 &= \Phi'_x g'_\xi + \Phi'_y h'_\xi && (1.11) \\ 0 &= \Psi'_x g'_\xi + \Psi'_y h'_\xi && (1.12) \\ 0 &= \Phi'_x g'_\eta + \Phi'_y h'_\eta \\ 1 &= \Psi'_x g'_\eta + \Psi'_y h'_\eta \end{aligned}$$

A (1.11) egyenletet szorozzuk meg Ψ'_x-vel, és a (1.12) egyenletet szorozzuk meg Φ'_x-vel majd vonjuk ki egymásból az egyenleteket. Azt kapjuk, hogy

$$h'_\xi = \frac{\Psi'_x}{\Phi'_y \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_y}.$$

Teljesen hasonlóan kapjuk a többi deriváltat is:

$$\begin{aligned} g'_\xi &= \frac{\Psi'_y}{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x}, \\ h'_\eta &= \frac{\Phi'_x}{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x} \\ g'_\eta &= \frac{\Phi'_y}{\Phi'_y \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_y}. \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$D = \Phi'_y \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_y$$

jelölést. Ekkor a fenti képletek röviden így írhatók:

$$g'_\xi = \frac{\Psi'_y}{D}, \qquad g'_\eta = -\frac{\Phi'_y}{D}, q \quad h'_\xi = -\frac{\Psi'_x}{D}, \qquad h'_\eta = \frac{\Phi'_x}{D}. \qquad (1.13)$$

Megjegyzés. A inverz függvény deriváltjára vonatkozó képletek könnyebb memorizálása érdekében vegyük észre az egydimenziós esettel való analógiát. Ha f egyváltozós, differenciálható függvény, melynek deriváltja nem 0, akkor inverzének deriváltja így írható:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Most a kétváltozós függvényrendszer ilyen alakú:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to S,$$

és ennek derivált-mátrixa:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \Phi'_x & \Phi'_y \\ \\ \Psi'_x & \Psi'_y \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvény

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} : S \to R,$$

és ennek derivált-mátrixa:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} g'_\xi & g'_\eta \\ \\ h'_\xi & h'_\eta \end{pmatrix}.$$

Példa. Tekintsük a polárkoordináták esetét. Ekkor a függvényrendszer:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\quad = \Phi(x, y),$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (\quad = \Psi(x, y).$$

Ennek Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} & \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Ezért a Jacobi determináns:

$$D = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

Az inverz rendszer

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \quad (\quad = g(r, \theta) \\ y &= r \sin \theta \quad (\quad = h(r, \theta) \end{aligned}$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixa

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} g'_r & g'_\theta \\ \\ h'_r & h'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & r(-\sin \theta) \\ \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsa

$$\det(\mathcal{K}) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Számoljuk ki a $\mathcal{J}^{-1}$ inverz mátrixot:

$$\mathcal{J}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{J}}\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \mathcal{K}.$$

A Jacobi determinánst szokás néha így jelölni:

$$D = \frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)}.$$

Megjegyezzük, hogy ez valóban csak formális jelölés.

1.4.2. Állítás. *Az inverz függvény Jacobi determinánsa reciproka az eredeti Jacobi determinánsnak:*

$$\frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)} = 1\Big/\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}.$$

1.4.4. Lagrange-féle középértéktétel

1.4.8. Tétel. *Legyen $f : S \to R$ n-változós függvény. Tegyük fel, hogy f differenciálható az $x\epsilon S$ egy környezetében. Legyen $h\epsilon\mathbb{R}^n$ olyan megváltozás, melyre $(x+h)\epsilon S$, és a függvény itt is differenciálható. Ekkor létezik $\theta\epsilon[0,1]$:*

$$f(x+h) - f(x) = \text{grad } f(x+\theta h)h = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\xi_x)h_i,$$

ahol $\xi_x = x + \theta h$.

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben grad $f(x+\theta h)$ sorvektor, h pedig oszlopvektor.

Bizonyítás. Vezessük be az alábbi egyváltozós függvényt:

$$F(t) = f(x+th) = f(x_1+th_1, \ldots, x_n+th_n).$$

Ekkor $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos és differenciálható. Erre a függvényre alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt. Eszerint létezik $\theta \epsilon [0,1]$, melyre:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

Mivel a láncszabály alkalmazásával rögzített t-re

$$F'(t) = f_{x_1}h_1 + \ldots + f_{x_n}h_n,$$

ebből az állítás következik.

1.4.1. Következmény. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex tartomány (vagyis bármely két pontját összekötő szakasz is benne van S-ben). Feltesszük továbbá, hogy f differenciálható és* grad $f(x) = 0$ *minden $x \epsilon S$-re. Ekkor a függvény konstans.*

Bizonyítás. Legyen $x, x' \epsilon S$ két pont. Alkalmazzuk a fenti tételt:

$$f(x) - f(x') = \text{grad } f(x+\theta(x-x'))(x-x'),$$

valamely $\theta \epsilon [0,1]$ mellett.A konvexitás miatt $x+\theta(x-x') \epsilon S$, így

$$\text{grad } f(x+\theta(x-x')) = 0,$$

ezért $f(x) = f(x')$.

1.4.5. Taylor-formula

Feladat. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely elegendően sokszor differenciálható valamely (x,y) pontban. Adjunk becslést az

$$f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

különbségre az (x_0, y_0) pontbeli deriváltak felhasználásával.

A fenti feladatra egyik megoldást az érintő sík alapján tudjuk megadni, eszerint

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Ez megfelel az elsőfokú Taylor-polinonmak.

Magasabb fokú Taylor polinomot úgy adjuk meg, hogy visszavezetjük az egyváltozós esetre.

Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),$$

ahol

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = y - y_0.$$

Ekkor $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható valós függvény, $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$. Az F függvény $t = 0$ pont körüli Taylor-formuláját fogjuk használni. Ehhez szükségünk lesz a deriváltakra:

$$\begin{aligned}
F(0) &= f(x_0,y_0)\\
F'(t) &= f'_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta y\\
F''(t) &= f''_{xx}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x\Delta y +\\
&+ f''_{yy}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)(\Delta y)^2.
\end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy $F(t)$ n-szer differenciálható, akkor indukcióval belátható, hogy:

$$F^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\ (\Delta x)^k (\Delta y)^{n-k}.$$

A Taylor formula alapján ezt kapjuk:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = F(1) - F(0) =$$

$$= (f'_x\Delta x + f'_y\Delta y) + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\Delta x)^k(\Delta y)^{n-k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}(x_0,y_0) + L_n,$$

ahol L_n a Lagrange-féle maradéktag.

Speciálisan $n = 2$ esetén kiírjuk pontosan a tagokat:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \text{grad } f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\Delta x \ \Delta y) H(x_0,y_0) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + L_2,$$

Ahol H a Hesse-mátrix.

Általános másodrendű Taylor-formula. Legyen $f(x)$ n-változós, kétszer differenciálható függvény S-ben, $S \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor tetszőleges $x + h \epsilon S$ esetén

$$f(x+h) = f(x) + \text{grad } f(x)h + \frac{1}{2}h^T \ H \ h + L_2,$$

ahol

$$h^T = (h_1, \ldots, h_n), \qquad \text{grad } f(x) = (f'_{x_1}, \ldots, f_{x_n})',$$

továbbá a Lagrange-féle maradéktag így írható:

$$L_2 = \frac{1}{2}h^T \int_0^1 H(x+th)dt \ h.$$

2. fejezet

Többszörös integrálok

2.1. Az integrál értelmezése

Ismétlés. Egyváltozós függvény esetén a Riemann integrált határértékként definiáltuk. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $[a,b]$ intervallum egy felosztása $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Bevezettük az adott felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeget:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} t[x_{i-1}, x_i] m_i, \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

és felső közelítő összeget:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} t[x_{i-1}, x_i] M_i, \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

ahol t az adott intervallum hossza. Ha az alsó közelítő összegek supremuma és a felső közelítő összegek infimuma egyenlő, akkor mondjuk, hogy a függvény Riemann-integrálható.

2.1.1. Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

Hasonló gondolatmenetet követve fogunk $\mathbb{R}^2$ bizonyos részhalmazaihoz mértéket rendelni. Alapkövetelményként megfogalmazunk néhány tulajdonságot, melyet elvárunk, hogy ez a mérték teljesítsen. $R \subset \mathbb{R}^2$ esetén a mértéket $A(R)$ fogja jelölni.

Követelmények:

1. $A(R) \geq 0$
2. Ha R egy négyzet, melynek oldala δ, akkor $A(R) = \delta^2$.
3. Legyenek $R_1, \ldots, R_n$ olyan tartományok, melyek nem átfedőek, azaz a közös pontjaik csak határpontok lehetnek. Ekkor

$$A(R_1 \cup \ldots \cup R_n) = \sum_{i=1}^{n} A(R_i).$$

A mérték definíciójához a tartományt négyzetekkel töltjük ki, illetve kívülről is azokkal vesszük körül. Igazolható, hogy a kapott terület mérőszám független a felosztás választásától. Legyen adott egy $R \subset \mathbb{R}^2$ tetszőleges halmaz. Ennek mértékét több lépésben határozzuk meg.

0. lépés. Tekintsük a sík négyzetrácsos felosztását az $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ és $y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ egyenesek segítségével. Legyen $A_0^-(R)$ azon négyzetek száma, amelyek teljesen benne vannak R-ben és legyen $A_0^+(R)$ azon négyzetek száma, amelyeknek van közös része az R-rel. Nyilván $A_0^-(R) \leq A_0^+(R)$.

1. lépés. Finomítjuk a felosztást, a négyzetrács oldalait megfelezzük. Legyen $A_1^-(R) = 1/4\cdot$ azon négyzetek száma, melyek teljesen benne vannak R-ben. Legyen $A_1^+(R) = 1/4\cdot$ azon négyzetek száma, melyeknek van közös része R-rel. Más szóval, $A_1^-(R)$ azon négyzetek összterületét jelöli, melyek teljesen benne vannak R-ben, $A_1^+(R)$ pedig azon négyzetek összterületét, melyek nem diszjunktak R-től.

És így tovább. Az *n-dik lépés*ben $1/2^n$ oldalhosszúságú négyzetrácsos felosztást használva defniáljuk az

$$A_n^-(R), \qquad A_n^+(R)$$

számokat.

Tekintsük az $(A_n^-(R))$ és $(A_n^+(R))$ sorozatokat $n \to \infty$ esetén. Mivel $(A_n^-(R))$ monoton növő és felülről korlátos sorozat, ezért létezik az

$$A^-(R) = \lim_{n\to\infty} A_n^-(R)$$

határérték. Hasonlóan, az $(A_n^+(R))$ monoton fogyó és alulról korlátos sorozat, tehát létezik

$$A^+(R) = \lim_{n\to\infty} A_n^+(R)$$

határértéke. A konstrukció alapján

$$A_n^-(R) \leq A_m^+(R)$$

minden n, m-re , így a határértékekre is

$$A^-(R) \leq A^+(R).$$

2.1.1. Definíció. *Ha $A^-(R) = A^+(R)$, akkor az R halmaz mérhető, és*

$$A(R) := A^+(R) = A^-(R)$$

a halmaz Jordan-mértéke.

Egyszerűen látható, hogy a bármelyik lépésben a külső és belső négyzetek közti különbség tartalmazza a halmaz határpontjait, ezért

$$A_n^+(R) - A_n^-(R) \leq A_n^+(\partial R).$$

Ebből következik, hogy ha $A(\partial R) = 0$, akkor a fenti egyenlőtlenségben határértéket véve

$$\lim_{n\to\infty} (A_n^+(R) - A_n^-(R)) \leq \lim_{n\to\infty} A_n^+(\partial R) = 0,$$

tehát a halmaz mérhető. Ez a feltétel egyben szükséges is, erről szól a következő állítás.

2.1.1. Állítás. *Egy halmaz akkor és csakis akkor mérhető, ha határának mértéke 0.*

Példa nem mérhető halmazra. Legyen $R := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1,\ x, y \epsilon \mathbf{Q}\}$. Ekkor $A_n^-(R) = 0$, hiszen a lefedéshez minden kis részre szükség van. Másrészt nem létezik olyan kis négyzet, amiben ne lenne irracionális szám, ezért $A_n^+(R) = 1$. A két határérték nem egyezik meg, tehát a halmaznak nincs mértéke. Ezt azzal is igazolhatjuk, hogy a fenti halmaz határa

$$\partial R = [0, 1] \times [0, 1], \qquad A(\partial R) = 1 \neq 0.$$

A definícióból könnyen igazolhatók a mérték alábbi tulajdonságai:

1. $A(R) \geq 0$, minden mérhető halmaz esetén.

2. Ha R és S mérhetőek, akkor $R \cup S$ és $R \cap S$ is mérhető.

3. Ha $R \subset S$ és mérhetőek, akkor $A(R) \leq A(S)$.

4. Tegyük fel, hogy R és S nem átfedőek, azaz

$$\text{int }(R) \cap \text{ int }(S) = \emptyset,$$

vagyis közös pontok csak a határon vannak. Ekkor

$$A(R \cup S) = A(R) + A(S).$$

Belátható, hogy a most definiált mérték valóban kiterjesztése annak a terület-fogalomnak, melyet az integrálszámítás kapcsán értelmeztünk.

2.1.2. Állítás. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ integrálható függvény. Definiáljuk az R tartományt a következőképpen:*

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Ekkor

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás. HF, a definícióból közvetlenül látható.

Megjegyzés. Ugyanez a mérték definiálható n-dimenziós térben is, ekkor n dimenziós négyzetrácsos felosztást alkalmazunk.

2.1.2. Integrálás kétdimenziós mérhető tartományon

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmaz, amely korlátos és zárt. Adott ezen egy $f : R \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Célunk, hogy meghatározzuk az $f(x,y)$ felület alatti térrész, azaz a következő három dimenziós tartomány

$$S = \{(x,y,z) :\ (x,y)\epsilon R,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

térfogatát, $V(S)$-t.

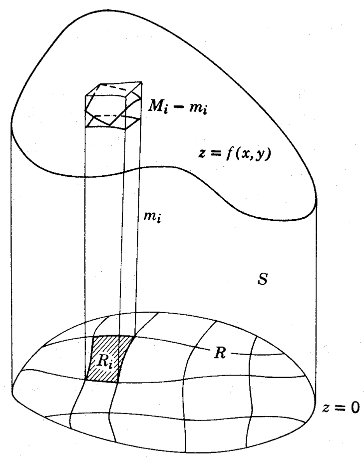
Tekintsük az R halmaz felosztását mérhető halmazokra, melyeknek nincs közös belső pontjuk: $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$. Jelölje

$$m_i = \inf_{R_i} f(x,y), \qquad M_i = \sup_{R_i} f(x,y).$$

Nyilván azt szeretnénk, hogy

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} A(R_i)m_i \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^{n} A(R_i)M_i = S_n$$

teljesüljön.



2.1. ábra. Az integrál közelítése

2.1.2. Definíció. *Egy $R \subset \mathbb{R}^2$ halmaz átmérője*

$$\delta(R) = \sup\{\|x_1 - x_2\| : \ x_1, x_2 \epsilon R\},$$

azaz két legtávolabbi pontjának távolsága. ($\delta(R) = \infty$ is megengedett.)

Legyen a fenti felosztás finomsága

$$\delta = \max_{i=1,\dots,n} \delta(R_i).$$

Tudjuk, hogy f folytonos R-en, ezért ott egyenletesen is folytonos. Tehát tetszőlegesen megadott $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $\delta > 0$ szám, hogy ha a felosztás finomsága ennél kisebb, akkor

$$M_i - m_i < \varepsilon$$

teljesül . Ekkor

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} A(R_i)(M_i - m_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A(R_i)\varepsilon = \varepsilon A(R).$$

Ezért

$$\sup\{s_n:\ n\epsilon\mathbb{N},\ \max\delta(R_i)\to 0\}=\inf\{S_n:\ n\epsilon\mathbb{N},\ \max\delta(R_i)\to 0\},$$

tehát az integrál értelmezhető. Az imént definiált térfogatot így jelöljük:

$$V(S)=\iint\limits_R f(x,y)dR.$$

Általános esetben az integrált a Riemann-féle közelítő összegek alapján definiáljuk. Legyen $f:R\to\mathbb{R}$ korlátos függvény (nem feltétlenül nem-negatív), és legyen $(\xi_i,\eta_i)\epsilon R_i$ tetszőleges pont, a hozzá tartozó függvényérték $f_i=f(\xi_i,\eta_i)$. A felosztáshoz tartozó *Riemann-féle közelítő összeg*:

$$V_n=\sum_{i=1}^{n} f_i A(R_i).$$

Az f függvény Riemann-integrálható, ha

$$\lim_{n\to\infty,\ \max_{\delta(R_i)}\to 0} V_n=V$$

létezik. Ekkor ezt így jelöljük:

$$\iint\limits_R f(x,y)dR.$$

2.1.1. Következmény. *Ha f olyan folytonos függvény, mely Jordan mérhető tartományon van értelmezve, akkor f ezen a tartományon integrálható is.*

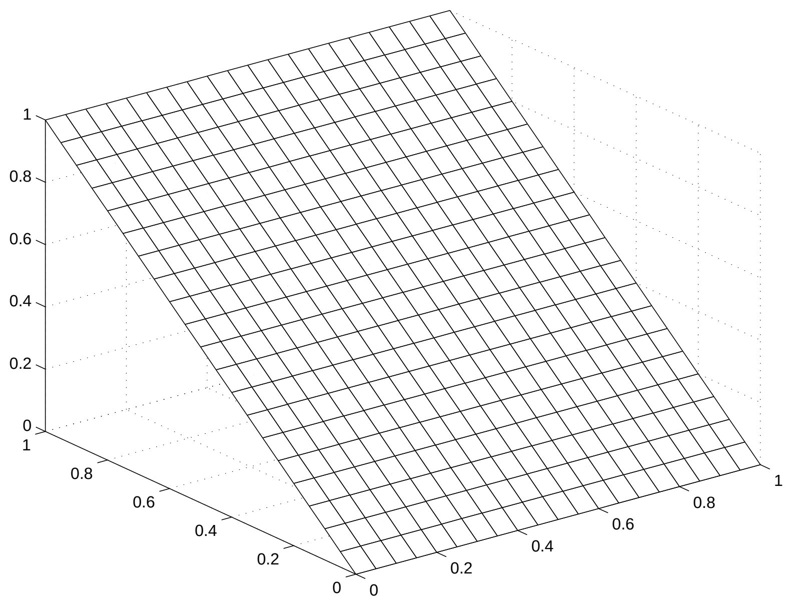
Speciális esetként tekintsünk egy R téglalapot, $R=[a,b]\times[c,d]$ Az intervallumokon legyenek a felosztások egyenletesek, n illetve m részre. Az x tengelyen egy részintervallum hossza $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, az y tengelyen egy részintervallum hossza $\Delta y=\dfrac{d-c}{m}$, ezért $N=nm$. Ekkor a közelítő összeg

$$V_N=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x\Delta y.$$

Példa. Legyen $f(x,y) = 1$ minden $(x,y)\epsilon R$ esetén. Ekkor

$$\iint\limits_R 1 \; dR = A(R).$$

Példa. Legyen $R = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x$. A kiszámítandó tartomány a 2.2. ábrán látható.



2.2. ábra. Az $f(x,y) = x$ függvény alatti tartomány, félkocka.

Geometriai meggondolás alapján $V = \dfrac{1}{2}$-et várunk.

Egyenletes felosztást tekintsünk mindkét irányban, $N = n^2$. Az (i,j)-dik résztartományon, $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-i}, y_j]$-n a Riemann összegben használt függvényérték legyen $x_i = i/n$. Így

$$V_N = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} x_i = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

tehát határértéke valóban

$$\lim_{N\to\infty} V_N = \frac{1}{2}.$$

Példa. R legyen kétdimenziós intervallum, $R = [a,b] \times [c,d]$, és tegyük fel, hogy $f(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$, azaz a változók szerint szeparálható. Határozzuk meg az

$$\iint\limits_R \Phi(x)\Psi(y) dxdy$$

kettős integrál értékét. Egyenletes felosztásokat használva

$$V_N = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x \Delta y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Phi(\xi_i)\Psi(\eta_j)\Delta x \Delta y =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i)\Delta x \cdot \sum_{j=1}^{m} \Psi(\eta_j)\Delta y.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ebben az esetben a kettős integrál két valós integrál szorzataként számítható ki:

$$\iint\limits_R \Phi(x)\Psi(y)dxdy = \int_a^b \Phi(x)dx \cdot \int_c^d \Psi(y)dy.$$

Példa. Legyen az integrálandó függvény $f(x, y) = e^{x-y}$, az integrálási tartomány $R = [0, 1] \times [1, 2]$. Ekkor

$$\iint\limits_R e^{x-y}dR = \int_0^1 e^x dx \int_1^2 e^{-y}dy = (e-1)[-(e^{-2}-e^{-1})] = (e-1)(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}) = (e^{-1}-1)^2.$$

2.1.3. A kettős integrál alaptulajdonságai

A definícióból látható, hogy $f \geq 0$ nem szükséges az integrál értelmezéséhez. Általános esetben ún. előjeles térfogatról beszélünk.

