

LINEÁRIS ALGEBRA I.

JEGYZET

2017

TARTALOMJEGYZÉK

1. Lineáris (elsőfokú) egyenletrendszerek.....	3
Alapfogalmak	3
A Gauss-elimináció	3
Gauss algoritmus	4
2. Mátrix algebra	5
Alapfogalmak	5
A mátrix összeadás	5
A mátrix összeadás tulajdonságai.....	5
Speciális mátrixok	5
A mátrix szorzás	6
A mátrix szorzás tulajdonságai.....	6
Az inverz mátrix	6
Az inverz mátrix tulajdonságai.....	6
A mátrix inverzének kiszámítása.....	7
A mátrix számszorosa és transzponáltja	7
A mátrix számszorosának tulajdonságai	7
További speciális mátrixok	7
További fontos tételek	8
3. Vektoralgebra	9
Alapfogalmak	9
A vektorok összeadásának tulajdonságai	9
A vektorok számszorosának tulajdonságai.....	10
A skalárszorzat fogalma	10
A skalárszorzat geometriai jelentése	10

A skalárszorzat tulajdonságai.....	10
A vektoriális szorzat fogalma.....	11
A vektoriális szorzat geometriai jelentése.....	11
A vektoriális szorzat tulajdonságai.....	11
A vegyes szorzat fogalma.....	12
A vegyes szorzat geometriai jelentése.....	12
Lineáris kombinációval, bázissal kapcsolatos tételek és definíciók.....	12
Speciális bázisok	14
Bázisokkal kapcsolatos további tételek	14
A sík normál vektora és egyenlete.....	17
4. Algebrai struktúrák, relációk.....	18
Az alap struktúrák	18
A vektortér axiómák.....	18
5. Vektorterek.....	20
Altér, altér elégséges feltétele.....	20
Vektorterekkel kapcsolatos tételek.....	20
Lineáris függetlenséggel és összefüggőséggel kapcsolatos tételek.....	21
Bázisok, generátorrendszerek és dimenzió.....	23
6. Determinánsok.....	27
Alapfogalmak	27
A determináns tulajdonságai	27
Mátrix adjungáltja	29
Vektorok függetlenségének megállapítása	30
7. Homogén lineáris leképezések	31
Alapfogalmak	31
A homogén lineáris leképezés mátrixa.....	31
A lineáris leképezések magtere, képtere	32
Dimenzió tétel	32
Sajátérték, sajátvektor	33
Izomorfia	34
8. Bázistranszformáció	35
Az áttérési mátrix	35
Diagonalizálás, hasonló mátrixok	36
Végző.....	38
Irodalomjegyzék.....	38

1. LINEÁRIS (ELSŐFOKÚ) EGYENLETRENDSZEREK

Alapfogalmak

A lineáris algebra egyik alapvető módszere és gyakran megjelenő eszköze a lineáris (elsőfokú) egyenletrendszerek megoldására használatos Gauss-elimináció, illetve annak módosított verziója a Gauss-Jordan elimináció.

Definíció A **lineáris egyenletrendszer** lineáris egyenletekből áll. Egy egyenletet lineárisnak tekintünk, ha a benne szereplő ismeretlenek legfeljebb első hatványon szerepelnek.

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Ahol $x_1, x_2, \dots, x_n$ az ismeretlenek, $a_1, a_2, \dots, a_n$ az együtthatók, $b_1, b_2, \dots, b_m$ tagok pedig konstansok. Az egyenletrendszer megoldásának nevezzük azon $x_1, x_2, \dots, x_n$ szám n -eseket, amelyet behelyettesítve az egyenletrendszerbe az összes egyenlet kielégíthető.