2.1.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy f integrálható R-ben. Ekkor*

1. *cf is integrálható, $c \in \mathbb{R}$ esetén, és*

$$\iint\limits_R cf(x, y)dR = c\iint\limits_R f(x, y)dR.$$

2. *Ha g is integrálható R-en, akkor $f + g$ is, és*

$$\iint\limits_R (f + g)dR = \iint\limits_R fdR + \iint\limits_R gdR.$$

3. Ha $R = R_1 \cup R_2$, ahol R_1, R_2 nem átfedőek és mérhetőek, akkor

$$\iint\limits_R f dR = \iint\limits_{R_1} f dR_1 + \iint\limits_{R_2} f dR_2.$$

3a. Ha feltesszük, hogy $A(R_2) = 0$, akkor:

$$\iint\limits_R f dR = \iint\limits_{R_1} f dR_1.$$

Ez azt jelenti, ha $f(x, y)$ értékét egy 0 mértékű halmazon megváltoztatjuk, akkor az integrál értéke nem változik.

4. Ha $f \geq 0$, akkor

$$\iint\limits_R f dR \geq 0.$$

5. Ha $f(x, y) \geq g(x, y)$ minden $(x, y) \epsilon R$-re és g integrálható, akkor

$$\iint\limits_R f dR \geq \iint\limits_R g dR.$$

Következmény: Tetszőleges f integrálható függvényre

$$\iint\limits_R |f| dR \geq \left| \iint\limits_R f dR \right|,$$

hiszen $|f(x, y)| \geq f(x, y)$ és $|f(x, y)| \geq -f(x, y)$.

2.1.1. Tétel. *(Integrál középértéktétel) Tegyük fel, hogy $m \leq f(x, y) \leq M$ minden $(x, y) \epsilon R$ esetén. Ekkor*

$$m \cdot A(R) \leq \iint\limits_R f dR \leq M \cdot A(R).$$

Továbbá ha f folytonos is, akkor létezik $(\xi, \eta) \epsilon R$, hogy

$$\iint\limits_R f dR = f(\xi, \eta) \cdot A(R).$$

2.1.4. Kettős integrál kiszámítása

Legyen R kétdimenziós intervallum, $R = [a, b] \times [c, d]$. $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény (nem feltétlenül szeparábilis).

2.1.2. Tétel. *Rögzített $y \epsilon [c, d]$ esetén értelmezzük a*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

függvényt. Ekkor $\Phi : [c, d] \to \mathbb{R}$ és

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \iint\limits_R f(x, y) dR.$$

Fordítva is igaz, ha definiáljuk a

$$\Psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

függvényt, akkor $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ is integrálható, és

$$\int_a^b \Psi(x) dx = \iint\limits_R f(x, y) dR.$$

Bizonyítás vázlata. Mivel f integrálható, ezért az egyenletes felosztásokat tekintve tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik N küszöbindex, hogy ha $n, m > N$, akkor

$$|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_j, y_i) \frac{(b-a)}{m} \frac{(d-c)}{n} - \iint\limits_R f(x, y) dR| < \varepsilon.$$

Ha a fenti egyenletben $m \to \infty$, akkor az első tagban

$$\sum_{j=1}^{m} f(x_j, y_i) \frac{(b-a)}{m} \to \Phi(y_i),$$

és így $n \to \infty$-re az egész összeg határértéke

$$\sum_{j=1}^{n} \Phi(y_i) \frac{(d-c)}{n} \ \to \ \int_c^d \Phi(y) dy.$$

Tehát ha $R = [a,b] \times [c,d]$ téglalap-tartományon integrálunk, akkor

$$\iint\limits_R f dR = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Megjegyzés. Az integrál kiértékelése belülről kívülre megy, azaz

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Példa. Legyen $f(x,y) = x^2 + 4y$, és $R = [-2,2] \times [1,3]$. Ekkor

$$\int_{-2}^2 \int_1^3 (x^2+4y)dydx = \int_{-2}^2 \left[x^2y + 2y^2\right]_{y=1}^{y=3} dx = \int_{-2}^2 (2x^2+16)dx = 2(\frac{16}{3} + 32).$$

A másik sorrendben elvégezve az integrálást ugyanez az eredmény jön ki. **HF**.

Általánosítani fogjuk a fenti tételt normáltartományokra.

2.1.3. Definíció. *Egy $R \subset \mathbb{R}^2$ részhalmaz x szerinti normáltartomány, ha R a következő tulajdonságú: létezik egy $[a,b]$ intervallum és léteznek $\Phi_1, \Phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények, melyekre $\Phi_1 \leq \Phi_2$, és*

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\}.$$

Hasonlóan, $R \subset \mathbb{R}^2$ y szerinti normáltartomány, ha létezik $[c,d]$ intervallum és léteznek $\Psi_1, \Psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvények, melyekre $\Psi_1 \leq \Psi_2$, és

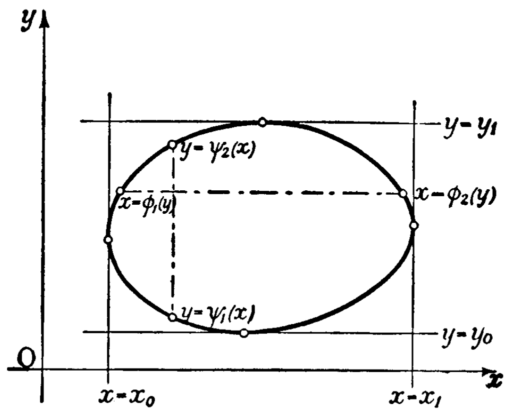
$$R = \{(x,y) : c \leq y \leq d,\ \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\}.$$

2.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy f integrálható R-en, ahol R x szerinti (ill. y szerinti) normáltartomány. Ekkor*

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)dydx,$$

illetve

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_c^d \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)dxdy.$$



2.3. ábra. Normáltartomány.

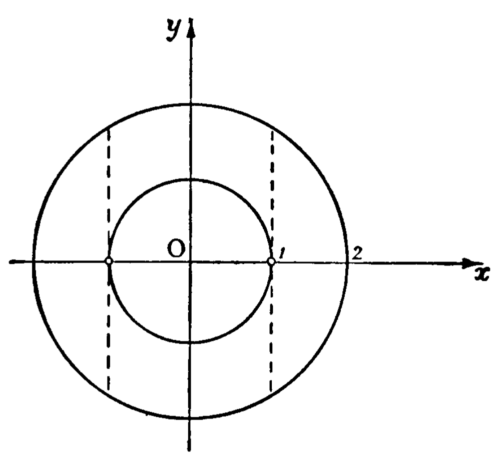
Példa. Legyen R az egységkör,

$$R = \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Ekkor

$$\iint\limits_R f(x, y) dR = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

Eddig a normáltartományt konvex tartományban vizsgáltuk, most kiterjesztjük a nem konvexekre is:



2.4. ábra. Nem konvex tartomány, körgyűrű.

Példa. Legyen R az alábbi körgyűrű:

$$R = \{(x, y) : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4]\}.$$

Ekkor

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx +$$

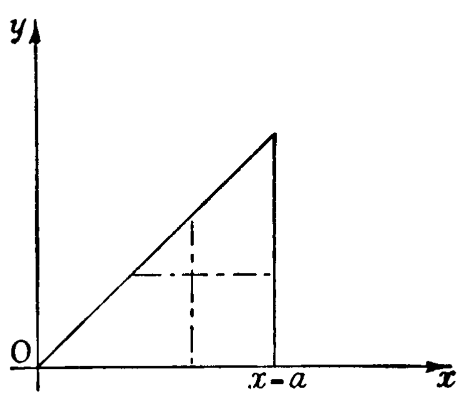
$$+\int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx.$$

Példa. Legyen R háromszög alakú tartomány, melynek csúcsai a $(0,0)$, $(a,0)$ és $(0,a)$ pontok. Ekkor R mindkét változó szerint normáltartomány, éspedig

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y):\ 0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le x\}, \\ R &= (x,y):\ 0 \le y \le a,\ \ y \le x \le a\} \end{aligned}$$

. Adott $f(x,y): R \to \mathbb{R}$, ezen értelmezett függvény. Ekkor

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int_0^a \int_0^x f(x,y)dydx = \int_0^a \int_y^a f(x,y)dxdy.$$



2.5. ábra. Háromszög alakú tartomány.

Ha speciálisan $f(x,y) = \phi(y)$ alakú, akkor

$$\int_0^a \int_y^a \phi(y)dxdy = \int_0^a \phi(y)(a-y)dy.$$

2.2. Integrálás helyettesítéssel

Ismétlés (helyettesítés egyváltozós függvényeknél):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du,$$

ha az integrálban a $x = \phi(u)$ helyettesítést végezzük. Ezt a formulát általánosítjuk.

2.2.1. Lineáris (affin) transzformáció

Tekintsünk egy lineáris transzformációt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

ahol

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Részletesen kiírva a fenti leképezést

$$\begin{aligned} x &= au + bv \\ y &= cu + dv \end{aligned}$$

Feltesszük, hogy $\det B \neq 0$, ekkor az affin leképezés egy-egyértelmű.

Első kérdés, hogy affin leképezés hatására egy tartomány területe hogyan változik?

Kitérő, analitikus geometria. Legyen R az a háromszög alakú tartomány, melynek csúcspontjai az origó és a $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ pontok. Könnyen igazolható, hogy ennek területe

$$A(R) = \frac{1}{2}\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

A lineáris transzformáció a fenti pontokat a $P_1' = (x_1', y_1')$, $P_2' = (x_2', y_2')$ pontokba viszi, az R háromszög képe R' lesz.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

azaz például

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + by_1 \\ y_1' &= cx_1 + dy_1. \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel az új terület

$$2A(R') = (ax_1 + by_1)(cx_2 + dy_2) - (ax_2 + by_2)(cx_1 + dy_1) =$$

$$= x_1y_2(ad - cd) + x_2y_1(bc - ad) = (ad - bc)(x_1y_2 - x_2y_1),$$

azaz

$$A(R') = (ad - bc)A(R) = \det(B)A(R).$$

Ez általános mérhető tartományokra is igaz lesz.

2.2.1. Állítás. *Tetszőleges R mérhető tartomány esetén*

$$A(R') = \det(B)A(R).$$

Megjegyzés. Ha az affin transzformációt

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u, v) = au + bv \\ y &= \Psi(u, v) = cu + dv \end{aligned}$$

alakban írjuk, akkor

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_u' & \Phi_v' \\ \Psi_u' & \Psi_v' \end{pmatrix} = D(u, v).$$

Ez a transzfromáció Jacobi mátrixa.

2.2.2. Általános transzformáció

Tekintsünk egy

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u, v) \\ y &= \Psi(u, v) \end{aligned}$$

koordináta transzformációt. Tegyük fel, hogy a Jacobi mátrixa sehol sem szinguláris, azaz $\det D(u, v) \neq 0$.

2.2.1. Tétel. *Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ mérhető tartomány, és*

$$R' = \{(u,v) : \; x = \Phi(u,v), y = \Psi(u,v), (x,y)\epsilon R\},$$

akkor R' is mérhető, és

$$A(R') = \iint\limits_{R'} \det(D(u,v))dudv.$$

Tehát, mivel az R tartomány területe

$$A(R) = \iint\limits_{R} 1 \; dxdy,$$

így a transzformáció után a terület

$$A(R') = \iint\limits_{R'} \det \; D(u,v)dudv$$

lesz.

2.2.3. Integrál-transzformáció

Az előző fejezetben láttuk, hogy egy mérhető tartomány területe hogyan változik egy transzformáció hatására. Ez alapján megfogalmazhatjuk a tételt, ami a helyettesítéses integrálra vonatkozik.

2.2.2. Tétel. *Adott egy $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, ahol R korlátos, zárt mérhető tartomány. Tekintsünk egy*

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u,v) \\ y &= \Psi(u,v) \end{aligned}$$

transzformációt, melyről feltesszük, hogy Jacobi mátrixa sehol sem szinguláris, azaz $\det D(u,v) \neq 0$ *R-ben, ahol*

$$D(u,v) = \begin{pmatrix} \Phi'_u(u,v) & \Phi'_v(u,v) \\ & \\ \Psi'_u(u,v) & \Psi'_v(u,v) \end{pmatrix}.$$

Legyen

$$R' = \{(u,v): \ (\Phi(u,v), \Psi(u,v)) \epsilon R\}.$$

Ekkor:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f(\Phi(u,v),(\Psi(u,v)))\det D(u,v)dudv.$$

Speciális esetként tekinsük a polárkoordinátákat. Az új koordináták (r,θ), ahol

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

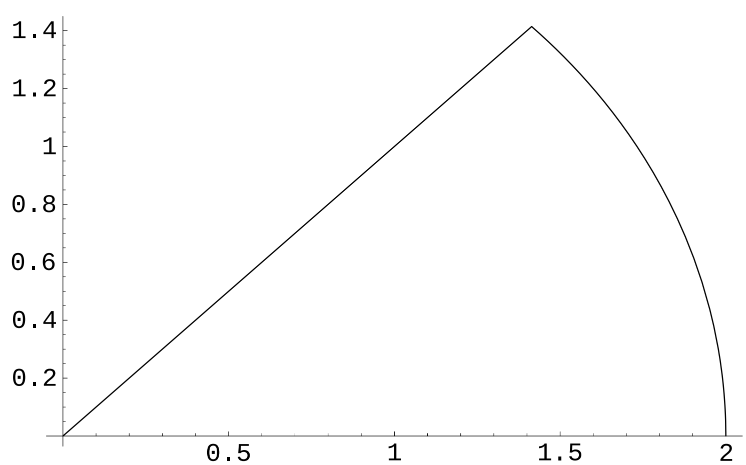
A Jacobi mátrix determinánsa:

$$\det D(r,\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Így a megefelelő integrál- transzformáció:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \ r \ drd\theta.$$

Példa. Legyen $f(x,y) = x^2 - y^2$, az integrálási tartomány, R, egy nyolcadkör. (Ld. 2.6. Ábrát.)



2.6. ábra. Körcikk alakú integrálási tartomány

Az R taromány megfelelőjét így tudjuk leírni polárkoordinátákkal:

$$R' = \{(r,\theta):\ 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}.$$

Látható, hogy a tartomány az (r,θ) síkon téglalap lesz. Ekkor

$$\iint\limits_R (x^2-y^2)dxdy = \int_0^2 \int_0^{\pi/4} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) r d\theta dr = \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) d\theta =$$

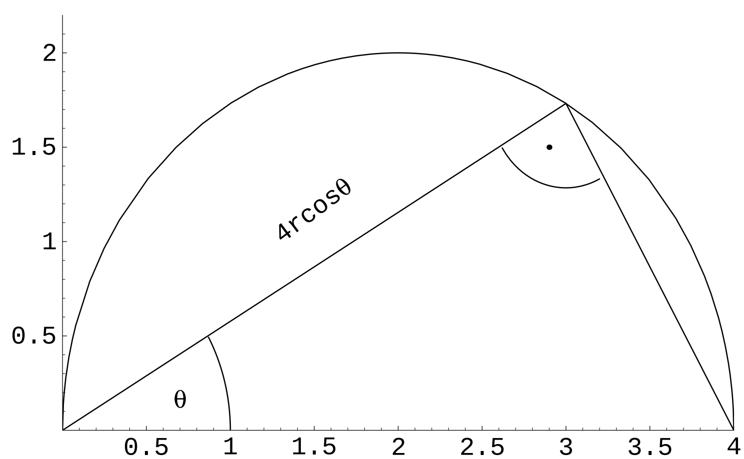
$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4} = 2.$$

Példa. Legyen $f(x,y) = xy$, az integrálási tartomány

$$R = \{(x,y) : y \ge 0, (x-2)^2 + y^2 \le 4\}$$

egy félkör. Polárkoordináták segítségével

$$R' = \{(r,\theta):\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 4\cos\theta\}.$$



2.7. ábra. Félkör alakú integrálási tartomány.

Láthatóan ez θ szerinti normáltartomány. Így

$$\iint\limits_R xy\ dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} r^2 \cos\theta \sin\theta r dr d\theta =$$

$$= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin\theta d\theta = \frac{32}{3}.$$

2.3. Improprius integrálok

Eddig feltettük, hogy $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos, az R tartomány mérhető. Két típusú általánosítást tekintünk.

2.3.1. Nem korlátos függvény integrálja

Elsőként tegyük fel, hogy f nem korlátos függvény . Pontosabban feltesszük, hogy $f : R \to \mathbb{R}$ folytonos, kivéve néhány pontot, ahol nincs véges határértéke.

Tekintsük a következő tartománysorozatot: $R_1 \subset R_2 \subset \ldots R_n \subset \ldots \subset R$, ahol R_n-en az f függvény folytonos és $\lim_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$

2.3.1. Definíció. *A függvény improprius értelemben integrálható, ha létezik az*

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{R_n} f(x,y)dxdy$$

határérték, és ez független az (R_n) sorozat megválasztásától.

2.3.1. Tétel. *Tegyük fel,hogy létezik egy olyan (R_n) halmazsorozat, amelyre f folytonos R_n-en, $\lim_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$, és*

$$\iint\limits_{R_n} |f(x,y)|dxdy < M,$$

valamely n-től független M valós számra. Ekkor f improprius értelemben integrálható.

Példa. Legyen $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ és az integrálási tartomány $R = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1)\}$. Gondot okozhat, hogy a $(0,0)$-ban nincs értelmezve, és környezetében nem korlátos.

Tekintsük R közelítését:

$$R_n = \{(x,y) : \frac{1}{n} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1\}.$$

A halmaz megfelelője polárkoordinátákban:

$$R_n' = \{(r,\theta):\ 0 \le \theta \le 2\pi;\ \frac{1}{n} \le r \le 1\}.$$

Az R_n halmazon a függvény integrálható, hiszen

$$\iint\limits_{R_n} |f(x,y)| dxdy = \int_0^{2\pi} \int_{1/n}^1 |\ln r| r dr d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{1/n}^1 |\ln r| r dr \le 2\pi \int_0^1 |\ln r| r dr = M.$$

Felhasználtuk, hogy a $g(r) = r \ln r$-nek 0-ban van véges határértéke, emiatt integrálható. Az improprius integrál értéke

$$I = \iint\limits_R \ln \sqrt{x^2+y^2} dxdy = 2\pi \int_0^1 r \ln r dr = -\frac{1}{2}\pi.$$

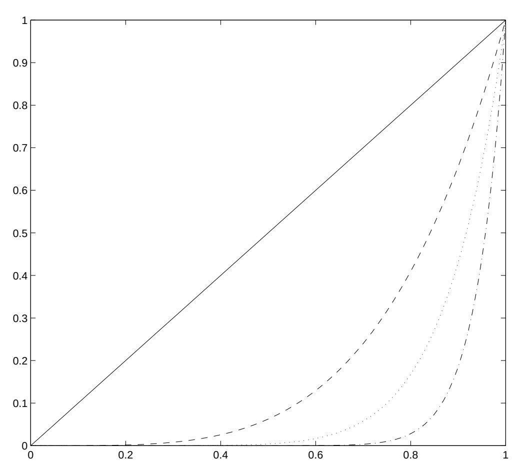
Példa. Legyen

$$f(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha},$$

valamely $\alpha > 0$ mellett, és az integrálási tartomány

$$R = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1\}.$$

A függvény a $(0,0)$ pontban nincs értelmezve, környezetében nem korlátos.



2.8. ábra. A hatványfüggvény az origo közelében $\alpha = 1$ esetén.

Az R tartományt közelítsük az alábbi módon:

$$R_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$

Ekkor

$$\iint\limits_{R_n} f(x, y)dxdy = \int_{1/n}^{1} \int_{0}^{2\pi} r^{-\alpha} r d\theta dr = 2\pi \int_{1/n}^{1} r^{1-\alpha} < 2\pi \int_{0}^{1} r^{1-\alpha} dr.$$

Ez az utóbbi improprius integrál akkor konvergens, ha $1 - \alpha > -1$, azaz $\alpha < 2$. Ebből az következik, hogy a hatványfüggvény $\alpha < 2$ esetben improprius értelemben integrálható.

Ez alapján megfogalmazhatjuk az alábbi *elégséges* feltételt improprius integrál létezésére.

2.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : R \to \mathbb{R}$ nem korlátos az R mérhető tartomány valamely pontjában, legyen ez például az origo. Tegyük fel, hogy*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\alpha}}$$

teljesül valamely $0 < \alpha < 2$ és $M > 0$ számra, minden $(x, y) \epsilon R$ esetén. Ekkor f improprius értelemben integrálható.

2.3.2. Improprius integrál nem korlátos tartományon

Tegyük fel, hogy R nem korlátos és ezen adott az $f : R \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

2.3.2. Definíció. *Tegyük fel, hogy létezik R-nek olyan közelítése, melyre $R_1 \subset R_2 \ldots \subset R$, R_n mérhető tartomány, és*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R.$$

Ekkor nyilván minden n-re létezik az

$$\iint\limits_{R_n} f(x, y)dxdy$$

integrál. Ha

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)dxdy$$

létezik és független az (R_n) halmazsorozat megválasztásától, akkor azt mondjuk, hogy f improprius értelemben integrálható, és

$$\iint_{R} f(x,y)dR = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)dR_n.$$

2.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy létezik egy olyan - a definícióban szereplő - (R_n) sorozat, melyre*

$$\iint_{R_n} |f(x,y)|dxdy \le M,$$

azaz az integrálok egyenletesen korlátosak minden n-re. Ekkor f improprius értelemben integrálható, és tetszőleges másik (S_n) tartománysorozat esetén is, mely kielégíti a fenti feltételeket

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)dS_n = \iint_{R} f(x,y)dR.$$

Példa. Legyen $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, az integrálási tartomány az egész tér, $R = \mathbb{R}^2$. Válasszuk az alábbi tartománysorozatot:

$$R_n = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le n^2\}.$$

Nyilván R_n korlátos és zárt tartomány. A megfelelő tartomány polárkoordinátákkal:

$$R'_n = \{(r,\theta) :\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le n\}.$$

Ekkor

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{R'_n} re^{-r^2}drd\theta = 2\pi \int_0^n re^{-r^2}dr < 2\pi \int_0^\infty re^{-r^2}dr.$$

Így az improprius integrál értéke:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = 2\pi \int_0^\infty re^{-r^2}dr = 2\pi \left[-\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty = \pi.$$

Más közelítő tartományokon keresztül is ezt az eredményt kapjuk. Legyen tehát

$$S_m = \{(x, y) : |x| \leq m, |y| \leq m\}.$$

Nyilván

$$S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \mathbb{R}^2, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \mathbb{R}^2.$$

Így

$$\iint_{S_m} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{-m}^{m} e^{-x^2} dx \int_{-m}^{m} e^{-y^2} dy = (\int_{-m}^{m} e^{-x^2} dx)^2 \to \pi.$$

Ebből azonnal következik az a jól ismert összefüggés, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.3.4. Tétel. *Legyen R olyan nem korlátos tartomány, melynek lezárása az origót nem tartalmazza. Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre valamely $\alpha > 2$ mellett*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\alpha}}$$

minden $(x, y) \epsilon R$ esetén, ahol M konstans. Ekkor f improprius értelemben integrálható.

Bizonyítás. Azonnal következik abból a tényből, hogy a fenti tartományon $\alpha > 2$ esetén a hatványfüggvény improprius értelemben integrálható (**HF**).

Következmény. Az

$$f(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\alpha}}$$

függvényt tekintjük az $R = \mathbb{R}^2$ tartományon. Ez semmilyen $\alpha > 0$ esetén nem integrálható impropriusan.

2.4. Kitekintés többszörös integrálokra

Tekintsük egy három dimenziós $R \subset \mathbb{R}^3$ tartományt és egy ezen értelmezett $f : R \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z)$ függvényt. Az kettős integrálhoz hasonlóan értelmezhető a

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dR$$

hármas integrál.

2.4.1. Az integrál értelmezése

1 Jordan-mérték értelmezése: Külső és belső közelítésekkel, ez 3 dimenzióban egyre kisebb oldalú kockákkal történik.

2 Integrál értelmezése hasonló a kétdiemzióhoz. Legyen R korlátos tartomány, f ezen értelmezett háromváltozós függvény. Az R tartomány egy nem átfedő felosztása $\cup_{i=1}^{n} R_i$. Ha (ξ_i, η_i, ζ_i) tetszőleges pont R_i-ben, akkor a felosztáshoz tartozó *Riemann közelítő összeg*:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)A(R_i).$$

A függvény integrálható , ha

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \max(\delta(R_i))\to 0}} I_n$$

létezik és független a felosztás sorozattól. Ekkor ez a határérték a

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dR.$$

Speciális esetként tegyük fel, hogy $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ háromdimenziós téglalap, azaz

$$R = \{(x, y, z) : \; x\epsilon[a, b], \; y\epsilon[c, d], z \; \epsilon[e, g]\}.$$

a, b, c, d, e, g végesek és valósak. A tartomány zárt és korlátos. Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos függvény .

2.4.1. Tétel. *A fenti feltételek mellett*

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dR = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x,y,z)dzdydx.$$

Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ mérhető tartomány az (x,y) síkon, és adott ezen két függvény, $F_1 : S \to \mathbb{R}$, $F_2 : S \to \mathbb{R}$ melyekre $F_1(x,y) \leq F_2(x,y)$ minden (x,y)-ra.

2.4.1. Definíció. *Az R tartomány normáltaromány, ha a következő alakú:*

$$R = \{(x,y,z)|(x,y)\epsilon S, F_1(x,y) \leq z \leq F_2(x,y)\}.$$

2.4.1. Állítás. *Legyen R a fenti definícióban szereplő normáltartomány, $f : R \to \mathbb{R}$integrálható függvény. Ekkor*

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dR = \iint\limits_S \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)dz\ dS.$$

Ha $S = [a,b] \times [c,d]$,akkor

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dR = \int_a^b \int_c^d \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx.$$

2.4.2. Koordinátatranszformáció

Adott $f(x,y,z,\ldots)$ n-változós függvény, értelmezési tartománya $R \subset \mathbb{R}^n$. Áttérünk új koordinátarendszerre, az $(x,y,z,\ldots)$ változók helyett az $(u,v,w,\ldots)$ változókat tekintjük, ahol a transzformációt leíró függvényrendszer

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u,v,w,\ldots) \\ y &= \Psi(u,v,w,\ldots) \\ z &= \chi(u,v,w,\ldots) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.1}$$

A transzformáció hatására egy R tartomány képe $R' \subset \mathbb{R}^n$ lesz.

2.4.2. Tétel. *Legyen R korlátos és zárt tartomány $\mathbb{R}^n$-ben, $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Tekinsünk a fenti (2.1) koordinátatranszformációt, melyről feltesszük hogy Jabobi mátrixa , azaz*

$$J = \begin{pmatrix} \Phi'_u & \Phi'_v & \Phi'_w & \dots \\ \Psi'_u & \Psi'_v & \Psi'_w & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

nemszinguláris. Ekkor

$$\iint_R \dots \int f(x, y, z, \dots) dx dy dz \dots =$$

$$= \iint_{R'} \dots \int f(\Phi(u, v, w, \dots), \Psi(u, v, w, \dots), \dots) \, \det J(u, v, w, \dots) du dv dw \dots .$$

Szférikus (=gömbi) koordináták $\mathbb{R}^3$-ban. Egy (x, y, z) pont gömbi koordinátái (r, ϕ, θ), amit a következőképpen definiálunk.

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\qquad r \geq 0$ a pontba mutató vektor hossza.
- $\phi \epsilon [0, \pi)$ pontba mutató vektor és az (x, y) sík szöge.
- $\theta \epsilon [0, 2\pi)$ a pontba mutató vektor (x, y) síkra vett vetületének az x egyenes pozitív részével bezárt szöge.

A gömbi koordinátákkal tehát az (x, y, z) pont így írható le:

$$\begin{aligned} z &= r \cos \phi \\ x &= r \sin \phi \; cos \theta \\ y &= r \sin \phi \; \sin \theta. \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $(r, \phi, \theta) \to (x, y, z)$ transzformáció Jacobi mátrixát:

$$J = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Könnyem látható, hogy a fenti mátrix determinánsa

$$\det J = r^2 \ \sin\phi.$$

Példa. Számoljuk ki a gömb térfogatát. Legyen $R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ az egységgömb. Ekkor

$$\iiint\limits_R 1 \ dxdydz = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\phi d\theta d\phi dr = 2\pi \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \sin\phi d\phi = \frac{4\pi}{3}.$$

Felhasználtuk, hogy gömbi koordinátákkal R' téglalaptartomány:

$$R' = \{r \leq 1,\ 0 \leq \phi < \pi,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

3. fejezet

Fourier analízis

3.1. Fourier sorok

3.1.1. Függvénysorozatok, függvénysorok

Röviden átismételjük a függvénysorozatokról, függvénysorokról tanultakat. Legyenek adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ és $f : D \to \mathbb{R}$ függvények közös $D \subset \mathbb{R}$ értelmezési tartománnyal.

3.1.1. Definíció. *Azt modjuk, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

ha minden $x \epsilon D$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

3.1.2. Definíció. *A fenti konvergencia egyenletes, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik N küszöbindex, hogy*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N, \qquad \forall x \epsilon D.$$

3.1.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f,$$

ha minden $x \epsilon D$-re fennáll, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x) = f(x).$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ végtelen sort függvénysornak nevezzük.

A függvénysor *egyenletes konvergens*, ha az

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x), \qquad N = 1, 2, \ldots$$

részletösszegek sorozata egyenletesen konvergens.

Speciális esetként tegyük fel, hogy a függvénysor tagjai hatványfüggvények,

$$f_n(x) = c_n(x - x_0)^n,$$

rögzített x_0 mellett. Feltesszük most az egyszerűség kedvéért, hogy $x_0 = 0$. Ennek megfelelően a hatványsor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

3.1.1. Tétel. *Ha a hatványsor egyenletesen konvergens egy D halmazon, akkor ott az f összegfüggvény differenciálható is, és*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}.$$

Hasonlóképp, ha D korlátos, akkor f integrálható, és

$$\int_D f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_D c_n x^n dx.$$

Tegyük fel, hogy az f függvény végtelen sokszor differenciálható az $x_0 \epsilon D$ belső pontban, akkor definiáltuk a

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Taylor sort. Ez a felírás lényegében egyértelműen előállítja a függvényt, erről szólt a következő tétel ($x_0 = 0$ mellett):

3.1.2. Tétel. *Ha f előáll*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

alakban, akkor

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

3.1.2. Fourier sorok

Az előző fejezetben láttuk, hogy bizonyos függvényeket elő tudunk állítani olyan függvénysor összegeként, melyben a tagok hatványfüggvények. Ugyanilyen jellegű előállításra törekszünk most periodikus függvények – $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ – felhasználásával.

3.1.4. Definíció. *Az $f(x)$ függvény n-ed fokú trigonometrikus polinom, ha előáll*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

alakban, valamely a_k, b_k valós együtthatókkal.

3.1.5. Definíció. *Trigonometrikus sornak az alábbi végtelen sort nevezzük:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) .$$

Trigonometrikus sorok más elnevezése *Fourier sorok*.

Kérdés, hogy milyen függvény állítható elő Fourier sor segítségével. Mivel a végtelen összeg minden tagja 2π szerint periodikus, ezért azt várjuk, hogy az összegfüggvény 2π szerint legyen periodikus. Vigyázni kell azonban, mert végtelen sok folytonos függvényt összeadva az összegfüggvény nem biztos, hogy folytonos lesz.

Definiáljuk az alábbi alapfüggvényeket:

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= 1 \\
\phi_1(x) &= \sin x \\
\phi_2(x) &= \cos x \\
&\vdots \\
\phi_{2k-1}(x) &= \sin(kx), \\
\phi_{2k}(x) &= \cos(kx) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A fenti függvényeknek a $[-\pi, \pi]$-re való leszűkítést tekintjük, de bármilyen más 2π hosszúságú intervallum jó lenne.

3.1.1. Lemma. *Tetszőleges $n \neq m$ mellett*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x) = 0.$$

Megjegyzés. Ez a tulajdonság azt jelenti, hogy a (ϕ_n) függvényrendszer ortogonális.

Bizonyítás. Ha $n = 0$ vagy $m = 0$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0.$$

Egyéb esetekben az alábbi trigonometrikus azonosságokat használjuk fel:

$$\begin{aligned}
\cos(nx)\cos(mx) &= \frac{\cos(n+m)x + \cos(n-m)x}{2} \\
\cos(nx)\sin(mx) &= \frac{\sin(n+m)x + \sin(m-n)x}{2} \\
\sin(nx)\sin(mx) &= \frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2}
\end{aligned}$$

3.1.2. Lemma. *Tetszőleges n mellett*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2(x)dx = \begin{cases} 2\pi & n = 0 \\ \pi & n \neq 0 \end{cases}.$$

Bizonyítás. $n = 0$ esetén az azonosan 1 függvényt integráljuk. $n > 1$ esetén egyrészt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx,$$

másrészt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos^2(nx) + \sin^2(nx)\right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi.$$

3.1.3. Tétel. *Tegyük fel,hogy*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \tag{3.1}$$

és a fenti függvénysor egyenletes konvergens a $[-\pi,\pi]$ *intervallumon. Ekkor*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k=0,1,2,\ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k=1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Szorozzuk meg az (3.1) egyenletet $\cos(mx)$-el majd integráljuk a $[-\pi,\ \pi]$ intervallumon:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}(\frac{a_0}{2}\cos(mx)dx + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\big)\cos(mx))dx =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(mx)dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(mx)dx\right) =$$

$$= a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(mx)dx = a_m\pi.$$

Itt kihasználtuk, hogy a függvénysor konvergenciája egyenletes, hiszen felcseréltük az integrálás és a végtelen összegzés sorrendjét.

Megjegyzés. A tételben szereplő egyenletes konvergencia nagyon erős feltétel.

Legyen most f tetszőleges 2π szerint periodikus függvény.

3.1.6. Definíció. *Az* $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ *függvény Fourier együtthatóit így definiáljuk,:*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k=0,1,2,\ldots \tag{3.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k=1,2,\ldots. \tag{3.3}$$

feltéve hogy a fenti integrálok léteznek

3.1.7. Definíció. *Az* $f(x)$ *Fourier sorát (formálisan) így értelmezzük:*

$$f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)),$$

ahol a_k *és* b_k *a most definiált Fourier együtthatók.*

1. *Példa.* Tegyük fel, hogy f páros függvény. Ekkor Fourier sorában a $\sin(kx)$ tagok együtthatói mind 0-k lesznek, így

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

ahol a párosság miatt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

2. *Példa.* Hasonlóképp, ha f páratlan, akkor Fourier sora:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

ahol

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

3. *Példa.* Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ 0 \le x < \pi \\ \\ -1 & \text{ha } \ -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 2\pi)$ egyébként. Láthatóan f páratlan függvény. Fourier együtthatói:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k).$$

Ez az együttható 0, ha k páros. Így f Fourier sora:

$$f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

3.1.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény 2π szerint periodikus és tegyük fel, hogy a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a függvény véges sok pont kivételével folytonos. Ezenkívül tegyük fel, hogy a szakadási pontok elsőfajú szakadások, és hogy véges sok pont kivételével f differenciálható. Ekkor az f' függvény Fourier sora tagonkénti deriválással kiszámítható:*

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx)).$$

Bizonyítás. f' Fourier együtthatóit jelölje α_k és β_k. Ekkor f' Fourier sora:

$$f' \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)),$$

ahol a definíciót felhasználva

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \Big[f(x) \cos(kx) \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0 + k b_k.$$

A fenti egyenletben az első tag azért tűnik el, mert f 2π szerint periodikus.

3.1.3. Fourier sor komplex alakja

Emlékeztetünk rá, hogy az *Euler formula* szerint

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ebből következik, hogy

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos(x) - i \sin(x),$$

ezért a trigonometrikus függvények kifejezhetők komplex alakban:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Az n-dik Fourier polinom:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Helyettesítsük be a (3.4) kifejezéseket.

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx},$$

ahol az α_k együttható

$$\alpha_k = \frac{a_k - i b_k}{2}, \qquad k > 0$$

$$\alpha_k = \frac{a_k + ib_k}{2}, \qquad k < 0.$$

Látható, hogy $\alpha_k = \overline{\alpha_{-k}}$, egymás konjugáltjai.

3.1.5. Tétel. *(A 3.1.3 Tétel átfoglamazása.) Tegyük fel, hogy f előáll*

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx} \tag{3.5}$$

alakban. Ekkor:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{3.6}$$

Bizonyítás. Szorrozzuk meg az (3.5) egyenletet e^{-ilx}-el és integráljunk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon x szerint

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ilx} dx = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx.$$

Így a tétel állítása azonnal következik az (e^{imx}) rendszer alábbi tulajdonságából:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{ha } m = 0 \end{cases}.$$

3.1.4. Fourier sor konvergenciája

Azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen feltételek mellett teljesül, hogy egy f függvény előáll Fourier sora összegeként, azaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

3.1.6. Tétel. *(Fourier sorok alaptétele) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény. Feltesszük, hogy f szakaszonként folytonosan differenciálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, legfeljebb véges sok szakadási hellyel, amelyek első fajú szakadások. Ha x_0 szakadási pont, akkor itt a függvényérték legyen*

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-ikx},$$

ahol az a_k*,* b_k *és* α_k *együtthatókat (3.2), (3.3) ill. (3.6) definiálja.*

Bizonyítás. A vázlatot mondjuk el, amely két lemmán alapul.

3.1.3. Lemma. *Vezessük be az alábbi trigonometrikus kifejezést:*

$$\sigma_n(\alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha).$$

Ekkor

$$\sigma_n(\alpha) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

A lemma bizonyítása. A komplex alakot használva felírhatjuk, hogy

$$\sigma_n(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\alpha} = \frac{1}{2}\, e^{-in\alpha}(1 + e^{i\alpha} + \ldots + e^{2in\alpha}) = \frac{1}{2}\;\frac{e^{-in\alpha} - e^{i(n+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}}.$$

Bővítsük a fenti törtet $e^{-i\alpha/2}$-vel:

$$\sigma_n(\alpha) = \frac{1}{2}\;\frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\alpha} - e^{i(n+\frac{1}{2})\alpha}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

A tétel bizonyítása. Azt kell belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x),$$

ahol

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Helyettesítsük be a (3.2) és (3.3) kifejezéseket a_k és b_k helyébe. Az integrálás és összegezés sorrendjét felcserélve azt kapjuk, hogy

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right)dt.$$

Felhasználva a fenti 3.1.3 lemmát, ezt így folytathatjuk:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin(\frac{t-x}{2})}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt.$$

Itt felhasználtuk, hogy f 2π szerint periodikus.

Az 3.1.3 lemmából az is következik, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}d\alpha + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\alpha)d\alpha = \pi.$$

Emiatt azt írhatjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt.$$

A két utóbbi összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t+x)-f(x)}{2\sin(\frac{t}{2})}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt. \tag{3.7}$$

A bizonyítás befejezéséhez szükségünk lesz az alábbi analitikus lemmára:

3.1.4. Lemma. *(Lebesgue-Riesz-lemma) Legyen h a $[-\pi,\pi]$ intervallumon szakaszonként folytonos, szakaszonként folytonosan differenciálható függvény. Definiáljuk a*

$$K(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin(\lambda x)dx$$

kifejezést tetszőleges $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ esetén. Ekkor

$$\lim_{\lambda\to\infty} K(\lambda) = 0.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan $[\alpha,\beta]$ intervallumot, melyen f folytonosan differenciálható. Parciális integrálást alkalmazva ezt kapjuk:

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)\sin(\lambda x)dx = \left[-h(x)\frac{\cos(\lambda x))}{\lambda}\right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{\lambda}\int_{\alpha}^{\beta} h'(x)\cos(\lambda x)dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\Big[-h(x)\cos(\lambda x))\Big]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} h'(x)\cos(\lambda x)dx.\right)$$

Ez tart a 0-hoz, ha λ végtelenbe tart, hiszen a jobboldal második tényezője korlátos.

A tétel bizonyításának befejezéséhez alkalmazzuk a Lebesgue-Riesz lemmát

$$h(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

függvényre. Ha x folytonossági pontja f-nek:

$$s_n(x) - f(x) = K\left(n + \frac{1}{2}\right) \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Ha x nem lenne folytonossági pont, akkor egy kicsit hosszadalmasabb a meggondolás, de minden további nélkül átvihetőek ezek az argumentumok.

Példa. Legyen $f(x) = |x|$, ha $x\epsilon[-\pi,\pi]$. Mivel $f(x)$ páros, ezért $b_k = 0$. Ekkor

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi.$$

Továbbá

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)dx =$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi k}\left[\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k = 2n,\ k \neq 0 \\ & \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{ha} \quad k = 2n+1 \end{cases}.$$

Így f Fourier sora:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots\right).$$

Speciális esetként vizsgáljuk meg, mit kapunk $x = 0$ mellett:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots),$$

azaz

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.$$

Korábban felírtuk a

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 < x < \pi \\ \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \\ \\ -1 & \text{ha} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

függvény Fourier sorát. Mivel $x \neq 0$ esetén $f'(x) = g(x)$, ezért g Fourier sorát megkaphatjuk tagonkénti deriválással:

$$g(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \ldots + \frac{\sin(2k-1)}{2k-1} + \ldots).$$

3.1.5. Fourier együtthatók nagyságrendje

Tegyük fel, hogy $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható véges sok pont kivételével. Ekkor előállítható Fourier sora segítségével:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk a fenti végtelen sor konvergeciájának sebességéről.

Legyen $n \epsilon \mathbb{N}$ tetszőleges. Induljunk ki az alábbi egyenlőtlenségből:

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)^2 dx.$$

Végezzük el a jobboldalon a négyzetreemelést és így folytassuk a fenti egyenlőtlenséget:

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\frac{a_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + b_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \right) +$$

$$+\frac{a_0^2}{4} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1dx + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(kx)dx + b_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} sin^2(kx)dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Ezzel beláttuk az ú.n *Bessel egyenlőtlenség*et:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

teljesül minden $n\epsilon\mathbb{N}$-re.

Következmény. A Bessel egyenlőtelnség $n \to \infty$ esetén is igaz:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Ennél több is igazolható:

3.1.7. Tétel. *(Parseval egyenlőség) A Fourier együtthatókra teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Általában nem lesz igaz a Fourier sorok egyenletes konvergenciája. A következő tétel alpján lehetséges egyenletesen konvergens trigonometrikus sort konstruálni.

3.1.8. Tétel. *(Fejér tétele) Jelölje $s_n(x)$ az $f(x)$ n-edik Fourier polinomját. Képezzük ezek számtani átlagát:*

$$T_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x),$$

és a fenti konvergencia egyenletes.

3.1.6. Általános eset

Az eddigi fejezetekben olyan függvényekkel foglalkoztunk, amelyek 2π szerint periodikusak voltak. Tekintsünk most egy olyan f függvényt, amely egy véges intervallumon van értelmezve, és ezen az intervallumon keressük Fourier sorát.