Definíció Az egyenletrendszer **lépcsős alakjában** az i . egyenlet tartalmazza az x_i ismeretlent, de nem tartalmazhatja az $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ ismeretleneket.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{array}$$

Magyarázat A lépcsős forma előnye, hogy a megoldása szinte magától értetődő, az egyenletek egymásba való helyettesítésével könnyen megoldható lesz. A szemléltetéséhez vehetjük az alábbi egyenletet, mely egyértelműen lépcsős alakú. Ebben az esetben a z könnyen kifejezhető, melyet visszahelyettesítve a 2. egyenletbe az y is könnyen megkapható, majd az y és a z behelyettesítésével az x hasonlóképpen meghatározható.

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 8 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = & 1 \\ -z & = & 1 \end{array}$$

A Gauss-elimináció

A **Gauss-elimináció** célja, hogy egy adott egyenletrendszerből ekvivalens átalakításokkal egy lépcsős alakú egyenletrendszert hozzon létre.

Definíció **Ekvivalens az egyenletrendszer átalakítása**, ha az átalakítás után keletkező egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása, mint az eredetinek.

Ekvivalens átalakítások:

- két egyenlet felcserélése,
- adott egyenlet szorzása egy nem nulla valós számmal,
- valamely egyenlet számszorosának hozzáadása valamely más egyenlethez.

A Gauss-Jordan elimináció egy olyan megoldási módszer, melynek kiindulási egyenletrendszerén végrehajtjuk a Gauss-eliminációt, majd még egyszer kiküszöböljük a változókat, de az utolsó egyenlettől kezdve.

Definíció Ha az egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix főátlója alatt és felett is 0-k vannak, azt **redukált lépcsős alaknak** nevezzük.

Gauss algoritmus

1. Legyen $i = 1$.
2. Vizsgáljuk meg, hogy a_{ii} egyenlő-e nullával. Amennyiben igen, az egyenletek cserélésével érjük el, hogy ne legyen az. Ha nem az, rátérhetünk a 3. lépésre.
3. Az i . ismeretlent kiküszöböljük az egyenletből úgy, hogy az i . egyenlet $-\frac{a_{ki}}{a_{ii}}$ számszorosát hozzáadjuk a k . egyenlethez.
 - a. Ha ezáltal a k . egyenlet többi együtthatója is, és konstans tagja is nulla az egyenletet elhagyjuk.
 - b. Ha ezáltal a k . egyenlet együtthatói nullák, de a konstans tag nem az, ez tiltósor lesz, az egyenletnek nem lesz megoldása.
 - c. Ha a fentiek közül egyik sem fordul elő, és még van $i+1$. egyenlet, akkor növeljük i értékét eggyel és elvégezzük a 2.) és 3.) pontokat. Ha nincsen $i+1$. egyenlet az eljárás véget ért.

Definíció A lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha az egyenletrendszer minden egyenletének konstans tagja nulla.

2. MÁTRIX ALGEBRA

Alapfogalmak

Definíció Legyen T (egyelőre $T \equiv R$) egy kommutatív test, illetve m és n adott pozitív egészek. Ekkor a T test feletti $m \times n$ -es **mátrixon** egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek m sora és n oszlopa van, és amelynek elemei T -ből valók. Jelölésük az alábbi módon történhet.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Definíció Két mátrix akkor egyenlő, ha a megfelelő pozíciókon álló elemeik egyenlők.

Definíció A művelet a matematikában általában speciális függvényt jelent, mely esetében adott halmaz néhány eleméhez (azaz elemek rendezett véges sorozataihoz) rendelünk ugyanebbe a halmazba eső elemeket.

A mátrix összeadás

Definíció Csak azonos dimenziójú mátrixok adhatók össze. Legyen A és B két azonos dimenziójú, $m \times n$ -es méretű mátrix. Az $A + B$ összeget úgy képezzük, hogy az azonos helyen lévő elemeket összegezzük

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A mátrix összeadás tulajdonságai

- kommutatív
- asszociatív
- létezik egységelem (nullmátrix)
- létezik inverz („ellentett mátrix”)

Speciális mátrixok

Kvadratikus A kvadratikus mátrixokon (másnéven négyzetes mátrixokon) az $n \times n$ típusú mátrixokat értjük.