Legyen

$$f : [x_0, x_0 + T] \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$

olyan függvény, amelynek véges sok pont kivételével folytonosan differenciálható, csal elsőfajú szakadása van, és a szakadási helyen vett helyettesítési érték a jobb- és baloldali határérték számtani átlaga. Ekkor

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x},$$

ahol

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{T}x}dx.$$

3.2. Fourier integrál

Fourier sorok elméletében láttuk, hogy ha f 2π szerint periodikus, elegendően sima függvény, akkor f előáll trigonometrikus sorok segítségével. Ezt általánosítjuk nem periodikus függvények esetére.

3.2.1. Fourier transzformáció

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény kielégíti az alábbi feltételeket:

1. Tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ véges intervallum esetén f leszűkítése az I intervallumra véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható.
2. Ha x_0 szakadási pont, akkor ez a szakadás elsőfajú, és itt a függvényérték:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

3. Feltesszük, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty.$$

3.2.1. Definíció. *Ha f teljesíti a fenti 1.-3. feltételeket, akkor definiáljuk az alábbi $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt:*

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx. \tag{3.8}$$

Ezt a függvényt f Fourier transzformáltjának nevezzük.

Megjegyzés. A Fourier transzformációt úgy értelmezzük, mint

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\big(\cos(sx) - i\sin(sx)\big)dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(sx)dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx))dx.$$

A Fourier transzformált jelölésére szokás még ezt használni:

$$\mathcal{F}(f, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixs}dx.$$

Belátjuk, hogy $\widehat{f}(s)$ jól definiált. Igazoljuk a (3.8) egyenletben szereplő integrál abszolut konvergenciáját. Az f-re tett 3. feltétel szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-isx}|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty.$$

Minden $B > 0$-ra definiáljuk az alábbi véges integrált:

$$\widehat{f_B}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} f(x)e^{-ixs}dx.$$

Ekkor $\widehat{f}$ definíciója:

$$\widehat{f}(s) = \lim_{B\to\infty} \widehat{f_B}(s).$$

Ez a határérték létezik, hiszen

$$|\widehat{f}(s) - \widehat{f_B}(s)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>B} |f(x)||e^{-ixs}|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>B} |f(x)|dx.$$

Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy B_0 küszöbszám, hogy ha $B > B_0$, akkor

$$\int_{|x|>B} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Mivel B meghatározása s-től független, minden $s \epsilon \mathbb{R}$-re érvényes. $\widehat{f}_B(s)$ tehát egyenletes konvergenciával tart $\widehat{f}(s)$-hez.

Megjegyzés. Szokásos elnevezés, hogy az f függvény az *időtartomány*-beli leírást adja meg, $\widehat{f}$ pedig a *frekvenciatartományban.*

3.2.2. A Fourier transzformáció tulajdonságai

Ha f valós függvény, akkor a Fourier transzformáltja általában komplex értékű:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)dt.$$

Ha f páros függvény, akkor Fourier transzformáltja valós értékű:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\cos(st)dt.$$

Ha f páratlan függvény, akkor Fourier transzformáltja tisztán képzetes lesz:

$$\widehat{f}(s) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)dt = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\sin(st)dt.$$

Példa. Legyen $f(x) = e^{-k|x|}$. Ez páros függvény, Fourier transzformáltja:

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-kt}\cos(st)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2+s^2}.$$

Itt felhasználtuk azt a – múlt félévben igazolt összefüggést – hogy

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)dx = \left[\frac{1}{a^2b^2}(-a\cos(bx) + b\sin(bx))\right]_0^{\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Példa. Legyen $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mivel f páros, ezért a Fourier transzformáltja valós.

$$g(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\cos(xs)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(xs)dx.$$

Ennek az integrálnak a kiszámítása analitikus eszközökkel közvetlenül nem végezhető el. Mivel ez az összefüggés igaz minden s-re, ezért deriválunk s szerint, majd a deriválás és integrálás sorrendjét felcseréljük. Az egyenletes konvergencia miatt ezt megtehetjük.

$$g'(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \sin(xs) dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(sx) \right]_0^\infty - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} s \cos(sx) dx = 0 - s \cdot g(s).$$

Az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$g'(s) = -sg(s).$$

Ennek általános megoldása

$$g(s) = ce^{-\frac{s^2}{2}}, \qquad c \epsilon \mathbb{R}.$$

c értékét $g(0)$ alapján tudjuk meghatározni:

$$g(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(0x) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = 1 = c.$$

Az utolsó lépésben az $y = x/\sqrt{2}$ helyettesítést hajtottuk végre. Tehát a Fourier transzformált:

$$g(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

Megjegyezzük, hogy ez az egyetlen olyan függvény, amely megegyezik Fourier transzformaáltjával.

3.2.1. Állítás. *A Fourier transzformált alaptulajdonságai:*

1. *Ez a hozzárendelés linearis, azaz*

$$\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s), \qquad \mathcal{F}(f + g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s).$$

2. *Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor $\mathcal{F}(f)$ mindig folytonos függvény.*

3. *(Átskálázás)*

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a} \mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a}).$$

4. (Idő megfordítása)

$$\mathcal{F}(f(-x), s) = -\mathcal{F}(f(x), -s).$$

5. (Idő eltolás)

$$\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s}\mathcal{F}(f(x), s).$$

6. (Frekvencia eltolás)

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k).$$

Bizonyítás.

1. Ez könnyen látható, hisz az intergál lineáris operátor.
2. Ez abból következik, hogy a Fourier transzformáltat folytonos függvények egyenletes határértékeként tudtuk meghatározni.
3. $$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y}\frac{1}{a}dy.$$
4. Az előző rész, $a = -1$ vásztással.
5. $$\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-is(y+x_0)}dy.$$
6. $$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s-k)x}dx.$$

3.2.3. Az alaptétel

3.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy f teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket. Ekkor f előállítható Fourier transzformáltja segítségével:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{isx}ds. \tag{3.9}$$

Ez az inverz Fourier transzformáció.

Az inverz Fourier transzformáció

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds$$

során az előállítás általában nem egyenletes. Egy elégséges feltétel az egyenletes konvergenciához:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f"(x)| dx < \infty \tag{3.10}$$

3.2.2. Állítás. *Ha az 1. - 3. feltételek teljesülnek a (3.10) feltétellel együtt, akkor az inverz Fourier transzformáció egyenletes konvergenciával állítja elő a függvényt. Ez azt jelenti, hogy ha*

$$f_A(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(s) e^{isx} ds,$$

akkor

$$\lim_{A \to \infty} f_A(x) = f(x)$$

egyenletesen teljesül.

3.2.2. Tétel. *(Parseval egyenlet) Ha 1. - 3. feltételek teljesülnek a (3.10) feltétellel együtt akkor:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds.$$

Megjegyzés. Azért fontos, hogy a fenti egyenlőségben $\widehat{f}(s)$ abszolutértékét vegyük, mert az általában komplex szám.

3.2.4. Az alaptétel ekvivalens alakja

3.2.3. Tétel. *Ha f kielégíti az 1.-2.-3. feltételeket, akkor f előállítható az alábbi integrál alakban:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(k(t-x)) dt \, dk. \tag{3.11}$$

Bizonyítás helyett megmagyarázzuk a (3.11) képletet. Mivel

$$\cos(k(t-x)) = \cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx),$$

ezt behelyettesítve a (3.11) képlet így írható:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\cos(kx)\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(kt)dt + \sin(kx)\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(kt)dt\right)dk.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(kt)dt,$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(kt)dt,$$

tetszőleges $k \geq 0$ valós szám esetén. Ekkor a fenti tétel állításának megfelelően f az alábbi alakban írható:

$$f(x) = \int_0^\infty (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))dk.$$

Megjegyzés. Ez az alak erősen emlékeztet a periodikus függvények esetén felírt Fourier sorra.

Megmutatjuk, hogy a (3.11) valóban a (3.9) képlet átfogalmazása. Mivel $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ minden $x \epsilon \mathbb{R}$-re, ezért

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

és így

$$\cos(k(t-x)) = \frac{e^{ik(t-x)} + e^{-ik(t-x)}}{2} = \frac{e^{itk}e^{-ixk} + e^{-itk}e^{ixk}}{2}.$$

Ezt behelyettesítve a (3.11) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(e^{-ixk}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{itk}dt + e^{ixk}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-itk}dt\right)dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(e^{-ixk}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{itk}dt\right)dk.$$

Megjegyzés. Az alaptétel eredeti formájában a k változónak az s változó felelt meg.

3.2.5. További tulajdonságok

3.2.3. Állítás. *A Fourier transzformált további tulajdonságai:*

7. *Tegyük fel, hogy*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x||f(x)|dx < \infty.$$
Ekkor
$$\mathcal{F}(xf(x), s) = i\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f(x), s).$$

8. *Ha*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx < \infty,$$
akkor
$$\mathcal{F}(f', s) = is\mathcal{F}(f, s).$$

Bizonyítás.

7.
$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f(x), s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{ds}\left(e^{-isx}\right)dx,$$
hiszen az egyenletes konvergencia miatt az integrálás és deriválás sorrendjét felcserélhetjük, a fenti egyenletet folytatva
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-isx}dx = (-i)\mathcal{F}(xf(x), s).$$

8. Parciálisan integrálva
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-isx}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-isx}\right]_{[}^{\infty} - \infty] + \frac{is}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx = is\mathcal{F}(f, s).$$

Megjegyezzük, hogy ez 8. tulajdonság az, ami miatt a Fourier transzformáció igen népszerű a műszaki irodalomban. Ez azt jelenti, hogy az időtartománybeli deriválás a frekvenciatartományban egy is tényezővel való szorzásnak felel meg.

4. fejezet

Komplex függvénytan

4.1. Komplex számok, sorozatok

4.1.1. Alapfogalmak

Komplex szám *kanonikus alakja*

$$z = x + iy, \qquad x = \Re(z),\ y = \Im(z),$$

ahol x a *valós rész*, y a *képzetes rész*, és i az imaginárius egység, $i^2 = -1$.

Egy komplex szám *konjugált*ja

$$\overline{z} = x - iy.$$

Komplex szám *abszolut értéke*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

A z komplex szám *trigonometrikus alak*ja

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = re^{i\phi}, \qquad r = |z|.$$

4.1.2. Komplex függvény

Legyen $D \subset \mathbf{C}$ egy tartomány a komplex számsíkon. Egy $f : D \to \mathbf{C}$ függvényt tekintünk. A független változót $z = x + iy$, a függő változót $w = u + iv$ jelöli. Tehát a hozzárendelést $f(z) = w = u + iv$ jelöli.

1. *Példa.* Legyen $f(z) = z^2$. Ekkor

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = w,$$

ezért a függő változók

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

A függvény mindenütt értelmezve van, $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.

2. *Példa.* Legyen $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Ekkor

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}\frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

A függvény minden $z \neq 0$ esetén értelmezve van.

Megjegyzés. Elfajuló komplex függvényen olyan függvényt értünk, melynek értelmezési tartománya és/vagy értékkészlete valódi része $\mathbb{C}$-nek, pl. valós.

4.1.3. Komplex számsorozatok

Speciális komplex függvények a komplex számsorozatok, melyek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, $\mathbb{N}$. A valós számsorozatokhoz hasonlóan ezt (z_n) jelöli, ahol $n \epsilon \mathbb{N}$, $z_n \epsilon \mathbb{C}$.

4.1.1. Definíció. *A (z_n) számsorozat korlátos, ha az abszolut értékekből álló $(|z_n|)$ valós számsorozat korlátos. (z_n) konvergens és határértéke a $z \epsilon \mathbb{C}$ komplex szám, azaz*

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z,$$

ha

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - z| = 0.$$

Másképp fogalmazva: $\forall \varepsilon > 0$-hoz létezik egy N küszöbindex, hogy ha $n > N$, akkor

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

Ha (z_n) komplex számsorozat, akkor definiáljuk az elemek valós és képzetes részéből álló

$$x_n = \Re(z_n), \qquad y_n = \Im(z_n)$$

valós számsorozatokat.

4.1.1. Állítás. *(z_n) akkor és csakis akkor korlátos, ha (x_n) és (y_n) is korlátosak. Ezen kívül*

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z = x + iy \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

1. *Példa.* Legyen a sorozat $(z_n) = \big((1+i)^n\big)$, $n \epsilon \mathbb{N}$. Ennek elemei

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i, \\ z_2 &= (1+i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i, \\ z_3 &= (1+i)2i = -2 + 2i \ldots \end{aligned}$$

A tagok abszolút értékeiből álló sorozat

$$|z_1| = \sqrt{2}, \qquad |z_2| = 2, \qquad |z_3| = \sqrt{8}, \dots, \qquad |z_n| = 2^{\frac{n}{2}}.$$

Mivel $|z_n| \to \infty$, ezért a sorozat nem korlátos.

2. *Példa.* Legyen a sorozat n-dik tagja

$$z_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n}).$$

Ekkor

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = -1, \qquad z_3 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) \dots .$$

Látható, hogy $|z_n| = 1$ minden n-re, tehát a sorozat korlátos.

4.1.2. Definíció. *A (z_n) komplex számsorozat konjugált sorozata $(\overline{z_n})$.*

4.1.2. Állítás. *(z_n) akkor és csakis akkor konvergens, ha $(\overline{z_n})$ konvergens.*

Nyilvánvaló, hiszen (z_n) akkor és csakis akkor konvergens, ha $\big(\Re(z_n)\big)$ és $\big(\Im(z_n)\big)$ is konvergensek.

4.1.3. Definíció. *(z_n) abszolut konvergens, ha $(|z_n|)$ konvergens.*

Ha (z_n) konvergens, akkor $(|z_n|)$ is konvergens. Fordítva nem igaz.

Példa. Legyen $z_n = \cos(n) + i\sin(n) = e^{in}$. Ekkor (z_n) nem konvergens, viszont $|z_n| \equiv 1$

4.1.4. Végtelen sorok

Valós számsorokhoz hasonlóan tekinthetünk komplex számokból álló végtelen összeget:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z_n.$$

Minden komplex számsorhoz két valós számsor tartozik; a valós és képzetes részből álló számsorok:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

4.1.3. Állítás. *A komplex elemű $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sor akkor és csakis akkor konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sorok konvergensek.*

Példa. (Végtelen mértani sor) Legyen $z_n = z^n$, ahol $z \epsilon \mathbf{C}$ rögzített szám. A számsor:

$$1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

4.1.4. Állítás. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *akkor és csakis akkor konvergens, ha* $|z| < 1$. *Ezen kívül a fenti konvergencia egyenletes, minden* $0 < q < 1$ *esetén, a* $D_q = \{z \epsilon \mathbf{C} : |z| \leq q\}$ *tartományon.*

Bizonyítás. Tekintsük a sor részletösszegeit:

$$\sum_{n=1}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}.$$

Így ennek határértéke

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}, \qquad \text{ha} \qquad |z^{N+1}| \to 0.$$

4.1.5. Hatványsorok

Legyen a sor n-dik tagja $z_n = c_n (z - z_0)^n$, ahol $z_0 \epsilon \mathbf{C}$ rögzített komplex szám, $c_n \epsilon \mathbb{R}$. Tetszőleges z esetén, ahol a fenti sor konvergens, definiálhatjuk az alábbi függvényt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Megjegyzés. $c_n \epsilon \mathbf{C}$ is lehet.

Legyen az egyszerűség kedvéért $z_0 = 0$. A valós hatványsorokra már megismert tétel mintájára itt is igaz lesz a következő:

4.1.1. Tétel. *(Konvergencia halmazra vonatkozó tétel.) Ha $f(z)$ konvergens valamely $\xi \epsilon \mathbf{C}$-re, akkor tetszőleges z-re, melyre $|z| < |\xi|$, szintén konvergens.*

Következmény. A konvergencia halmaz a komplex számsíkon egy kört alkot.

4.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a hatványsor konvergens egy $D \subset \mathbb{C}$ halmazon, és legyen a $z\epsilon$ int D. Akkor f itt differenciálható, és*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}.$$

Következmény. A már megismert elemi függvények kiterjeszthetők komplex argumentumra. Például $f(z) = e^z$-re:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

4.2. Komplex függvények

4.2.1. Határérték, folytonosság

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, és tekintsünk ezen egy hozzárendelést,

$$\begin{aligned} f \ &: \ D \to \mathbb{C} \\ &\quad z \ \mapsto f(z) = \Re(f(z)) + i\, \Im(f(z)). \end{aligned}$$

A függvény kanonikus alakja két valós értékű kétváltozós függvény megadását jelenti, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$u(x, y) = \Re(f(x + iy)), \qquad v(x, y) = \Im(f(x + iy)).$$

1. *Példa.* Legyen $f(z) = z^2$. Mivel $f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, ezért ennek kanonikus alakja

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

2. *Példa.* Tekintsük az alábbi kétváltozós függvényeket:

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Határozzuk meg azt a komplex függvényt, aminek ezek a valós ill. képzetes részei.

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}, \qquad z \neq 0.$$

4.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a z_0 pontban H, ha*

- *z_0 torlódási pontja D_f-nek,*
- *ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\delta > 0$, hogy ha $z \epsilon \text{ int } D_f$ és $0 < |z - z_0| < \delta$ akkor $|f(z) - H| < \varepsilon$.*

Példa. Tekintsük az $f(z) = 1/z$ függvényt, és határozzuk meg ennek határértékét a $z = i$ pontban. Azt várjuk, hogy

$$\lim_{z \to i} \frac{1}{z} = -i.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és rögzített. Be kell látnunk, hogy i bizonyos környezetében

$$\left|\frac{1}{z} - (-i)\right| < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad |1 + iz| < \varepsilon |z|$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$|1 + iz|^2 < \varepsilon^2 |z|^2.$$

Mivel $1 + iz = 1 + i(x + iy) = 1 - y + ix$, ezért a fenti egyenlőtlenséget koordinátákkal kiírva ezt kapjuk:

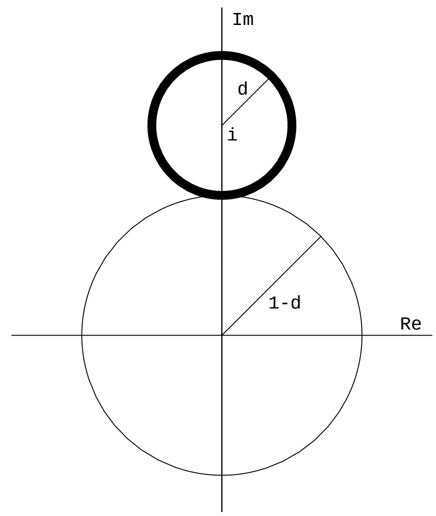
$$(1 - y)^2 + x^2 < \varepsilon^2 (x^2 + y^2).$$

Legyen

$$\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Be fogjuk látni, hogy

$$\text{ha} \quad |z - i| < \delta, \qquad \text{akkor} \quad \left|\frac{1}{z} - (-i)\right| < \varepsilon.$$



4.1. ábra. Az i körüli δ sugarú kör.

Vegyünk i-nek δ sugarú környezetéből egy $x + iy$ pontot. Ennek origótól vett távolságát megbecsülhetjük:

$$x^2 + y^2 > (1 - \delta)^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Másrészt ezekre a pontokra

$$|(x + iy) - i| < \delta$$

teljesül. Mivel $(x + iy) - i = x - i(y - 1)$ ezért ezekre a pontokra tovább becsülhetünk:

$$x^2 + (y - 1)^2 < \delta^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2(x^2 + y^2),$$

és épp ezt akartuk belátni.

Példa. Legyen $f(z) = z/\overline{z}$. Mi a függvény határértéke $z = 0$-ban? Írjuk fel a függvényt a trigonometrikus alakot használva. Ha $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$, akkor $\overline{z} = r(\cos(\phi) - i\sin(\phi))$ és így

$$f(z) = \frac{r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))}{r(\cos(\phi) - i\sin(\phi))} = \frac{\cos(2\phi) + i\sin(2\phi)}{1} = e^{i2\phi}.$$

Ezért

$$f(z) = e^{i2\phi},$$

ahonnan következik, hogy rögzített egyenes mentén a függvényérték ϕ-től függő konstans, tehát $z = 0$-ban a függvénynek nincs határértéke.

4.2.1. Tétel. *Legyen f kanonikus alakja: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Tekintsünk D_f-nek egy z_0 torlódási pontját. Ekkor*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = H$$

azzal ekvivalens, hogy léteznek az alábbi határértékek

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to z_0} u(x,y) &= U \\ \lim_{(x,y)\to z_0} v(x,y) &= V, \end{aligned}$$

és $H = U + iV$.

Előző példa folytatása. Felírjuk a függvény kanonikus alakját:

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{x+iy}{x-iy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

azaz

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad v = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Ezeket a kétváltozós függvényeket már jól ismerjük, láttuk, hogy nincs a $(0,0)$-ban határérték. Például

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

kiszámításakor az $y = kx$ egyenes mentén vett határértékek mind különbözőek:

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)} \frac{x^2-x^2k^2}{x^2+x^2k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

4.2.2. Definíció. *Legyen $f : D \to \mathbb{C}$ komplex függvény és $z \epsilon D$. Azt mondjuk, hogy f folytonos z-ben, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $|z' - z| < \delta$ és $z' \epsilon D$, akkor $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$*

4.2.2. Tétel. *f pontosan akkor folytonos $z = x+iy$-ban, ha u és v is folytonosak (x,y)-ben.*

4.2.2. Differenciálhatóság

Adott egy $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, és ezen egy $f : T \to \mathbb{C}$ komplex függvény. Legyen f kanonikus alakja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Tegyük fel, hogy u és v folytonosan differenciálható függvények, azaz léteznek az u'_x, u'_y, v'_x, v'_y parciális deriváltak és folytonosak. Látni fogjuk, hogy ez még nem lesz elegendő f deriválhatóságához.