Sorvektorok Az $1 \times n$ típusú mátrixok.

Oszlopvektorok Az $n \times 1$ típusú mátrixok.

Szimmetrikus Azokat a mátrixokat nevezzük szimmetrikusnak, melyek megegyeznek transzponáltjukkal.

Diagonális Olyan kvadratikus mátrix, melynek minden főátlón kívüli eleme nulla.

Nullmátrix Olyan mátrix, melynek minden eleme nulla.

Egység mátrix Olyan diagonális mátrix, melynek minden átlóeleme 1.

A mátrix szorzás

Definíció Az A $m \times n$ típusú mátrix és a B $n \times k$ típusú **mátrix szorzata** az a C $m \times k$ típusú mátrix, melynek elemeit a következőképp számoljuk ki:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}$$

A mátrix szorzás tulajdonságai

- nem kommutatív
- asszociatív
- az összeadásra nézve disztributív
- létezik egységelem (egységmátrix)

Tétel Legyen A $n \times n$ típusú mátrix. Ekkor $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$.

Bizonyítás Legyen $A \cdot E_n = C$, ekkor

$$c_{ik} := \sum_{l=1}^n a_{il} e_{lk} = a_{ik} \cdot e_{kk} = a_{ik} \quad \text{mivel } e_{lk} = 0, \text{ ha } l \neq k \text{ és } 1, \text{ ha } l = k.$$

Legyen most $E_n \cdot A = D$, ekkor

$$d_{ik} := \sum_{l=1}^n e_{il} a_{lk} = e_{ii} \cdot a_{ik} = a_{ik} \quad \text{mivel } e_{il} = 0, \text{ ha } i \neq l \text{ és } 1, \text{ ha } i = l.$$

Ezekből következik, hogy $C = D$, hiszen elemenként egyenlők.

Az inverz mátrix

Definíció Az A $n \times n$ típusú mátrix. Azt az A^{-1} $n \times n$ típusú mátrixot, amelyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ egyenlőség teljesül, az **A mátrix inverzének** nevezzük.

Tétel Ha az A mátrixnak létezik bal- és jobboldali inverze, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás Legyen A baloldali inverze A^{-1} , jobboldali inverze A^* . Azt kell belátunk, hogy ezek megegyeznek. A definíció szerint a két inverz elemre igazak a következő összefüggések:

- $A^{-1} \cdot A = E_n$
- $A \cdot A^* = E_n$

Ezekből következik, hogy

$$A^{-1} = A^{-1} \cdot E_n = A^{-1} \cdot (A \cdot A^*) = (A^{-1} \cdot A) \cdot A^* = E_n \cdot A^* = A^*$$

Az inverz mátrix tulajdonságai

- Ha az A mátrix invertálható, inverzének inverze önmaga.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$\text{Bizonyítás} \quad (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot E = (A^{-1})^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) = (A^{-1})^{-1} \cdot A = E \cdot A = A$$

- Ha az A és B mátrixok invertálhatók, akkor szorzatuk is invertálható, és inverze a tényezők inverzeinek fordított sorrendben való szorzata.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Bizonyítás A bizonyításhoz egyszerűen a definíciót használhatjuk fel.

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$$

Ezzel beláttuk, hogy az $A \cdot B$ inverze a $B^{-1} \cdot A^{-1}$, és mivel az inverz egyértelmű más inverz nem létezik.

- Ha a C mátrix invertálható (nem szinguláris), akkor a mátrix egyenletet lehet a szokásos módon rendezni.

$$A \cdot C = B \cdot C \rightarrow A = B$$

$$C \cdot A = C \cdot B \rightarrow A = B$$

Bizonyítás Csak az $A \cdot C = B \cdot C \rightarrow A = B$ részét bizonyítjuk, a következő belátása hasonló módon történik.

$$A = A \cdot E = A \cdot (C \cdot C^{-1}) = (A \cdot C) \cdot C^{-1} = (B \cdot C) \cdot C^{-1} = B \cdot (C \cdot C^{-1}) = B \cdot E$$

Tehát $A = B$.

A mátrix inverzének kiszámítása

A mátrix inverzének kiszámolásához több módszert is alkalmazhatunk. Tudva azt, hogy a mátrixot az inverzével megszorozva az egységmátrixot kapjuk, felírhatjuk az alábbi egyenlőséget.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezt az egyenletet Gauss-Jordan eliminációval megoldva az egységmátrix helyén előáll az A inverze, míg az A helyén az egységmátrix jelenik meg.

A másik inverz számítási módszer az adjungált mátrix és a mátrix determinánsának használatával történik. Ekkor az A mátrix inverzére vonatkozó kiszámítási képlet:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

A mátrix számszorosa és transzponáltja

Definíció Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Ekkor A **transzponáltján** azt a $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixot értjük, amelynek elemeire $b_{ij} = a_{ji}$. Az A transzponáltját A^T -vel jelöljük.

Definíció Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Az A $m \times n$ típusú **mátrix λ számszorosa** az a B mátrix, melynek elemeire igaz, hogy $b_{ik} = \lambda \cdot a_{ik}$.

A mátrix számszorosának tulajdonságai

- Létezik egységelem: $1 \cdot A = A \cdot 1 = A \leftrightarrow 1 \cdot a_{ik} = a_{ik} \cdot 1 = a_{ik}$
- Vegyes asszociativitás: $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A \leftrightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot a_{ik}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot a_{ik}$
- (1) Vegyes disztributivitás: $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \leftrightarrow (\lambda + \mu) \cdot a_{ik} = \lambda \cdot a_{ik} + \mu \cdot a_{ik}$
- (2) Vegyes disztributivitás: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B \leftrightarrow \lambda \cdot (a_{ik} + b_{ik}) = \lambda \cdot a_{ik} + \lambda \cdot b_{ik}$

Definíció **Polinomnak** nevezzük az $\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ formát, ahol $a_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$ -re.

További speciális mátrixok

Permutáló Az olyan kvadratus mátrixot, amelynek mindegyik sorában és oszlopában pontosan egy darab egyes áll, permutáló mátrixnak nevezzük.

Antiszimmetrikus Az $A = (a_{ik})$ mátrix antiszimmetrikus, ha $A = -A^T$, tehát $a_{ik} = -a_{ik}$.

Ortogonalis A G mátrix ortogonalis, ha $G \cdot G^T = E$, ahol E a megfelelő típusú egységmátrix.

További fontos tételek

Tétel Minden $A \in T^{n \times n}$ mátrix felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

Bizonyítás Konstruktív bizonyítási módszert alkalmazunk, vagyis meg is adjuk ezeket a mátrixokat. A mátrix összeadás tulajdonságai miatt az $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ azonosság fennáll.

Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy az $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ mátrix szimmetrikus, az $F = \frac{1}{2}(A - A^T)$ mátrix pedig antiszimmetrikus.

- Az S mátrix elemei leírhatók az $s_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki})$ összefüggésből, amiből az S^T mátrix elemei definíció alapján, pedig az $s_{ik}^t = \frac{1}{2}(a_{ki} + a_{ik})$ képletből következnek. A két egyenlet megegyezik az összeadás kommutativitása miatt, tehát S valóban szimmetrikus.
- Az előző ponthoz hasonlóan F mátrix elemei leírhatók az $f_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$ összefüggés alapján, míg az F^T mátrix elemei szintén definíció alapján az $f_{ik}^t = \frac{1}{2}(a_{ki} - a_{ik})$ képletből következnek. Látható, hogy $f_{ik} = -f_{ik}^t$, tehát az F mátrix antiszimmetrikus.

A tételt tehát bebizonyítottuk.

Tétel A G mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha $G^T = G^{-1}$.