4.2.3. Definíció. *f differenciálható z-ben, ha létezik a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{4.1}$$

határérték.

Példa. Legyen $f(z) = x = \Re(z)$. Differenciálható -e $z = 0$-ban? A kanonikus alak függvényei, $u(x,y) = x$ és $v(x,y) = 0$, "szép" függvények. A

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

határértéket két speciális irányból számoljuk ki. Legyen $h = r + is$, és a valós ill. az imaginárius tengelyek felől közelítünk.

1. Legyen $h = r + i \cdot 0$, $r \to 0$. Ekkor
$$\lim_{r\to 0} \frac{r-0}{r} = 1.$$
2. Legyen $h = 0 + is$, $s \to 0$. Ekkor
$$\lim_{s\to 0} \frac{0-0}{is} = 0.$$

.

Mivel $1 \neq 0$, nincs határértéke 0-ban.

4.2.3. Tétel. *(Alaptétel a komplex függvény differenciálhatóságáról.) Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : T \to \mathbb{C}$, $z \epsilon$ int T. Tegyük fel, hogy u és v folytonosan differenciálható függvények. Ekkor az alábbi két állítás egymással ekvivalens:*

1. *f differenciálható a $z = x + iy$ pontban*

2. *Az u és v kétváltozós függvények kielégítik az alábbi összefüggéseket az (x, y) pontban*

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Az utolsó két egyenletet *Cauchy-Riemann egyenletek*nek hívjuk. Ha f diffe-renciálható T-n, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *analitikus (vagy reguláris)* a T tartományon.

Bizonyítás. 1. rész. Tegyük fel, hogy f differenciálható z-ben. Ekkor az (4.1) határérték létezik speciális irányokból is. Legyen $z = x + iy$, $h = r + is$ és legyen elsőként $s = 0$ és $r \to 0$ Ekkor:

$$f'(z) = \lim_{r \to 0} \frac{u(x + r, y) + iv(x + r, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{r} =$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{u(x + r, y) - u(x, y)}{r} + i \lim_{r \to 0} \frac{v(x + r, y) - v(x, y)}{r} = u'_x + iv'_x.$$

Most tegyük fel, hogy $r = 0$ és $s \to 0$. Ekkor az előzőhöz hasonlóan

$$f'(z) = \lim_{s \to 0} \frac{u(x, y + s) - u(x, y)}{is} + i \lim_{s \to 0} \frac{v(x, y + s) - v(x, y)}{is} = -iu'_y + v'_y.$$

Mivel a két határértéknek egyenlőnek kell lennie, így

$$u'_x + iv'_x = -iu'_y + v'_y.$$

Két komplex szám egyenlősége ekvivalens valós és képzetes részeinek egyenlőségé-vel, ezért

$$u'_x = v'_y, \qquad v'_x = -u'_y.$$

Bizonyítás. 2. rész. Tegyük fel, hogy a Cauchy-Riemann egyenletek teljesülnek. Számoljuk ki a differenciahányadost:

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{u(x + r, y + s) + iv(x + r, y + s) - u(x, y) - iv(x, y)}{r + is}.$$

Felhasználva u és v deriválhatóságát, ez így folytatható:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u'_x r + u'_y s + iv'_x r + iv'_y s}{r+is} + \frac{\varepsilon_1(|h|)}{r+is} + \frac{\varepsilon_2(|h|)}{r+is} =$$

$$= u'_x + iv'_x + \frac{\varepsilon_1(|h|)}{r+is} + \frac{\varepsilon_2(|h|)}{r+is} \to u'_x + iv'_x$$

Közben felhasználtuk a Cauchy-Riemann egyenleteket. Tehát a függvény differenciálható.

Megjegyzés. A bizonyításból az is kiderült, hogy ha f differenciálható, akkor deriváltja kétféleképpen is számolható:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y.$$

1. *Példa.* Legyen $f(z) = e^z$. Ekkor

$$f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

ezért

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y.$$

A megfelelő parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} u'_x &= e^x \cos y, & u'_y &= -e^x \sin y, \\ v'_x &= e^x \sin y = -u'_y, & v'_y &= e^x \cos y = u'_x. \end{aligned}$$

Tehát a függvény differenciálható, és

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

2. *Példa.* Legyen $f(z) = \overline{z} = x - iy$. Ennek kanonikus alakját felírva a parciális deriváltak

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 0, \quad v'_x = 0, \quad v'_y = -1 \neq u'_x.$$

Tehát a függvény nem differenciálható.

Következmény. Ha $f'(z) = 0$ valamely T összefüggő tartományban, akkor itt f konstans.

Bizonyítás. Mivel $f'(z) = u'_x + iv'_x = 0$, ezért $u'_x = 0$ és $v'_x = 0$. Másrészt $f'(z) = v'_y - iu'_y$, ezért $v'_y = 0$ és $u'_y = 0$. Így a kétváltozós függvényekre megismert tétel alapján $u(x,y) \equiv u_0$, $v(x,y) \equiv v_0$ konstans függvények.

4.2.3. Speciális függvények

Exponenciális és logaritmus függvény

Egy kicsit részletesebben megvizsgáljuk az $f(z) = e^z$ függvényt, mint komplex változós függvényt. Mivel $z \epsilon \mathbf{C}$ esetén

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

ezért erre a komplex számra

$$|e^z| = e^x = e^{\Re(z)}, \qquad \text{arc } e^z = y = \Im(z).$$

A függvény néhány alaptulajdonsága:

1. Mindenütt differenciálható, és $(e^z)' = e^z$
2. Továbbra is igaz marad, hogy $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
3. A fenti tulajdonság miatt
$$e^{z+i2\pi} = e^z(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = e^z.$$
Ebből a tulajdonságból az következik, hogy az e^z függvény $2\pi i$ szerint periódikus.
4. Megvizsgáljuk az értékkészletét. A 0 nem eleme az értékkészletnek, mivel
$$|e^z| = e^{\Re z} > 0$$
minden z-re. Legyen $0 \neq w \epsilon \mathbf{C}$, keressük azt a z-t, melyre $w = e^z$. Legyen w trigonometrikus alakja $w = \rho e^{i\theta}$ Ebből következik, hogy
$$x = \ln \rho, \qquad y = \theta + 2k\pi, \quad k \epsilon \mathbb{Z}.$$
5. Határozzuk meg e^z inverzét. Az előzőek miatt
$$\ln w = \ln |w| + i(\text{arc } (w) + 2k\pi) \quad k \epsilon \mathbb{Z}$$
sokértékű függvény. Ezért ezt másképp jelöljük:
$$\text{Ln}(w) = \ln |w| + i(\text{arc } (w) + 2k\pi), \qquad k \epsilon \mathbb{Z},$$
egy végtelen sok értékű függvény, és ennek k-adik ága:
$$\text{Ln}_k(w) = \ln |w| + i(\text{arc } (w) + 2k\pi).$$

Példa.

$$\ln i = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi).$$

HF Határozza meg $\ln(i+1)$ értékét.

Hatványfüggvény

Értelmezni szeretnénk az

$$f(z) = z^\lambda, \qquad \lambda \epsilon \mathbb{C}$$

függvényt. Felhasználva a logaritmus függvényt azt kapjuk, hogy a

$$z^\lambda = e^{\lambda \ln z}$$

is sokértékű függvény lesz.

HF Határozza meg i^i értékét.

4.2.4. Harmonikus függvény

4.2.4. Definíció. *Legyen $u(x,y)$ kétváltozós függvény, amely valamely $R \subset \mathbb{R}^2$ tartományon van értelmezve. Tegyük fel, hogy itt folytonos és kétszer differenciálható. Azt mondjuk, hogy $u(x,y)$ harmonikus, ha*

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

teljesül az egész tartományon.

A fenti definícióhoz kapcsolódóan definiáljuk a *Laplace-operátor*t A Laplace operátor egy kétváltozós függvényhez egy másik kétváltozós függvényt rendel. Az $u : R \to \mathbb{R}$ függvényhez hozzárendeljük a következő függvényt:

$$\triangle u := u''_{xx} + u''_{yy}.$$

4.2.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy $f : T \to \mathbb{C}$ komplex függvény differenciálható. Ekkor $u(x,y)$ és $v(x,y)$ harmonikus függvények.*

Bizonyítás. Feltesszük, hogy u és v kétszer folytonosan differenciálhatóak. (Látni fogjuk, hogy ez igazából nem plusz feltétel.) A differenciálhatóság miatt $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$. Az első azonosságot x szerint, a másodikat y szerint deriválva, majd összegezve éppen azt kapjuk, hogy

$$\triangle u = v''_{xy} - v''_{yx} = 0.$$

4.2.2. Állítás. *Ha u harmonikus függvény a T egyszeresen összefüggő tartományon, akkor létezik olyan* $v : T \to \mathbb{R}$ *harmonikus függvény, hogy az* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *komplex függvény differenciálható.*

Megjegyzés. Azt mondjuk, hogy v az u függvény *harmonikus társa.*

4.3. Komplex vonalintegrálok

4.3.1. Jordan görbe

4.3.1. Definíció. $L \subset \mathbb{C}$ *Jordan görbe a komplex számsíkon, ha létezik* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *valós intervallumon értelmezett komplex változós függvény, melyre*

$$L = \{\gamma(t) = x(t) + iy(t) \ : \ t\epsilon[\alpha, \beta]\}.$$

A görbe kezdőpontja $\gamma(\alpha) = A$, *és végpontja* $\gamma(\beta) = B$

4.3.2. Definíció. *A Jordan görbe zárt, ha* $A = B$ *és sima, ha az* $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *függvények differenciálhatóak.*

4.3.1. Állítás. *(Ívhossz kiszámítása.) Legyen L a fent adott Jordan görbe. Feltesszük, hogy sima. Ennek ívhossza:*

$$s(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Bizonyítás. Tekintsük a görbe egy felosztását. Az alappontok:

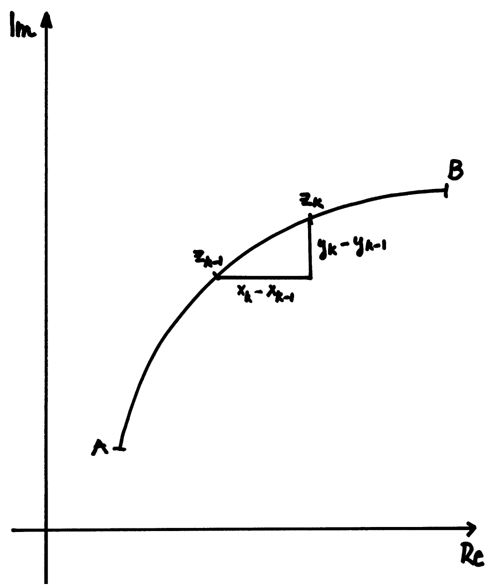
$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta,$$

és a görbe megfelelő pontjai

$$z_k = x_k + iy_k = \gamma(t_k), \qquad k = 0, \dots, n. \tag{4.2}$$

A k-adik ívdarab hosszának közelítése (Pithagorasz tétel alapján, ld. az ábrát):

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$



4.2. ábra. A k-dik ívdarab hosszának közelítése

Ennek határértékét tekintjük, amikor $n \to \infty$ és

$$\delta := \max(|z_k - z_{k-1}|,\ k = 1, \dots n) \ \to \ 0.$$

Azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} (t_k - t_{k-1}) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

hiszen

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \to x'(t) \qquad \frac{y_k - y_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \to y'(t).$$

4.3.2. Vonalintegrál definíciója

Tekintsünk egy $L \subset \mathbb{C}$ Jordan-görbét és egy ezen értelmezett f komplex függvényt. Értelmezni szeretnénk az

$$\int_L f(z)dz$$

vonal menti integrált. Az L görbe (4.2) alappontokkal megadott felosztását tekintjük. Legyen a k-dik ívdarab egy tetszőleges pontja ξ_k. A felosztáshoz tartozó közelítő összeg:

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(\xi_k).$$

4.3.3. Definíció. *A vonalintegrált az alábbi határérték definiálja, amennyiben létezik:*

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \delta_n\to 0}} \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) f(\xi_k) = \int_L f(z)dz,$$

ahol $\delta_n = \max(s(\widehat{z_{k-1}, z_k}),\ k = 1, \ldots n)$.

Ha L zárt görbe, akkor a vonalintegrálra a

$$\oint_L f(z)dz$$

jelölést használjuk.

Példa. Legyen $f(z) \equiv c$, $c \epsilon \mathbb{C}$. Számoljuk ki egy tetszőleges zár görbe mentén a vonalintegrált:

$$\oint_L cdz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1})c = \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = 0,$$

hiszen

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\oint_L c\ dz = 0.$$

Megjegyezzük, hogy zárt görbék esetén a paraméterezésnél különbséget jelent, hogy milyen irányban járjuk körbe a pontokat. Fordított irányítással a $-L$ görbét kapjuk.

4.3.2. Állítás. *A vonalintegrál alaptulajdonságai:*

1. *Lineáris művelet, azaz*

$$\int_L (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz = \alpha \int_L f(z)dz + \beta \int_L g(z)dz,$$

$\alpha, \beta \epsilon \mathbf{C}$ *és* $f(z)$, $g(z)$ *integrálhatóak.*

2. *Fordított irányban végezve az integrálást a vonalintegrál előjele megváltozik:*

$$\int_{-L} f(z)dz = -\int_L f(z)dz.$$

3. *Ha az* L *görbe két részből áll,* $L = L_1 + L_2$, *akkor*

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz.$$

4. *Ha* f *folytonos függvény , akkor létezik az*

$$\int_L f(z)dz$$

vonalintegrál.

5. *Ha* f *korlátos függvény, vagyis:*

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \epsilon L,$$

akkor

$$|\int_L f(z)dz| \leq M \cdot s,$$

ahol $s = s(L)$, *a görbe ívhossza.*

4.3.3. A vonalintegrálok kiszámítása

Ebben a fejezetben két olyan módszert adunk vonalintegrálok kiszámítására, melyeket a közönséges Riemann integrál kiszámításánál alkalmaztunk. A tételek bizonyítása teljesen ugyanúgy végezhető el, mint a Riemann integrálok esetén.

4.3.1. Tétel. *Legyen az L görbe paraméteres megadása:*

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \qquad t\epsilon[\alpha, \beta].$$

Tegyük fel, hogy x, y illetve r, θ folytonosan differenciálhatóak. Ekkor:

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt =$$

$$\int_\alpha^\beta f(x(t) + iy(t))(x'(t) + iy'(t))dt = \int_\alpha^\beta f(r(t)e^{i\theta(t)})(r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)e^{i\theta(t)}\theta'(t))dt.$$

4.3.2. Tétel. *(Newton-Leibnitz formula komplex vonalintegrálra.) Legyen adott az $f : T \to \mathbb{C}$ függvény és az $L \subset T$ görbe. Tegyük fel, hogy létezik olyan $F : T \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $F'(z) = f(z)$ minden z-re. Ekkor*

$$\int_L f(z)dz = F(B) - F(A),$$

ahol L az A és B pontokat összekötő Jordan görbe.

1. *Példa.* Legyen $f(z) = e^{iz}$. Tekintsük azt az L görbét (egyenes szakasz igazából), mely a $2i$ pontot köti össze a 2 ponttal.

Ekkor a 3.2 Tétel alapján

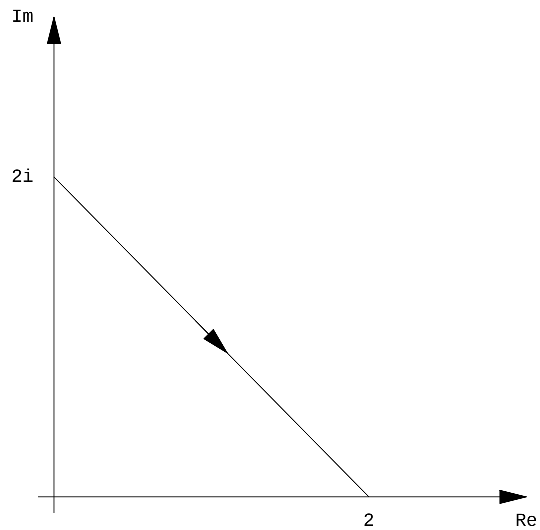
$$\int_L e^{iz}dz = \left[\frac{e^{iz}}{i}\right]_2^{2i} = i(e^{2i} - e^{-2}).$$

2. *Példa.* L legyen ugyanaz, mint az előző példában. Tekintsük az

$$f(z) = e^{i\overline{z}}$$

függvényt. Az L görbe paraméteres felírása

$$z(t) = t + i(2 - t), \qquad t\epsilon[0, 2].$$



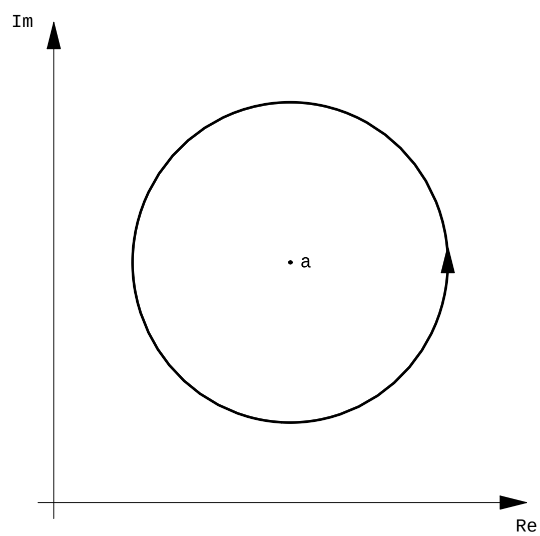
4.3. ábra. A $2i$ és 2 pontokat összekötő szakasz.

Ennek deriváltja $z'(t) = 1 - i$. Így:

$$\int_L e^{i\bar{z}} dz = \int_0^2 e^{i(t-i(2-t))}(1-i)dt = -e^2(e^i + 1).$$

3. *Példa.* Legyen L: az $a\epsilon\mathbb{C}$ körüli r sugarú kör, és

$$f(z) = (z-a)^n, \qquad n\epsilon\mathbb{Z}.$$



4.4. ábra. Az a körüli körvonal.

A körvonal paraméteres megadása

$$z(t) = a + r\ e^{it}, \qquad t\epsilon[0, 2\pi].$$

Ekkor

$$\oint_L (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \, rie^{it} dt = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt.$$

Ha $n = -1$, akkor

$$\oint_L f(z)dz = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

Ha $n \neq -1$, akkor

$$\oint_L f(z)dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt =$$

$$= r^{n+1} i \left(\int_0^{2\pi} \cos((n+1)t)dt + i \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t)dt \right) = 0.$$

Összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$\oint_L (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{ha} \quad n = -1 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad n \neq -1 \end{cases}$$

4.3.4. Alaptételek a vonalintegrál kiszámítására.

4.3.3. Tétel. *(Cauchy-féle alaptétel.) Tegyük fel, hogy $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus, $G \subset T$ sima, zárt görbe. Ekkor*

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

A tételt nem bizonyítjuk.

4.3.4. Tétel. *(Cauchy féle alaptétel általánosítása.) Legyen $T \subset \mathbb{C}$ összefüggő tartomány, $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus függvény. $G_1, \ldots, G_n$ ugyanolyan irányításúak, lyukakat körbevevő görbék, $G \subset T$ határgörbe. Ekkor*

$$\oint_G f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{G_k} f(z)dz.$$

Következmény. Legyen $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus függvény T-ben, kivéve a $z_0 \epsilon T$ belső pontot. Tegyük fel, hogy létezik z_0-nak olyan $\delta > 0$ sugarú környezete, ahol f korlátos:

$$|f(z)| \leq M, \qquad \text{ha} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Legyen $G \subset T$ zárt görbe z_0 körül. Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás. Legyen G_ε egy ε sugarú kör z_0 körül, ahol $\varepsilon < \delta$. Vágjuk ki T-ből ezt a kis kört, azaz tekintsük a $T_0 = T \setminus S(z_0, \varepsilon)$ tartományt. Ez összefüggő, de nem egyszeresen. Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = \oint_{G_\varepsilon} f(z)dz.$$

Ez utóbbit becsülve azt kapjuk, hogy

$$|\oint_{G_\varepsilon} f(z)dz| \leq M\ 2\pi\varepsilon,$$

hiszen f a kör mentén korlátos, és a kör ívhossza (kerülete) $2\pi\varepsilon$. Mivel ε tetszőlegesen kicsi, ezért

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

4.3.5. Tétel. *(Cauchy-féle integrál formula.) Tegyük fel, hogy $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus függvény, $\xi \epsilon T$. Tegyük fel, hogy ξ-nek létezik olyan U környezete, amely része T-nek és G legyen egy zárt görbe U-ban. Ekkor*

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z - \xi} dz. \tag{4.3}$$

Megjegyzés. A fenti integrálban az integrálandó függvénynek ξ-ben szingularitása van.

Bizonyítás.

$$\oint_G \frac{f(z)}{z-\xi} dz = \oint_G \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} dz + \oint_G \frac{f(\xi)}{z - \xi} dz.$$

Mivel

$$\lim_{z \to \xi} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} = f'(\xi)$$

véges szám, ezért

$$\frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi}$$

ξ környezetében korlátos, egyébként pedig differenciálható, és így az előző következmény értelmében

$$\oint_G \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} dz = 0.$$

Így azt kaptuk, hogy

$$\oint_G \frac{f(z)}{z - \xi} dz = f(\xi) \oint_G \frac{1}{z - \xi} dz = 2\pi i,$$

ahol felhasználtuk a korábbi 3. példa eredményét.