Bizonyítás Az állítás az inverz mátrix és az ortogonális mátrix definíciójából következik.

Definíció A mátrix K idempotens, ha $K^2 = K$.

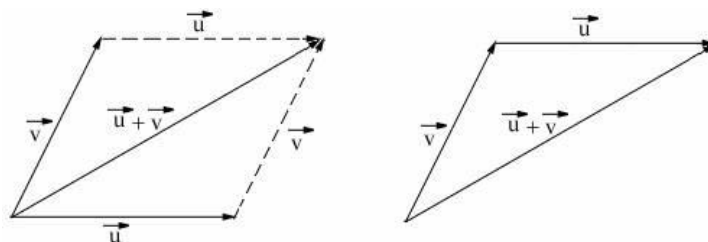
3. VEKTORALGEBRA

Alapfogalmak

Definíció Az irányított szakaszokat **vektoroknak** nevezzük.

Definíció Két vektor akkor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

Definíció Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegét úgy kapjuk, hogy a $\mathbf{b}$ vektort eltoljuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy kezdőpontja az $\mathbf{a}$ vektor végpontjához kerüljön. Az $\mathbf{a}$ vektor kezdőpontjából a $\mathbf{b}$ vektor végpontjába mutató vektor a két vektor összege.



A vektorok összeadásának tulajdonságai

- kommutatív
- asszociatív
- létezik egységelem

Bizonyítás Az összeadás definíciójából következik, hogy az $\mathbf{e}$ egységelem kezdőpontját az $\mathbf{a}$ vektor végpontjához kell illeszteni, és az összegvektor $\mathbf{a}$ kezdőpontját köti össze az $\mathbf{e}$ egységelem végpontjával. De az összeg szintén $\mathbf{a}$. Tehát az $\mathbf{e}$ egységelem hossza csak nulla lehet. Mivel a nullvektor iránya tetszőleges, ezért a az $\mathbf{e}$ vektor megegyezik a nullvektorral.

- létezik inverz elem

Bizonyítás Az összeadás definíciója szerint az $\mathbf{a}$ vektor végpontjához egy olyan vektort fűzünk, melynek az $\mathbf{a}$ vektor végpontja kezdőpontja és végpontja az $\mathbf{a}$ vektor kezdőpontja. Ekkor nullvektor lesz a két vektor összege.

Definíció Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja ugyanaz a pont, tehát nagysága nulla, **nullvektornak** nevezzük. A nullvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük.

Definíció Az olyan vektort, amelynek nagysága egységnyi, azt **egységvektornak** nevezzük.

Definíció Az $\mathbf{a}$ vektor összeadásra vonatkozó $\mathbf{a}^{-1}$ inverz elemét, az $\mathbf{a}$ vektor ellentettjének nevezzük és $-\mathbf{a}$ -val jelöljük.

Definíció Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ tetszőleges vektor. Az $\mathbf{a}$ vektor számszorosa az a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ -val jelölt vektor, amelyre

- ha $\lambda \geq 0$, $\mathbf{a}$ -val egyirányú, hossza pedig $|\lambda \cdot \mathbf{a}| = \lambda \cdot |\mathbf{a}|$.
- ha $\lambda < 0$, $\mathbf{a}$ -val ellentétes irányú, hossza pedig $|\lambda \cdot \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

Lemma Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha van egy olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám, amelyikkel az egyik vektor felírható a másik λ számszorosaként.

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, melyre $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{b}$

Bizonyítás Először azt bizonyítjuk, ha a vektorok párhuzamosak, akkor van egy ilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám.

- Először tekintsük a két vektort egyirányúnak. A párhuzamos irányt megadhatjuk egy egységnyi hosszú vektorral, legyen ez $\mathbf{e}$. Ezzel mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ felírható.

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{e} \text{ és } \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot \mathbf{e}$$

Egységnyi hosszú $\mathbf{b}$ irányú vektort kapunk, ha $\mathbf{b}$ -t szorozzuk $\frac{1}{|\mathbf{b}|}$ -vel. Ezt $\mathbf{e}$ -be behelyettesítve $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{b}|} \cdot \mathbf{b}\right)$. Ekkor az $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{b}$ összefüggésben a $\lambda = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

- Ellentétes irányú vektorok esetén, az $\mathbf{a}$ vektor legyen egyirányú az $\mathbf{e}$ vektorral. $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{e}$ és $\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot (-1) \cdot \mathbf{e}$
Ebből következik, hogy $\mathbf{a} = (-1) \cdot |\mathbf{a}| \cdot \frac{1}{|\mathbf{b}|} \cdot \mathbf{b}$. Ekkor az $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{b}$ összefüggésben a $\lambda = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

Másodszor azt tekintjük, hogy $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{b}$. Ekkor a definícióból automatikusan következik, hogy $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

A vektorok számszorosának tulajdonságai

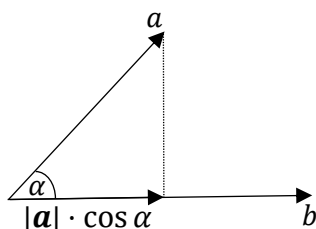
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot 1$
- vegyes asszociatív szabály: $\mu \cdot (\lambda \cdot \mathbf{a}) = (\mu \cdot \lambda) \cdot \mathbf{a}$
- (1) vegyes disztributív szabály: $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a}$
- (2) vegyes disztributív szabály: $\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$

A skalárszorzat fogalma

Definíció Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatán azt az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ -vel jelölt számot értjük, melyre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$, ahol az α a két vektor által bezárt szög.

A skalárszorzat geometriai jelentése

Mivel $|\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha$ az $\mathbf{a}$ vektornak $\mathbf{b}$ -re eső merőleges vetülete, a skalárszorzatot geometriailag úgy lehet értelmezni, mint $\mathbf{a}$ -nak $\mathbf{b}$ irányába eső komponensének és $\mathbf{b}$ -nek a szorzatát.



Abban a speciális esetben, mikor a $\mathbf{b}$ vektor egységvektor, akkor a skaláris szorzat megadja az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ vektor egyenesére eső merőleges vetületének hosszát.

A skalárszorzat tulajdonságai

- pozitív definit: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- szimmetrikus: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- homogén: $\lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$
- lineáris: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

Tétel Két vektor akkor és csak akkor merőleges, ha a skaláris szorzatuk nulla.

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

Bizonyítás A bizonyítás két részből áll, melyekből először azt bizonyítjuk, hogy amennyiben $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, akkor $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

- Ha $|\mathbf{a}| \neq 0$ és $|\mathbf{b}| \neq 0$, akkor $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = 0$ csak úgy teljesülhet, ha $\cos \alpha = 0$, tehát $\alpha = 90^\circ$ vagy $\alpha = 270^\circ$. Mivel megállapodás szerint ilyenkor a kisebb szöget tekintjük, a két vektor merőleges egymásra.

- Ha valamelyik vektor nullvektor, akkor a skaláris szorzat is nulla. Mivel a nullvektor iránya tetszőleges, így a merőlegesség teljesül

A bizonyítás második felében azt bizonyítjuk, hogy ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, tehát $\alpha = 90^\circ$ akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Ez triviális, hiszen definíció alapján a skaláris szorzat nulla lesz, mivel $\alpha = 90^\circ$ esetén $\cos \alpha = 0$.