Speciálisan: G legyen a ξ körüli egységkör. Paraméteresen felírva:

$$z(t) = \xi + e^{it}, \qquad t\epsilon[0, 2\pi].$$

Ekkor

$$z'(t) = ie^{it} dt,$$

ezért helyettesítés után az integrált így számolhatjuk:

$$f(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \oint_G \frac{f(z)}{z - \xi} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi + e^{it})}{e^{it}} ie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi + e^{it}) dt,$$

azaz a a középpontbeli függvényérték a körvonalon vett helyettesítési értékek átlaga.

4.3.6. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbf{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : T \to \mathbf{C}$ analitikus függvény. Ekkor f akárhányszor differenciálható T-ben és minden $\xi \epsilon \mathrm{int(T)}$ pont esetén:*

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - \xi)^{n+1}} dz.$$

A tételt nem bizonyítjuk. Ha a deriválhatóságot már tudjuk, akkor ξ szerint formálisan deriválva a (4.3) egyenletet ezt kapjuk:

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} dz,$$

$$f"(\xi) = \frac{2}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - \xi)^3} dz,$$

amiből teljes indukcióval következik az n-dik deriváltra vonatkozó összefüggés.

4.3.5. Taylor-sorfejtés és Laurent-sorfejtés

Az előző tétel alapján tudjuk, hogy egy analitikus (differenciálható) függvény akárhányszor is deriválható, és fel tudjuk írni a deriváltat zárt görbe mentén vett vonalintegrál segítségével. Ezért kimondhatjuk az alábbi tételt:

4.3.7. Tétel. *Legyen $f : T \to \mathbb{C}$ differenciálható z_0 egy környezetében. Ekkor ott Taylor sorba fejthető, és*

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

ahol G olyan zárt görbe, amely része T-nek és körbeveszi z_0-t.

Tegyük fel, hogy $f(z_0) = 0$. Ekkor

$$f(z) = (z-z_0)\widetilde{f(z)}$$

alakban írható.

4.3.4. Definíció. *Ha*

$$f(z) = (z-z_0)^n \widetilde{f(z)}, \qquad \widetilde{f(z_0)} \neq 0$$

akkor z_0 n-szeres (vagy n-ed rendű) zérusa f-nek.

4.3.5. Definíció. *Legyen*

$$q(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n} \frac{1}{\widetilde{f(z)}} = \frac{1}{(z-z_0)^n} h(z),$$

ahol $h(z)$ a z_0-ban analitikus és nem tűnik el. Ekkor h z_0 egy környezetében analitikus, ezért ott Taylor-sorba fejthető. Ebből következik, hogy

$$q(z) = c_{-n}(z-z_0)^{-n} + c_{-n+1}(z-z_0)^{-n+1} + \ldots = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k.$$

Ekkor z_0 n-szeres pólusa q-nak.

Tegyük fel, hogy f olyan függvény, amelynek z_0-ban n-szeres pólusa van, egyébként analitikus z_0 egy K környezetében. Legyen $G \subset K$ egy zárt, görbe. Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = \oint_G \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k dz =$$

$$\sum_{k=-n}^{\infty} c_k \oint_G (z-z_0)^k dz = 2\pi i \; c_{-1}.$$

4.3.6. Definíció. *A függvény residuuma a z_0 pontban:*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z)dz = c_{-1}.$$

4.3.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy f analitikus egy körgyűrűben azaz egy*

$$T = \{z \; : \; r < |z-z_0| < R\}$$

halmazon. Ekkor f felírható a következő hatványsorként:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k,$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz,$$

és G egy olyan zárt görbe, amely a fenti T tartomány része. Ez az ún. Laurent-sor.

4.3.7. Definíció. *$z_0 \epsilon \mathbf{C}$ szingularitása f-nek, ha f itt nem analitikus. Ezek így osztályozhatók:*

- *Megszüntethető a szingularitás, ha létezik a*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$$

határérték.

- *Tegyük fel, hogy van olyan* $n \epsilon \mathbb{N}$, *hogy*

$$(z - z_0)^n f(z_0) \to c_{-n} \neq 0$$

határérték létezik. Ekkor a Laurent-sorban véges sok negatív indexű tag van, ez a szingularitás n*-szeres pólus.*

- *Ha nem létezik az előző pontban említett* n*, akkor a Laurent-sorban ekkor végtelen sok negatív indexű tag áll. Ez az ún. lényeges szingularitás.*

Megjegyzés. Megvizsgáljuk az összefüggést a Laurent- és a Taylor-sorfejtés között. Tegyük fel, hogy f analitikus z_0-ban és ennek egy környezetében. Ekkor $k = -n < 0$ esetén a Laurent sorfejtés megfelelő együtthatója

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \oint_G f(z)(z - z_0)^{n-1} dz = 0,$$

hiszen az integrálandó függvény analitikus. Ezért a Laurent-sorfejtés valójában a Taylor-sorfejtést adja.

4.3.6. Residuum tétel és alkalmazásai

4.3.9. Tétel. *(Residuum tétel) Legyen* $T \subset \mathbb{C}$ *egyszeresen összefüggő tartomány,* f *analitikus* T*-n kivéve véges sok szingularitást, ezek* $a_1, \ldots, a_n$*. Legyen* $G \subset T$ *egy zárt görbe, amely körülveszi mindegyiket. Ekkor*

$$\oint_G f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

A tétel azonnal következik az előző fejezet állításaiból.

A tételt vonalintegrálok kiszámításánál alkalmazzuk.

$$\oint_G f(z) dz = ?$$

Ehhez megvizsgáljuk, hogy G-ben milyen szingularitásai vannak f-nek, legyenek ezek $a_1, \ldots a_n$. Ezután meghatározzuk a residuumokat ezekben a pontokban, mint a $z = a_k$-hoz tartozó Laurent-sorfejtés -1. tagjának együtthatója.

Példa. Legyen

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \qquad G = \{z \ : \ |z-2i| = 2\},$$

azaz G a $2i$ körüli 2 sugarú kör. Határozzuk meg az

$$I := \oint_G f(z)dz$$

vonalintegrál értékét. A függvény így írható:

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = (z+i)^{-1}(z-i)^{-1} = (z-i)^{-1}g(z),$$

ahol $g(z)$ analitikus i-ben. Az integrált kétféleképpen fogjuk kiszámítani. Elsőként a residuum tétel alapján, felhasználva a Laurent sorfejtést.

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i c_{-1} \tag{4.4}$$

A függvény Laurent-sora az i körül:

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z-i)^k,$$

itt kell a -1. együtthatót meghatározni. A fenti felírásnak megfelelően

$$f(z) = (z-i)^{-1}g(z), \qquad g(z) = \frac{1}{z+i},$$

így ha ismert $g(z)$ Taylor-sora az i körül:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-i)^k,$$

akkor általában $c_k = d_{k+1}$. $g(z)$ Taylor sora:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{-z+i}{2i}} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{-z+i}{2i})^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2i}(\frac{-1}{2i})^k(z-i)^k.$$

Mivel a $k=0$-hoz tartozó együttható: $1/2i$, ezért

$$I = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Második megoldási módszer a Cauchy-féle integrálformula alkalmazásával történik. Eszerint

$$\oint_G \frac{1}{z^2+1}dz = \oint_G \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}dz,$$

ahol G a $z_0 = i$ pólust veszi körül. A Cauchy-féle integrálformulát használjuk az

$$F(z) = \frac{1}{z+i}$$

függvényre. Ebből

$$F(i) = \frac{1}{2i} = \frac{1}{2\pi i}\oint_G \frac{F(z)}{z-i}dz,$$

ezért

$$\frac{1}{2\pi i}I = \frac{1}{2i},$$

így most is azt kaptuk, hogy $I = \pi$.

Példa. Legyen

$$f(z) = \frac{\sin(z-2i)}{(z-2i)^2 z}.$$

Milyen típusú szingularitásai vannak ennek a függvénynek? A $z_1 = 2i$ pólust tekintve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)^1 f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{\sin(z-2i)}{z-2i}\frac{1}{z} = \frac{1}{2i},$$

vagyis ez elsőrendű pólus. A $z_2 = 0$ pontbeli szingularitást tekintve

$$f(z) = (z-0)^{-1}\frac{\sin(z-2i)}{(z-2i)^2},$$

tehát ez is elsőrendű pólus.

5. fejezet

Differenciálegyenletek

5.1. Differenciálegyenletek általános leírása

5.1.1. Differenciálegyenletek osztályozása

Olyan egyenleteket tekintünk, amelyekben ismert konstans(ok), függvény(ek), és valamely ismeretlen függvény (ek) illetve deriváltja(ik) szerepel(nek).

Lineáris, állandó együtthatós, egyváltozós differenciálegyenlettel már foglakoztunk az előző félévben. Most ennél általánosabb eseteket vizsgálunk majd meg.

A differenciálegyenleteket (DE) a következőképpen osztályozhatjuk:

- *Közönséges differenciálegyenlet*, melyben egy egyváltozós függvény és deriváltja(i) szerepelnek. Ilyen például a rezgőmozgást leíró differenciálegyenlet:

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

- *Parciális differenciálegyenlet*, melyben egy többváltozós függvényt keresünk, különböző parciális deriváltjai szerepelnek az egyenletben. Például egy másodrendű parciális DE:

$$\triangle u = 0,$$

  ahol $u(x, y)$ kétváltozós valós függvény, és

$$\triangle u(x, y) = u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y).$$

- A DE *rendje* n, ha az egyenletben az ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja n.

- A differenciálegyenletek lehetnek *implicit* és *explicit* alakúak. A DE explicit, ha a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve a többivel. Például olyan $y(x)$ függvényt keresünk, melyre

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}).$$

  A DE implicit, ha nem explicit. Ekkor a DE

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$$

  alakú.

- Egy DE *lineáris*, ha az egyeneletben y, y', ...,$y^{(n)}$ lineáris kifejezése szerepel:

$$a_1 y^{(n)}(x) + a_2 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n+1} y(x) = f(x).$$

A lineáris DE *homogén*, ha $f(x) = 0$, egyébként pedig inhomogén. Ha az a_k együtthatók valós számok, akkor állandó együtthatós DE-ről beszélünk.

5.1.2. Elsőrendű differenciálegyenletek

Egy elsőrendű DE általános alakja:

$$y' = f(x, y),$$

ahol f egy adott kétváltozós függvény, valamely $D \subset \mathbb{R}^2$ értelmezési tarománnyal. Ez azt jelenti, hogy egy $(a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallumot keresünk, ezen egy $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $y'(x) = f(x, y(x))$ teljesül $\forall x \epsilon (a, b)$ esetén.

Geometriai reprezentációt a következőképpen képzelhetünk el: Az f kétváltozós függvény értelmezési tartományának minden (x, y) pontjában adjunk meg egy $f(x, y)$ iránytangensű pici szakaszt. Ez a DE-hez tartozó *iránymező.* A DE megoldása olyan görbe megadását jelenti a síkon, melynek minden pontjában az érintő megegyezik az adott pontbeli kijelölt iránnyal. Ez az *integrálgörbe.* Ha kijelölünk egy (x_0, y_0) kezdőpontot, akkor eleve olyan görbét keresünk, mely átmegy ezen a ponton. Ekkor a feladat:

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{5.1}$$

ez egy *kezdeti érték feladat*, vagy *Cauchy-probléma.*

5.1.1. Tétel. *(Egzisztencia és unicitás). Tegyük fel, hogy D egy (x_0, y_0) körüli téglalap, azaz*

$$D = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$$

és $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az (5.1) feladatnak létezik megoldása valamely $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallumon, és ez a megoldás egyértelmű.

Az első félév során láttuk az elsőrendű differenciálegyenlet speciális eseteit. Nagyon röviden átismételjük ezeket:

1. *Szeparálható DE*. Ekkor a jobboldalon szereplő függvény speciális alakú:

   $$y' = h(x)g(y).$$

   Ennek megoldása:
   $$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx.$$

2. *Lineáris DE*:
   $$y' = a(x)y + f(x).$$

   A DE homogén, ha $f \equiv 0$ és inhomogén, ha $f \not\equiv 0$.

Megoldás helyettesítéssel. Két speciális esetet tekintünk. Elsőként tegyük fel, hogy a DE
$$y' = f(\frac{y}{x})$$
alakú. Ekkor
$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$
helyettesítéssel a DE így transzformálódik:
$$u' = \frac{f(u) - u}{x},$$
ami egy szeparálható DE.

Másik speciális eset, amikor a jobboldal $f(ax + by)$ alakú. Ekkor
$$u(x) = ax + by(x)$$
helyettesítéssel inhomogén lineáris DE-t kapunk:
$$u' = a + bf(u).$$

1. *Példa.* Tekintsük az alábbi DE-t:
$$y' = \frac{2y^2 + x^2}{xy} \qquad x \neq 0,\ y \neq 0.$$
A jobboldal y/x függvénye, hiszen
$$\frac{2y^2 + x^2}{xy} = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Vezessük be az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

új változót. Ekkor a differenciálegyenlet:

$$u' = \frac{1}{x}\frac{u^2+1}{u}.$$

Ez szeparábilis, melynek megoldása:

$$\int \frac{u}{u^2+1}du = \int \frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln x + c,$$

azaz

$$u^2 + 1 = x^2 e^{2c} = kx^2, \qquad k > 0.$$

Az $u^2 = \frac{y^2}{x^2}$-t visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = kx^2,$$

tehát a megoldás

$$y^2 = kx^4 - x^2, \qquad \text{ahol } k > 0.$$

2. *Példa.* Tekintsük az alábbi kezdeti érték problémát:

$$y' = e^{2y+x} - \frac{1}{2}, \qquad y(0) = 0.$$

Lineáris helyettesítést alkalmazva legyen $u = 2y + x$. Ekkor

$$u' = 2y' + 1 = 2(e^u - \frac{1}{2}) + 1 = 2e^u.$$

Az $u' = 2e^u$ egyenlet megoldása:

$$\int e^{-u}du = \int 2dx,$$

$$-e^{-u} = 2x + c, \qquad e^{-2y-x} = -2x - c.$$

A kezdeti értéket behelyettesítve $e^0 = 0 - c$, vagyis $c = -1$, így a megoldás

$$y = \frac{1}{2}(-x - \ln(1-2x)).$$

5.2. Magasabbrendű differenciálegyenletek

5.2.1. Lineárisan független függvények

A magasabbrendű differenciálegyenletek tárgyalása előtt bevezetjük a függetlenség fogalmát.

5.2.1. Definíció. *Adott n darab függvény, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, közös $D \subset \mathbb{R}$ értelmezési tartománnyal. Ezek lineárisan függetlenek, ha a függvények valamely lineáris kombinációja,*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

csak úgy lehet azonosan 0 a D halmazon, ha

$$c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

1.*Példa.* Legyenek a függvények:

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad \ldots, \quad y_n(x) = x^{n-1},$$

közös értelmezési tartományuk $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Ezek nyilván lineárisan függetlenek, hiszen ha

$$c_1 + c_2 x + \ldots c_n x^{n-1} = 0,$$

akkor valóban a polinom minden együtthatója 0.

2.*Példa.* Legyen $D = [0, \pi]$ a függvények közös értelmezési tartománya, és

$$y_1(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(2x), \quad \ldots, y_n(x) = \sin(nx).$$

Tekintsük ezeknek egy lineáris kombinációját:

$$y(x) = c_1 \sin(x) + \cdots + c_n \sin(nx).$$

Tegyük fel, hogy $y(x) = 0$. Szorozzuk meg a fenti egyenletet $\sin(x)$-szel, és vegyük mindkét oldal integrálját a $[0, \pi]$ intervallumon.

$$0 = \int_0^\pi y(x) \sin(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi c_k \sin(kx) \sin(x) dx = c_1 \int_0^\pi (\sin(x))^2 dx.$$

Itt felhasználtuk a trigonometrikus rendszer ortogonalitását. Ebből következik, hogy $c_1 = 0$ és hasonlóan igazolható, hogy a többi együttható is 0.

3. *Példa.* Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ különböző valós számok. Tekintsük az

$$y_1(x) = e^{a_1 x}, \quad y_2(x) = e^{a_2 x}, \quad \ldots, y_n(x) = e^{a_n x}$$

függvényeket valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon. Azt állítjuk, hogy a rendszer lineárisan független. **HF.** Igazoljuk ezt. Ötlet: n-re vonatkozó teljes indukció.

5.2.2. Definíció. *Legyenek az $y_1, \ldots, y_n$ valós függvények $(n-1)$-szer differenciálhatóak. Definiáljuk a Wronski determinánst a következőképpen:*

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

A Wronski determináns $W : D \to \mathbb{R}$ is egy valós függvény lesz.

5.2.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy $y_1, \ldots, y_n$ lineárisan összefüggőek. Ekkor $W = 0$.*

Bizonyítás. Mivel a függvények lineárisan összefüggők, ezért

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0,$$

ahol valamelyik $c_k \neq 0$. Legyen ez c_1. Ekkor y_1 kifejezhető a többi függvény segítségével:

$$y_1 = -\frac{c_2}{c_1} y_2 - \ldots - \frac{c_n}{c_1} y_n.$$

Ugyanígy, deriváltjai is kifejezhetők, ugyanilyen együtthatókkal:

$$y_1' = -\frac{c_2}{c_1} y_2' - \ldots - \frac{c_n}{c_1} y_n'.$$

A többi derivált hasonlóképp. Tehát a mátrix első oszlopa előáll a többi lineáris kombinációjaként, tehát a mátrix szinguláris, determinánsa 0.

Következmény. Ha $W(x) \neq 0$ valamely x-ben, akkor $y_1, \ldots, y_n$ lineárisan független rendszert alkotnak.

5.2.2. Állítás. *Ha $y_1, \dots, y_n$ n-szer differenciálhatóak az egész D-n, akkor W pontosan akkor 0, ha $y_1, \dots, y_n$ lineárisan összefüggőek.*

Példa. Tekintsük az alábbi elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletet:

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0.$$

Legyen ennek két megoldása y_1 és y_2. Irjuk fel ezek Wronski determinánsát:

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ & \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ & \\ -g(x)y_1 & -g(x)y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ezért a megoldások lineárisan összefüggőek, tehát $y_1 = cy_2$ valamilyen c valós számmal.

Következmény. Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet megoldása konstans szorzótól eltekintve egyértelmű. Ha adott egy megoldása, akkor az összes többi kifejezhető ennek konstans-szorosaként.

5.2.2. n-edrendű lineáris differenciálegyenlet

Legyen L egy operátor amely egy n-szer folytonosan differenciálható függvényhez egy folytonos függvényt rendel,

$$\begin{aligned} L \ : \ \mathcal{C}^n(D) &\to \mathcal{C}(D) \\ y &\mapsto L(y) \end{aligned}$$

a következőképpen:

$$L(y)(x) = y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x), \tag{5.2}$$

ahol $a_1, \dots, a_n$ adott függvények. Az L operátor nyilván lineáris, azaz ha $y_1, y_2 \epsilon \mathcal{C}^n(D)$ n-szer folytonosan differenciálható függvények, akkor

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2).$$

A *homogén differenciálegyenlet* (HDE) esetént az

$$L(y) = 0$$

egyenletnek keressük a megoldását. *Inhomogén* (IDE) esetben az

$$L(y) = f(x) \neq 0$$

egyenlet megoldását.

Az L operátor linearitásából azonnal következik az alábbi állítás.

5.2.3. Állítás. *Ha y_1, y_2 megoldásai a*

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = 0$$

HDE-nek, akkor

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2$$

is megoldása. Ha y_1, y_2 megoldásai az

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x)$$

IHE-nek, akkor $y = y_1 - y_2$ a homogén egyenlet megoldása. Ha y_1 a HDE, y_2 pedig az IHE megoldásai, akkor $y = y_1 + y_2$ szintén megoldása az IHE-nek.

5.2.1. Tétel. *Az $L(y) = 0$ egyenletnek mindig létezik n darab lineárisan független megoldása, legyenek ezek $y_1, \ldots, y_n$. Továbbá tetszőleges y megoldás felírható ezek lineáris kombinációjaként,*

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n.$$

Bizonyítás. (a tétel második részének bizonyítása) Írjuk fel az y, y_1, $\ldots$, y_n függvények Wronski determinánsát:

$$W(y, y_1, \ldots, y_n) = \det \begin{pmatrix} y & y_1 & \ldots & y_n \\ y' & y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$L(y_1) = L(y_2) = \ldots = L(y) = 0,$$

ezért a mátrix utolsó sora előáll a többi lineáris kombinációjaként, sorai lineárisan összefüggőek, tehát a determináns 0. Az utolsó n oszlop azonban lineárisan független, így az első oszlop felírható a többi lineáris kombinációjaként.

A tétel első részét speciális esetben fogjuk belátni.

5.2.3. Lineáris, állandó együtthatós, n-edrendű HDE-k

Tekintsük az

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

egyenletet, ahol $a_1, \ldots, a_n \epsilon \mathbb{R}$ adott valós számok. Speciális megoldásokat keresünk, melyek

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

alakúak. Ekkor

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Ezeket visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$L(y) = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

A jobboldalon álló függvény csak úgy lehet 0, ha

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Definiáljuk a DE-hez tartozó *karakterisztikus polinom*ot a következőképpen:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Ez egy valós együtthatós polinom, melynek a komplex számsíkon n darab gyöke van, multiplicitásokkal együtt.