A vektoriális szorzat fogalma

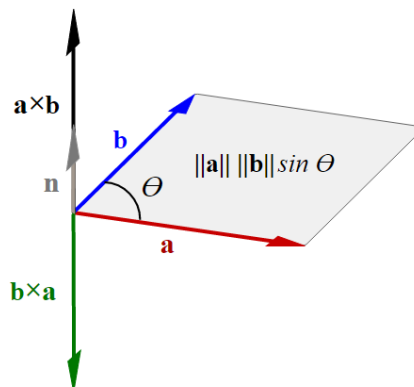
Definíció Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok **jobbrendszert** alkotnak, ha közös kezdőpontból ábrázolva őket, az $\mathbf{e}$ vektor irányából nézve az $\mathbf{a}$ vektort π -nél kisebb szögű pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányú forgatás

Definíció Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok **vektoriális szorzatán** azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel jelölt vektort értjük, amelyre

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$, ahol α az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög.
- Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor iránya az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra is merőleges, és velük jobbrendszert alkot.

A vektoriális szorzat geometriai jelentése

Az ábrán látható paralelogramma $\mathbf{a}$ vektor végpontjából a $\mathbf{b}$ vektor végpontjába mutató átlójának behúzásával két egybevágó háromszögre bontható, melyek területe $\frac{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \theta}{2}$ a háromszög szinuszos terület képlete alapján.



Látható, hogy mivel egy ilyen háromszög területe a paralelogramma félterületét adja meg, a paralelogramma területe $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \theta$ lesz. Ez pontosan a az $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ -vel egyezik meg. A vektoriális szorzat számértéke tehát megadja a két vektor által kifeszített paralelogramma területét.

A vektoriális szorzat tulajdonságai

- antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- nem asszociatív: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- (1) vegyes disztributivitás: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- (2) vegyes disztributivitás: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

Tétel Két vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk nullvektor.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

Bizonyítás A bizonyítást két irányból tekintjük. Először azt bizonyítsuk, hogy amennyiben $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Ez triviálisan következik a definícióból, hiszen az, hogy $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ azt

jelenti, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor vagy 0° -ot, vagy 180° fokot zár be, tehát $\sin \alpha$ mindenképp nulla. Így az $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$ nullvektort fog adni.

A második részben azt bizonyítjuk, hogy amennyiben $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, abból következik, hogy $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. A vektoriális szorzat csak akkor lehet nulla, ha vagy legalább az egyik vektor nullvektor, vagy $\sin \alpha = 0$.

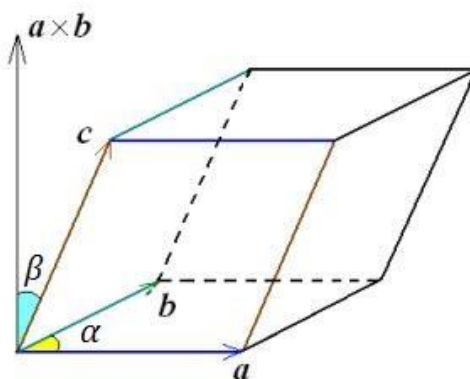
- Ha $\sin \alpha = 0$, abból következik, hogy $\alpha = 0^\circ$ vagy $\alpha = 180^\circ$. Tehát a két vektor párhuzamos.
- Amennyiben legalább az egyik vektor nullvektor az eredmény is nullvektor lesz, s mivel a nullvektor iránya tetszőleges így a párhuzamosság fennáll.

A vegyes szorzat fogalma

Definíció Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ számot az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának nevezzük.

A vegyes szorzat geometriai jelentése

Tekintsük az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedont. A test alapja az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma. Az $\mathbf{e}$ vektor legyen az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel párhuzamos egységvektor tehát merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok síkjára.



$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{c} = (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha) \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = \text{alapterület} \cdot \text{magasság} = \text{előjeles térfogat}$$

Az $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$ az az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma előjeles területét adja meg, míg az $\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}$ vektorok skaláris szorzata a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{e}$ vektor irányába eső merőleges vetületének a hosszát, ami pont a paralelepipedon magassága. Így a kettő skalár szorzata megadja a paralelepipedon előjeles térfogatát.

Tétel Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok geometriai jelentése a vektorok általmeghatározott paralelepipedon előjeles térfogata.