Első eset. Tegyük fel, hogy $P(\lambda)$ gyökei valósak és mind egyszeresek. Legyenek ezek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ekkor fel tudjuk írni a homogén egyenlet n különböző megoldását,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= e^{\lambda_n x}, \end{aligned}$$

és ezek lineárisan független rendszert alkotnak. Ekkor az általános megoldás:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}, \qquad c_k \epsilon \mathbb{R}, k = 1, \ \ldots n.$$

Speciális esetként tekintsünk egy másodrendű DE-t, $n = 2$. Ekkor

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y,$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2.$$

Ha ennek a polinomnak két különböző valós gyöke van, akkor a fenti módon meghatározhatjuk a két alapmegoldást. Tegyük fel, hogy a két valós gyök egybeesik, λ_1 kétszeres gyök. Ekkor

$$P(\lambda_1) = 0, \qquad P'(\lambda_1) = 0.$$

Ekkor a fenti gondolatmenetnek megfelelően

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

megoldás.

5.2.4. Állítás. *Ebben a speciális esetben az*

$$y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$$

is megoldása a DE-nek.

Bizonyítás.

$$y_2'(x) = \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x},$$

$$y_2''(x) = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x},$$

ezért a DE baloldala

$$L(y) = x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 x e^{\lambda_1 x} + a_1\lambda_1 x e^{\lambda_1 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 x e^{\lambda_1 x} =$$

$$= x e^{\lambda_1 x} P(\lambda_1) + e^{\lambda_1 x} P'(\lambda_1) = 0.$$

Megjegyzés. $y_1(x)$ és $y_2(x)$ lineárisan függetlenek.

Megjegyzés. A bizonyításon túl megmutatjuk, hogyan lehet 'rájönni' erre a második megoldásra. Az $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ megoldást ismerjük, ezért természetes választás lehet, hogy a másik alapmegoldást

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) = v(x) e^{\lambda_1 x}$$

alakban keressük. Erre a függvényre

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= \lambda_1 v e^{\lambda_1 x} + v' e^{\lambda_1 x} \\ y_2''(x) &= \lambda_1^2 v e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 v' e^{\lambda_1 x} + v'' e^{\lambda_1 x} \end{aligned}$$

adódik. Ebből behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$L(y_2) = e^{\lambda_1 x} v''.$$

Így az $L(y_2) = 0$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $v'' = 0$, aminek egyik lehetséges megoldása a $v(x) = x$ lesz.

Általában: n-edrendű rendszer esetén, ha λ_0 a $P(\lambda)$ polinom k-szoros valós gyöke, akkor k darab lineárisan független megoldást tudunk adni a következőképpen:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_0 x} \\ y_2(x) &= x e^{\lambda_0 x} \\ &\vdots \\ y_k(x) &= x^{k-1} e^{\lambda_0 x}. \end{aligned}$$

Tekintsük azt az esetet, amikor a $P(\lambda)$ polinomnak *komplex gyökei* vannak. Ekkor ha $\lambda = \alpha + i\beta$ egy gyök, akkor konjugáltja, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ is az. Két alapmegoldást kapunk tehát:

$$u_1(x) = e^{\lambda x}, \qquad u_2(x) = e^{\overline{\lambda} x}.$$

Mivel λ komplex szám, ezért ezek komplex függvények lesznek:

$$u_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right),$$

$$u_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right).$$

Tudjuk, hogy ezek tetszőleges lineáris kombinációja ismét megoldás lesz. Definiáljuk a következő alapmegoldásokat:

$$y_1(x) = \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x),$$

és

$$y_2(x) = \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Ezek is lineárisan függetlenek, nyilvánvalóan.

Utolsó lehetőségként tegyük fel, hogy a karaktarisztikus polinom gyökei közt *többszörös komplex gyökpárok* is vannak. $\lambda = \alpha + i\beta$ és $\overline{\lambda}$ legyenek k-szoros gyökök. Ekkor a megfelelő $2k$ darab alapmegoldás:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x}\sin(\beta x), & y_2(x) &= e^{\alpha x}\cos(\beta x), \\ &\vdots \\ y_{2k-1}(x) &= x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x) & y_{2k}(x) &= x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x). \end{aligned}$$

Mivel a $P(\lambda)$ polinomnak a komplex számtest felett n gyöke van - multiplicitásokkal számolva -, a fenti konstrukciók alapján mindegyik gyökhöz tartozik alapmegoldás, így az n darab alapmegoldás felírható.

1. *Példa.* Tekintsünk egy harmadrendű DE-t:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda,$$

ennek gyökei

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -1.$$

Így az alapmegoldások

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = e^{3x}, \qquad y_3(x) = e^{-x},$$

és a DE általános megoldása

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}, \qquad c_k \epsilon \mathbb{R}.$$

2.*Példa.* Legyen

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

A karakterisztikus polinom

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda,$$

ennek gyökei

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Így az alapmegoldások:

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = e^{-x}, \qquad y_3(x) = xe^{-x}.$$

3. *Példa.* Legyen

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + y' - 2y = 0,$$

ekkor

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2.$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = i, \qquad \lambda_4 = \lambda_5 = -i,$$

ezért az alapmegoldások:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{2x} \\ y_2(x) &= \sin(x) \\ y_3(x) &= \cos(x) \\ y_4(x) &= x\sin(x) \\ y_5(x) &= x\cos(x). \end{aligned}$$

4. *Példa.* (Harmonikus rezgőmozgás egyenlete.) Legyen

$$y'' + k^2 y = 0, \qquad k \epsilon \mathbb{R}.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_1 = ik, \qquad \lambda_2 = -ik,$$

így az alapmegoldások

$$y_1(x) = \cos(kx) \qquad y_2(x) = \sin(kx),$$

az általános megoldás

$$y(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) = r \cos(kx + \alpha),$$

ahol r és α olyan paraméterek, melyek egy-egyértelműen meghatározottak c_1 és c_2 alapján, $(c_1, c_2) \leftrightarrow (r, \alpha)$ Ebben a felírásban a paramétereknek fizikai jelentés adható, r a rezgés amplitúdója, α a kezdőfázis, és k a frequencia.

5.2.4. Inhomogén lineáris egyenletek

Keressük az alábbi inhomogén differenciálegyenlet megoldását:

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x),$$

feltéve, hogy a homogén egyenlet megoldásai ismertek.

Állandók variálása, 1. megközelítés.

Legyen $\xi \epsilon \mathbb{R}$ tetszőleges, tekintsük a homogén egyenlethez tartozó alábbi kezdetiérték feladatot:

$$L(y) = 0, \qquad y(\xi) = 0,$$
$$y'(\xi) = 0, \qquad \ldots, y^{(n-2)}(\xi) = 0, y^{(n-1)}(\xi) = 1.$$

Ennek létezik egyértelmű megoldása, jelölje ezt

$$y_\xi(x).$$

Definiáljuk a

$$v(x) := \int_0^x f(\xi) y_\xi(x) d\xi \tag{5.3}$$

függvényt.

5.2.5. Állítás. *A fent definiált függvényre*

$$L(v)(x) = f(x).$$

Bizonyítás. Deriváljuk a (5.3) egyenletet x szerint. Azt kapjuk, hogy

$$v'(x) = f(x)y_x(x) + \int_0^x f(\xi)y'_\xi(x)d\xi = \int_0^x f(\xi)y'_\xi(x)d\xi,$$

hiszen

$$y_x(x) = 0, \qquad \forall x \epsilon \mathbb{R} - re,$$

definíció szerint. Hasonlóan

$$v^{(n)}(x) = f(x)y_x^{(n-1)}(x) + \int_0^x f(\xi)y_\xi^{(n)}(x)d\xi =$$

$$= f(x) + \int_0^x f(\xi)y_\xi^{(n)}(x)d\xi.$$

Így behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$L(v) = f(x) + \int_0^x f(\xi)L(y_\xi(x))d\xi = f(x).$$

Ennek a megközelítésnek az a hátránya, hogy v nehezen számítható ki analitikusan. Ezért egy látszólag másik megközelítést adunk meg, ami valójában ugyanazt az eredményt adja.

Állandók variálása, 2. megközelítés.

Legyen az $L(y) = 0$ homogén egyenlet n darab lineárisan független megoldása $y_1, \dots, y_n$.

Az inhomogén egyenlet egyetlen megoldását keressük a következő alakban:

$$y(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \dots + \gamma_n(x)y_n(x).$$

A fenti megoldásban szereplő függvényekre az alábbi feltételeket tesszük:

$$\begin{aligned}
\gamma_1' y_1 + \dots + \gamma_n' y_n &= 0 \\
\gamma_1' y_1' + \dots + \gamma_n' y_n' &= 0 \\
&\vdots \\
\gamma_1' y_1^{(n-2)} + \dots + \gamma_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
\gamma_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n' y_n^{(n-1)} &= f(x)
\end{aligned}$$

Így az együtthatók deriváltjaira adott n darab egyenlet. A fenti egyenletrendszert kompakt formában így írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

A baloldalon szereplő együttható mátrix az alapmegoldások Wronski-mátrixa. Mivel ezek az alapmegoldások lineárisan függetlenek, ezért ez a mátrix nem szinguláris, tehát a fenti egyenletrendszer mindig megoldható.

5.2.6. Állítás. *Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor*

$$L(y) = f$$

Bizonyítás. Az y függvényt így definiáltuk:

$$y = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k.$$

Ennek deriváltja

$$y' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k'$$

az első feltétel miatt. Hasonlóan számolható a többi derivált is.

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Behelyettesítve az L operátorba azt kapjuk, hogy

$$L(y) = f + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k L(y_k) = f,$$

hiszen y_k a homogén egyenlet megoldása, $k = 1, \dots, n$ mellett.

Speciálisan $n = 2$ esetben így történik az egyenletrendszer felírása. Legyen az egyenlet:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f,$$

és a homogén egyenlet alapmegoldásai legyenek y_1, y_2. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását ilyen alakban keresssük:

$$y(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \gamma_2(x) y_2(x),$$

ahol γ_1, γ_2 egyelőre ismeretlen függvények. Ezek deriváltjaira tett feltételek:

$$\begin{aligned} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 &= 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Példa. Harmonikus rezgés esetén a másodrendű egyenlet

$$y'' + k^2 y = f,$$

a homogén egyenlet alapmegoldásai $y_1 = \cos(kx)$ és $y_2 = \sin(kx)$. A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & \cos(kx) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Az együttható mátrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ \\ -k\sin(kx) & \cos(kx) \end{pmatrix},$$

ennek inverze

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(kx) & -\frac{1}{k}\sin(kx) \\ \\ \sin(kx) & \frac{1}{k}\cos(kx) \end{pmatrix}.$$

Így az egyútthatók deriváltjaira

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) &= -\frac{1}{k}\sin(kx)f(x) \\ \gamma_2'(x) &= \frac{1}{k}\cos(kx)f(x) \end{aligned}$$

adódik.

Megjegyzés. Az állandók variálásának módszere akkor is használható, ha a lineáris differenciálegyenlet együtthatói nem konstansok, hanem adott, folytonos függvények. Erre mutatunk be egy példát.

Példa. Tekintsük az alábbi lineáris differenciálegyenletet:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = xe^x.$$

Az eddigi jelöléseink szerint most tehát

$$a_1 = a_1(x) = -\frac{2}{x}, \qquad a_2 = a_2(x) = \frac{2}{x^2}, \qquad f(x) = xe^x.$$

Első lépés. Meghatározzuk a homogén differenciálegyenlet megoldásait. Könnyen ellenőrizhető, hogy a két alapmegoldás

$$y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = x^2,$$

azaz

$$y_j'' - \frac{2}{x}y_j' + \frac{2}{x^2}y_j = 0, \qquad j = 1, 2.$$

Így a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = c_1x + c_2x^2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Második lépés. Az inhomogén egyenlet megoldását

$$y(x) = \gamma_1(x)x + \gamma_2(x)x^2$$

alakban keressük, ahol γ_1 és γ_2 egyelőre ismeretlen függvények. A fenti tétel értelmében ezek deriváltjaira a következő feltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x)x + \gamma_2'(x)x^2 &= 0 \\ \gamma_1'(x) + \gamma_2'(x)2x &= xe^x. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldására rövid számolással

$$\gamma_1(x) = e^x - xe^x, \qquad \gamma_2(x) = e^x$$

adódik. Így az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$y(x) = (e^x - xe^x)x + e^x x^2 = xe^x,$$

általános megoldása pedig

$$y_a = xe^x + c_1 x + c_2 x^2, \qquad c_1, c_2 \epsilon \mathbb{R}.$$

Próbafüggvények alkalmazása

Bár a fent bemutatott módszer mindig alkalmazható, speciális jobboldal esetén érdemes az inhomogén egyenlet megoldását speciális alakban keresni. A megoldandó egyenlet:

$$L(y) = y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x).$$

- Ha $f(x) = Ke^{\alpha x}$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$, akkor a megoldást $y(x) = Ae^{\alpha x}$ alakban keressük, A ismeretlen.
- Ha $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$, akkor a megoldást $y(x) = A_m x^m + \cdots + A_0$ alakban keressük, A_k az ismeretlen paraméterek.
- Ha $f(x) = K\sin(\alpha x)$ vagy $f(x) = K\cos(\alpha x)$, akkor a megoldást $y(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x)$ alakban keressük, ahol A és B az ismeretlen paraméterek.

Ha az $f(x)$ ezen speciális függvények összege, akkor a próbafüggvényt is összegként keressük.

Példa. Tekintsük az alábbi másodrendű differenciálegyenletet:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + x^2 + x.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x.$$

Az inhomogén rész megoldását próbafüggvénnyel keressük,

$$y_p = Ae^{3x} + Bx^2 + Cx + D$$

alakban. Ennek deriváltjai

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Ae^{3x} + 2Bx + C \\ y_p'' &= 9Ae^{3x} + 2B. \end{aligned}$$

Ezeket visszahelyettesítve megkapjuk az ismeretlen együtthatókat:

$$A = \frac{1}{2} = B, \qquad C = 2, \qquad D = \frac{5}{2},$$

tehát az inhomogén rész egy partikuláris megoldása:

$$y_p = \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}.$$

5.2.3. Definíció. *Ha a homogén DE alapmegoldásai közt létezik olyan függvény, mint ami a DE jobboldalán szerepel. akkor rezonanciáról beszélünk. Ekkor a megfelelő próbafüggvényt x megfelelő hatványával szorozzuk.*

Példa. (Folytatás) Az előző DE -t tekintsük, más jobboldallal:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}.$$

Itt a jobboldalon álló függvény alapmegoldása a homogén DE-nek. Ezért próbafüggvényként az

$$y_p(x) = Axe^{2x}$$

függvényt tekintjük. Ennek deriváltjai

$$\begin{aligned} y'(x) &= Ae^{2x} + 2Ae^{2x} \\ y''(x) &= 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}. \end{aligned}$$

Innen $A = -1$ adódik, tehát az inhomogén DE egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = xe^{2x},$$

általános megoldása pedig

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^x + xe^{2x}.$$

5.3. Laplace transzformáció

5.3.1. Bevezetés

Legyen f olyan valós vagy komplex értékű függvény, mely a pozitív számegyenesen van értelmezve,

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{K},$$

ahol $\mathbb{K}$ vagy a valós vagy a komplex számtestet jelöli. A konvenció miatt kiterjeszthetjük úgy, hogy $f(t) = 0$ ha $t < 0$.

A Laplace transzformáció az f függvényhez egy F függvényt rendel hozzá, a következőképpen.

5.3.1. Definíció. *Tetszőleges $s\epsilon\mathbf{C}$ esetén definiáljuk f Laplace transzformáltját*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-ts}f(t)dt,$$

amennyiben a fenti integrál abszolút konvergens. A Laplace transzformált függvényt így is jelöljük:

$$\mathcal{L}(f, s) = F(s)$$

Mi lesz a Laplace transzformált értelmezési tartománya, azaz milyen $s\epsilon\mathbf{C}$ estén abszolút konvergens a fenti definícióban szereplő integrál? Jelölje ezt a halmazt

$$H_f = \{s\epsilon\mathbf{C} : \int_0^\infty |e^{-ts}f(t)|dt < \infty\}.$$

5.3.1. Tétel. *H_f a következő típusú lehet:*

1. $H_f = \mathbb{C}$,
2. $H_f = \emptyset$
3. *Létezik egy olyan $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ valós szám, hogy ha $\Re(s) < x_0$, akkor $s \not\epsilon H_f$ és ha $\Re(s) > x_0$ akkor $s \epsilon H_f$*

A tétel bizonyítása ezen a lemmán alapul:

5.3.1. Lemma. *Ha $s \epsilon H_f$ és $s_1 \epsilon \mathbb{C}$ olyan, hogy $\Re(s_1) > \Re(s)$, akkor $s_1 \epsilon H_f$.*

Bizonyítás. Mivel

$$|e^{-ts}| = e^{-t(\Re(s_1))} < e^{-t(\Re(s))} = |e^{-ts}|,$$

ezért

$$\int_0^\infty |e^{-ts_1} f(t)| dt < \int_0^\infty e^{-t(\Re(s))} f(t) dt < \infty.$$

Következmény. Ha $f(t)$-re teljesül, hogy

$$|f(t)| \leq e^{\alpha t}$$

valamilyen $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ esetén, akkor $F(s)$ értelmezett $\Re(s) > \alpha$ esetén.

Példa. Legyen

$$f(t) = 1, \qquad t \geq 0.$$

Ekkor

$$\mathcal{L}(1, s) = \int_0^\infty e^{-ts}\ 1\ dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

5.3.1. Állítás. *A Laplace transzformáció alaptulajdonságai:*

1. *Lineáris operátor, azaz*

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g),$$

$$\mathcal{L}(c \cdot f) = c \cdot \mathcal{L}(f)$$

2. Ha

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-ts} f(t) dt$$

differenciálható, akkor

$$F'(s) = \int_0^\infty (-t) e^{-ts} f(t) dt,$$

azaz

$$F'(s) = (-1)\mathcal{L}(tf(t), s).$$

3. Ez általában is igaz, ha F n-szer differenciálható, akkor

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t), s).$$

Bizonyítás.

2. Mivel az integrál abszolút konvergens, ezért az integrálás és a deriválás sorrendje felcserélhetők, így

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-ts} f(t) dt = \int_0^\infty \left(\frac{d}{ds} e^{-ts} \right) f(t) dt = \int_0^\infty (-t) e^{-ts} f(t) dt = -\mathcal{L}(tf(t), s).$$

Példa. (folytatás.) Az előző állítás 3. pontját alkalmazva

$$\mathcal{L}(t, s) = \left((-1) \frac{1}{s} \right)' = \frac{1}{s^2},$$

és teljes indukcióval

$$\mathcal{L}(t^n, s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

5.3.2. Állítás. *(Eltolási tétel) Ha $s - a \epsilon H_f$, akkor*

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t), s) = \mathcal{L}(f, s - a).$$

Bizonyítás.

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t), s) = \int_0^\infty e^{-ts} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-t(s-a)} f(t) dt = \mathcal{L}(f, s - a).$$

5.3.3. Állítás. *Ha f differenciálható, és létezik az f' Laplace-transzformáltja, akkor*

$$\mathcal{L}(f', s) = s\mathcal{L}(f, s) - f(0).$$

Bizonyítás. f' Laplace-transzformáltját kiszámítva:

$$\int_0^\infty e^{-ts} f'(t) dt = \Big[f(t)e^{-ts} \Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-se^{-ts}) f(t) dt = -f(0) + s\mathcal{L}(f, s),$$

ahol az integrál kiszámításahoz parciális integrálást használtunk.

5.3.2. Impulzusválasz függvény

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor minden ε-ra definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & ha \quad t = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & ha \quad 0 < t < \varepsilon \\ 0, & ha \quad t \geq \varepsilon \end{cases}.$$

Ekkor

$$\int_0^\infty \delta_\varepsilon(t) dt = 1$$

minden ε-ra. Kiszámoljuk, mi lesz a függvény Laplace trafnszformáltja $\varepsilon \to 0$ esetén.

Általában, tetszőleges f folytonos függvény mellett

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^\infty f(t)\delta_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\int_0^\varepsilon f(t)dt - \int_0^0 f(t)dt}{\varepsilon}.$$

Ez pedig f integrálfüggvényének deriváltja a 0 helyen, ami épp a függvény helyettesítési értéke a 0-ban, tehát

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^\infty f(t)\delta_\varepsilon(t) dt = f(0).$$

Ha létezne a határértékfüggvény,

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t),$$

akkor ez ilyen tulajdonságú lenne:

1. $$\int_0^\infty \delta(t)dt = 1,$$
2. Tetszőleges folytonos, abszolút integrálható függvény esetén
$$\int_0^\infty \delta(t)f(t)dt = f(0).$$

Ez a *Dirac-delta függvény*, amely kivezet abból a fogalomrendszerből, amellyel eddig foglakoztunk. Ilyen "függvényekkel" a disztribucióelmélet foglakozik, de formálisan mi is használni fogjuk (egy kicsit legalábbis).

Megjegyzés. A Dirac-delta függvény Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}(\delta, s) = \int_0^\infty e^{-ts}\delta(t)dt = e^{-0} = 1$$

minden s-re. Ez a Laplace transzformáltak közti "egység".

5.3.2. Definíció. *Adottak: $g, h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ valós függvények. Ezek konvolúciója $g * h$ szintén $[0, \infty)$-ben értelmezett függvény, melyet így definiálunk:*

$$(g * h)(t) = \int_0^t g(x)h(t - x)dx.$$

5.3.2. Tétel. *A konvolúció Laplace traszformáltjára*

$$\mathcal{L}(g * h) = \mathcal{L}(g)\mathcal{L}(h)$$

A tételt nem bizonyítjuk.

Speciális eset. Legyen $h \equiv 1$. Ekkor

$$(g * h)(t) = \int_0^t g(x)dx = G(t),$$

ahol $G(t)$ a g integrálfüggvénye.

Következmény

$$\mathcal{L}(G,s) = \mathcal{L}(g,s)\mathcal{L}(1,s) = \mathcal{L}(g,s)\frac{1}{s}$$

Példa. Határozzuk meg a

$$f(t) = \sqrt{t}, \qquad t \geq 0$$

függvény Laplace transzformáltját. Legyenek

$$g(t) = h(t) = \sqrt{t},$$

határozzuk meg ezek konvolúcióját.

$$g * h(t) = \int_0^t \sqrt{x}\sqrt{t-x}dx = \int_0^t \sqrt{xt - x^2}dx = \frac{\pi}{8}t^2,$$

ahol az integrált trigonometrikus helyettesítéssel számoltuk ki. (**HF**.) A fenti egyenletben a jobboldal Laplace transzformáltja

$$\mathcal{L}(\frac{\pi}{8}t^2, s) = \frac{\pi}{8}\frac{2}{t^3},$$

így ennyi a baloldal Laplace transzformáltja is, tehát

$$\Big(\mathcal{L}(\sqrt{t}, s)\Big)^2 = \frac{\pi}{8}\frac{2}{t^3}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}(\sqrt{t}, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{t^{3/2}}.$$

5.3.3. Laplace transzformáció alkalmazása differenciálegyenlet megoldására

A Laplace transzformáció egyik igen fontos tulajdonsága, hogy a deriválás helyett egyszerű skalárral való szorzást kell elvégezni. Emiatt bizonyos esetekben alkalmazhatjuk differenciálegyenletek megoldására. Mivel a derivált Laplace transzformáltjánál a 0-beli érték is szerepel, ezért főleg kezdetiérték-feladatok megoldására használhatjuk ezt a módszert. Egy példán mutatjuk be ezt.

Példa. Tekintsük az alábbi másodrendű differenciálegyenletet a megadott kezdeti feltételekkel:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

Jelölje a megoldásfüggvény Laplace traszformáltját

$$Y(s) = \mathcal{L}(y, s).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y', s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) \\ \mathcal{L}(y'', s) &= s(sY(s) - y(0)) - y'(0) = s^2Y(s) - 1. \end{aligned}$$

A baloldal Laplace transzformáltja tehát

$$\mathcal{L}(y'' - 4y' + 4y) = s^2Y(s) - 1 - 4sY(s) + 4Y(s) = (s^2 - 4s + 4)Y(s) - 1.$$

Jobboldal Laplace transzformáltja az eltolási tétel szerint:

$$\mathcal{L}(e^{2x}, s) = \frac{1}{s-2}.$$

Így a DE Laplace transzformáltját véve az alábbi egyenlethez jutunk:

$$(s^2 - 4s + 4)Y(s) - 1 = \frac{1}{s-2},$$

ahonnan $Y(s)$ kifejezhető,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^3}.$$

Ennek inverz Laplace transzformáltját véve megkapjuk a DE megoldását. Mivel

$$\mathcal{L}(e^{2x}, s) = \frac{1}{s-2}, \qquad \mathcal{L}(x^k, s) = \frac{k!}{s^{k+1}},$$

ezért

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = x, \qquad \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s-2)^2}) = e^{2x}x,$$

és hasonlóan

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s-2)^3}) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

A fenti kezdetiérték feladat megoldása tehát:

$$y(x) = e^{2x}\left(x + \frac{x^2}{2}\right).$$

HF. Behelyettesítéssel igazolható, hogy a fenti függvény valóban megoldás.

5.4. Differenciálegyenlet-rendszerek

5.4.1. Bevezetés

Egyelőre csak kétdimenziós rendszerekkel foglalkozunk. Keressünk olyan $y(x)$ és $z(x)$ függvényeket, melyek kielégítenek egy ilyen típusú differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x), z(x)) \\ z'(x) &= g(x, y(x), z(x)), \end{aligned}$$

ahol f és g adott három változós függvények.

5.4.1. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{R}^3$ egy tartomány, (x_0, y_0, z_0) ennek belső pontja. Adottak az $f, g : T \to \mathbb{R}$ függvények, melyekről feltesszük, hogy Lipschitz folytonosak, azaz*

$$|f(x, y, z) - f(x, \overline{y}, \overline{z})| \le M(|y - \overline{y}| + |z - \overline{z}|),$$

valamely rögzített M mellett. Ekkor az

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x), z(x)) \\ z'(x) &= g(x, y(x), z(x)), \\ y(x_0) = y_0, &\qquad z(x_0) = z_0 \end{aligned}$$

kezdetiérték feladatnak létezik megoldása, és ez egyértelmű valamilyen $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ intervallumban.

Megjegyzés. A tétel igaz általános n-dimenziós differenciálegyenlet rendszerre is. Ekkor n db függvényt keresünk, melyekre

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_k(x_0) &= y_{k0}, \qquad k = 1, \ldots n. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Speciális esetben már találkoztunk ilyen differenciálegyenlet rendszerrel, csak nem tudtunk róla. Tekintsünk például egy harmadrendű differenciálegyenletet .

$$y^{(3)}(x) + a_1 y''(x) + a_2 y'(x) + a_3 y(x) = \phi(x).$$

Rendeljük hozzá következő differenciálegyenlet rendszert:

$$y_1(x) = y(x), \qquad y_2(x) = y'(x), \qquad y_3(x) = y''(x)$$

Ezekre a függvényekre az összefüggések

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -a_1 y_3 - a_2 y_2 - a_1 y_1 + \phi. \end{aligned}$$

Ilyen típusú rendszerekkel kicsit részletesebben is foglalkozunk.

5.4.2. Lineáris, állandó együtthatós homogén DER

A könnyebb áttekinthetőség kedvéert 3 dimenzióban dolgozunk. (Minden ugyanígy elmondhtó általános n dimenziós lineáris rendszerekre is.) Tekintsük az alábbi háromdimenziós rendszert:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned}$$

és a hozzá tartozó kezdeti feltétel

$$y_1(0) = y_{01}, \qquad y_2(0) = y_{02}, \qquad y_3(0) = y_{03}.$$

A keresett függvényeket rendezzük el egy vektorba:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ennek deriváltja

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$$

Az együtthatókat gyűjtsük egy mátrixba:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A differenciálegyenlet rendszer tehát kompakt módon így írhtaó

$$Y' = AY, \qquad Y(0) = Y_0.$$

Példa. Az előző példa együtthatómátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Ezt szokás a differenciálegyenlet kisérő mátrixának (companion matrix) nevezni.

5.4.2. Tétel. *A lineáris egyenletrendszer megoldása*

$$Y(x) = e^{Ax} Y_0.$$

A tételben szereplő mátrix értelmezése most is a sorfejtés alapján történik.

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Ez általában nehezen számolható. Ha A szimmetrikus mátrix, akkor felírható

$$A = UDU^T$$

alakban, ahol U ortogonális mátrix, D pedig diagonális. Ez azt jelenti, hogy

$$U^T U = UU^T = I,$$

ahol I az egységmátrix,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

(Ha például A-nak 3 darab különböző valós sajátértéke van, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, akkor megfelelő sajátvektorok ortogonális rendszert alkotnak. Ekkor

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad U = (s_1 \; s_2 \; s_3)\,.,$$

ahol s_k a normalizált sajátvektorokat jelöli.)
Ekkor

$$A^k = UDU^T \cdot UDU^T \dots UDU^T = UD^kU^T,$$

ezért

$$e^A = Ue^DU^T,$$

ahol e^D diagonális mátrix, főátlójának elemei $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}$.

5.4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy A sajátértékei mind különbözőek, legyenek ezek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ekkor különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok egymásra ortogonálisak. A sajátvektorkok: s_1, s_2, s_3, amelyek skalárszorzata (bármely kettőnek) 0. Ekkor a lineárris differenciálegyenlet rendszernek lineáris független megoldásrendszere*

$$Y_k = e^{\lambda_k x} s_k.$$

Továbbá tetszőleges $Y(0) = Y_0$ kezdetiértékekhez létezik egyértelműen Y megoldás és ez felírható

$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + c_3Y_3$$

alakban megfelelő c_1, c_2, c_3 együtthatókkal.

Bizonyítás. A megoldások lineárisan függetlenek, hiszen $e^{\lambda_k}x$-k is lineárisan függetlenek, és s_k-k is. A fenti függvény deriváltja

$$Y_k' = \lambda_k e^{\lambda_k x} s_k, \qquad k = 1, 2, 3,$$

illetve a DE jobboldala

$$AY_k' = Ae^{\lambda_k x} s_k = e^{\lambda_k x} A s_k = e^{\lambda_k x} \lambda_k s_k.$$

Tehát valóban megoldás.

Megjegyzés. A tétel akkor is igaz lesz, ha nem különbözőek a sajátértékek, de minden többszörös sajátértékhez lineárisan független sajátvektorrendszer tartozik.

Példa. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a megfelelő lineáris rendszer

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 + y_3 \\ y_3' &= 3y_3 \end{aligned}$$

A megoldáshoz határozzuk meg A sajátértékeit, (I az egységmátrix):

$$0 = |A - \lambda I| = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

ahonnan azt kapjuk, hogy a sajátértékek

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3.$$

A sajátvektorok meghatározása. Tekintsük a $\lambda_1 = 1$ sajátértéket. Meg kell oldani az alábbi egyenletet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Innen azt kapjuk, hogy $c = 0$, a,és b tetszőleges. Ezért létezik λ_1-hez két ortogonális sajátvektor, ezek

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tekintsük most a $\lambda_3 = 3$ sajátértéket. A megoldandó egyenlet:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$-2a = 0, \qquad -2b + c = 0$$

és c tetszőleges. Így egy sajátvektor

$$s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a lineáris rendszer alapmegoldásai

$$Y_1 = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_2 = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_3 = e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Így az általános megoldás:

$$Y = \begin{pmatrix} c_1 e^x \\ c_2 e^x + c_3 e^{3x} \\ 2c_3 e^{3x} \end{pmatrix},$$

tehát

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 e^x \\ y_2(x) &= c_2 e^x + c_3 e^{3x} \\ y_3(x) &= 2c_3 e^{3x}, \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, c_3 \epsilon \mathbb{R}$ tetszőleges.

5.5. Parciális differenciálegyenletek

5.5.1. Kanonikus alak

A félév lezárásaként megismerkedünk a parciális differenciálegyenletek legegyszerűbb típúsaival. Ezek a differenciálegyenletek a fizikában alapvető szerepet játszanak. Olyan kétváltozós $u(t, x)$ függvényt keresünk, amely kielégít egy ilyen differenciálegyenletet:

$$F(t, x, u, u'_t, u'_x, u''_{tx}, u''_{xt}, u''_{xx}) = 0,$$

ahol F adott függvény. Itt az ismeretlen függvény két változója t az idő, x pedig a hely. Csak azt az esetet tekintjük, amikor ez lineáris, azaz a parciális differenciálegyenlet (PDE) ilyen alakú

$$a_{11}u''_{tt} + a_{12}u''_{tx} + a_{21}u''_{xt} + a_{22}u''_{xx} + b_1u'_t + b_2u'_x + f(t, x, u) = 0$$

5.5.1. Definíció. *A parciális differenciálegyenlet kanonikus alakú, ha a vegyes másodrendű parciális deriváltak együtthatói 0-k.*

5.5.1. Tétel. *Tetszőleges állandó együtthatós lineáris parciális differenciálegyenlet kanonikus alakra hozható megfelelő koordinátatranszformációval, és egy ilyen egyenlet megoldására vezethető vissza (homogén eset):*

$$\varepsilon_1u''_{tt} + \varepsilon_2u''_{xx} + b_1u'_t + b_2u'_x + cu = 0,$$

ahol ε_j-k az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeitől függően lehetnek -1, 1 *vagy* 0.

5.5.2. A lineáris PDE-k osztályozása

A kanonikus alakban szereplő ε_j együtthatóktól függően osztályozzuk az egyenleteket.

1. A PDE *elliptikus*, ha $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$, azaz

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \quad \text{vagy} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1.$$

Erre példa a komplex függvénytanból megismert Laplace egyenlet,

$$\triangle u = u''_{tt} + u''_{xx} = 0.$$

Ennek megoldásai a harmonikus függvények. Az inhomogén egyenletet *Poisson egyenlet*-nek hívjuk:

$$\triangle u + f(t, x) = 0.$$

2. A PDE *hiperbolikus* típusú, ha $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = -1$, azaz

$$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1 \qquad \text{vagy} \qquad \varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1.$$

   Ekkor az ismeretlen függvény két változóját szokás szerint t (idő) és x (hely) jelöli. Hiperbolikus egyenlet például a hullámmozgás egyenlete:

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx},$$

   ahol c adott konstans. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben ha a megoldásban t helyett $-t$-t írunk, újra megoldást kapunk. Ez azt jelenti, hogy a megoldás folyamat időben megfordítható.

3. A PDE *parabolikus* típúsú, ha

$$\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 \neq 0 \qquad \text{vagy} \qquad \varepsilon_1 \neq 0,\ \varepsilon_2 = 0.$$

   Példa erre a hővezetés egyenlete

$$u'_t = u''_{xx}.$$

   Megjegyezzük, hogy itt egy megoldásba t helyette $-t$-t írva, nem kapunk megoldást. Ezek a folyamatok időben nem megfordíthatóak.

5.5.3. A hővezetés egyenlete

Hővezetés végtelen hosszú rúdban

Tekintsük az alábbi feladatot. Egy (végtelen hosszúnak feltételezett) rúd hőmérsékletét vizsgáljuk, mely feltételezésünk szerint szigetelve van a környezetéhez képest. Jelölje $u(t, x)$ a t-edik időpontban az x helyen a hőmérsékletet. Fizikai meggondolások alapján belátható, hogy (megfelelő skálázással) ez a függvény kielégíti az alábbi parciális differenciálegyenletet:

$$u'_t = u''_{xx}.$$

Ahhoz, hogy a hőmérsékletet egyértelműen meg tudjuk határozni, szükség van a 0 időpontbeli hőmérséklet eloszlására. Tehát a fenti PDE-hez az alábbi *peremfeltételt* adjuk meg:

$$u(0, x) = f(x),$$

ahol f adott függvény, melyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx < \infty.$$

Az általános megoldás megkonstruálásához induljunk ki egy könnyen adódó megoldásból:

$$u(t,x) = e^{ixs-s^2t},$$

ahol s tetszőleges valós szám. Ezt a megoldást úgy kaphatjuk, hogy $u(t,x)$-t szeparált alakban keressük

$$u(t,x) = F(t)G(x).$$

Ekkor

$$u'_t(t,x) \quad = F'(t)G(x)$$
$$u''_{xx}(t,x) = F(t)G''(x),$$

, így átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = -s^2$$

és megoldunk két közönséges DE-t:

$$F'(t) = -s^2F(t), \qquad G''(x) = -s^2G(x),$$

ahol s tetszőlegesen megválasztható paraméter. Ez valóban megoldás, hiszen

$$\begin{aligned} u'_t &= F'(t)G(x) = u\cdot(-s^2), \\ u'_x &= F(t)G'(x) = u\cdot(is) \\ u''_{xx} &= F(t)G''(x) = -u\cdot s^2. \end{aligned}$$

Ennek értéke a peremen:

$$u(0,x) = e^{ixs}.$$

Ezekből fogjuk kikeverni az általános megoldást.

Az módszer, amit alkalmazni fogunk, a *Fourier módszer.* Ha f egy négyzetesen integrálható függvény, akkor előállítható

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs}\widehat{f}(s)ds$$

alakban, ahol $\widehat{f}$ a függvény Fourier transzformáltja.

5.5.1. Állítás. *A fenti peremérték feladat megoldása*

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs-s^2t} \widehat{f}(s) ds. \tag{5.4}$$

Bizonyítás. A fenti függvény teljesíti a peremfeltételt, hiszen

$$u(0,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \widehat{f}(s) ds = f(x).$$

A függvény kielégíti a PDE-t is, hiszen az integráljel mögé deriválva minden s mellett kielégíti azt.

Határozzuk meg ennek megoldását f függvényében. (Hiszen ez ismert.) $\widehat{f}$ előállítható a Fourier transzformáció segítségével:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} f(y) dy$$

Ezt behelyettesítve a (5.4) kifejezésbe azt kapjuk, hogy

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t,y) f(y) dy,$$

ahol $K(t,x,y)$ alkalmas magfüggvény,

$$K(t,x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x-y)-s^2t} ds.$$

Ennek megoldása:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

Megjegyzés. Speciális esetként legyen a hővezető rúd kezdeti eloszlása $\delta(x)$. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a rúd a $t = 0$ időpontban az $x = 0$ pontban egységnyi hőmennyiséget kap, ez a kezdeti feltétel. A PDE azt adja meg, hogy ilyen impulzust adva hogy fog időben szétoszlani a hő. Ekkor

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

ami egy normális eloszlás sűrűségfüggvénye (erről majd jövőre tanulnak).

Hővezetés véges hosszú rúdban

Tekintsük azt a feladatot, amikor egy *véges hosszú* rúd hőmérsékletének változását szeretnénk leírni. Ekkor olyan

$$u(t, x), \qquad t \geq 0,\ 0 \leq x \leq h,$$

függvényt keresünk, melyre

$$u(0, x) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq h \tag{5.5}$$

adott négyzetesen intagrálható függvény. Mivel a rúd csak véges, ezért a végpontokban plusz-feltételek vannak, ezeket *peremfeltételek*-nek hívjuk:

$$u'_x(t, 0) = u'_x(t, h) = 0, \qquad t \geq 0.$$

A megoldást most is szorzat alakban keressük,

$$u(t, x) = F(t)G(x).$$

A megoldandó két közönséges differenciálegyenlet

$$F'(t) = \alpha F(t), \qquad G''(x) = \alpha G(x),$$

α valamilyen paraméter.

- Legyen $\alpha = \lambda^2 > 0$. Ekkor a második differenciálegyenlet általános megoldása
  $$G(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$
  A peremfeltétel miatt itt csak a $c_1 = c_2 = 0$ megoldás jöhet szóba.
- Ha $\alpha = 0$, akkor az általános megoldás
  $$G(x) = c_1 x + c_2.$$
  A peremfeltétel miatt $c_1 = 0$, így megoldásként a konstans függvény adódik.
- Ha $\alpha = -\lambda^2 < 0$, akkor az általános megoldás
  $$G(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x).$$

Így csak speciális α esetén kaphatunk olyan megoldást, amely a kezdeti feltételeket kielégíti, nevezetesen

$$\alpha_n = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2.$$

A megfelelő α_n értékekhez tartozó megoldásokból a Fourier sorfejtés alapján tudjuk azt a megoldást "kikeverni", amely az (5.5) feltételnek eleget tesz.

5.5.4. A hullámmozgás egyenlete

Tekintsünk egy rugalmas húrt (végtelen hosszút), és legyen $u(t,x)$ a t-edik időpontban a húr x-pontbeli kitérése. Ha a húr hullámmozgást végez, akkor fizikai meggondolások alapján $u(t,x)$ olyan kétszer folytonosan differenciálható függvény, mely kielégíti az alábbi hiperbolikus PDE-t

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx},$$

ahol c adott konstans. A feladat akkor lesz egyértelműen megoldható, ha megadjuk a kezdeti időpontban a húr helyzetét és az egyes pontokhoz tartozó pillanatnyi sebességet. A peremfeltételek tehát

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u'_t(0,x) = u_1(x),$$

ahol u_0 és u_1 adott folytonosan differenciálható függvények.

A feladat *D'Alembert-féle megoldás*át adjuk meg. Alkalmazzuk az alábbi koordinátatranszformációt:

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct.$$

Az inverz transzformáció

$$x = \frac{\xi+\eta}{2}, \qquad t = \frac{\xi-\eta}{2c}.$$

Ezt behelyettesítve egy

$$U(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi-\eta}{2c}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)$$

függvényt kapunk. Ennek vegyes másodrendű deriváltja:

$$U'_\xi = u'_t \frac{1}{2c} + u'_x \frac{1}{2},$$

$$U''_{\eta\xi} = u''_{tt}\frac{1}{2c}\frac{-1}{2c} + u''_{xt}\frac{1}{2c}\frac{1}{2} + u''_{tx}\frac{1}{2}\frac{-1}{2c} + u''_{xx}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(u''_{tt}\frac{-1}{c^2} + u''_{xx}) = 0.$$

Vagyis kiderült, hogy U'_ξ független η-tól, így:

$$U'_\xi(\xi,\eta) = f(\xi),$$

ezért

$$U(\xi,\eta) = \int U'_\xi d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

valamely F és G függvények mellett.

Tehát a hullámmozgás PDE-nek a megoldása

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

ahol F és G kétszer folytonosan differenciálható valós függvények.

Megjegyzés. Kis magyarázattal szolgálunk erről a formuláról. Az eredeti parciális differenciálegyenletet úgy is felírhatjuk, hogy meg akarjuk oldani az

$$L(u) = 0$$

egyenletet, ahol L a következő parciális differeniál - operátor

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

mely formálisan szorzattá bontható:

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) = L_1 L_2.$$

Az

$$L_1(v) = 0$$

DE megoldásai

$$v(t,x) = F(x+ct)$$

alakúak, az

$$L_2(w) = 0$$

DE megoldásai pedig

$$w(t,x) = G(x-ct)$$

alakúak.

Könnyen látható, hogy a peremfeltételt kielégítő megoldás:

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds.$$