Lineáris kombinációval, bázissal kapcsolatos tételek és definíciók

Tétel (*Síkbeli felbontási tétel*) Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor, az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$, akkor minden más $\mathbf{c}$, azonos síkbeli vektor felbontható az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor párhuzamos összetevőire, melyek összege megadja a $\mathbf{c}$ vektort.

$$\mathbf{c} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}, \text{ ahol } \alpha \text{ és } \beta \in \mathbb{R}$$

Tehát bármely síkbeli vektor egyértelműen felírható két vele egységben lévő, nem párhuzamos vektor lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás A $\mathbf{c}$ vektor kezdőpontján át $\mathbf{a}$ -val, míg végpontján át $\mathbf{b}$ -vel húzunk párhuzamos egyeneseket. Mivel a tétel szerint $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok, ezért az M pontban metszik egymást.

Mivel $AM \parallel \mathbf{a} \rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $AM = \alpha \cdot \mathbf{a}$ és hasonlóan $MB \parallel \mathbf{b} \rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$, amelyre $MB = \beta \cdot \mathbf{b}$. Ezekből következik, hogy mivel $\mathbf{c} = AM + MB$, ezért $\mathbf{c} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}$, ahol α és $\beta \in \mathbb{R}$.

A felbontás egyértelműségét indirekten bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{c}$ vektornak két ilyen felbontása van.

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \cdot \mathbf{a} + \beta_1 \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} = \alpha_2 \cdot \mathbf{a} + \beta_2 \cdot \mathbf{b}$$

Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat és alkalmazzuk a disztributív szabályokat azt kapjuk, hogy $\mathbf{0} = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \mathbf{a} + (\beta_1 - \beta_2) \cdot \mathbf{b}$. Két vektor összege csak akkor lehet nullvektor, ha párhuzamosak, egyenlőhosszúak és ellentétes irányúak. Mivel $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, így számszorosaik sem lehetnek párhuzamosak, így ezek összege semmiképp nem adhat nullvektort. Ebből arra következtethetünk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok együtthatóinak kell nullának lennie, tehát $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ és $\beta_1 - \beta_2 = 0$, melyből következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2$, illetve $\beta_1 = \beta_2$, tehát a felbontás egyértelmű.

Definíció Legyen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in T$, ahol T test (egyelőre $T \equiv \mathbb{R}$), V pedig egy T feletti k dimenziós vektortér. V elemei vektorok, míg T elemei skalárok. Ekkor a $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n \in V$ vektort a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük.

Definíció A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

csak úgy lehetséges, hogy $\forall \lambda_i = 0$.

Definíció A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok **lineárisan összefüggők**, ha

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

lineáris kombinációban van olyan λ_i melyre $\lambda_i \neq 0$.

Definíció **Bázisnak** nevezzük a lineárisan független generátorrendszereket, tehát az olyan vektorokat, melyek függetlenek és minden más vektor előáll lineáris kombinációjuk által.

Tétel Három vektor pontosan akkor lineárisan független, ha nem lineárisan összefüggők.

Tétel A térben három vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem egysíkúak.

Bizonyítás Először lássuk be, hogy ha három vektor lineárisan független, abból következik, hogy nincsenek egy síkban.

Tegyük fel, hogy három lineárisan független vektor egy síkban van. Ebben az esetben

- vagy valamely kettő bázist alkot, így a harmadik kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként,
- vagy amennyiben mindhárom párhuzamos, az egyik lineáris kombinációjaként a másik kettő előállítható, így lineárisan összefüggők.

Tehát mindkét esetben ellentmondásra jutunk, így nem lehetnek egy síkban.

Következő lépésben azt próbáljuk belátni, hogy ha három vektor nincsen egy síkban abból következik, hogy lineárisan függetlenek. Ezt onnan tudhatjuk, hogy amennyiben nem teljesülnek lineárisan összefüggők. Ez pedig az előző pontból könnyen belátható, tehát mivel mindkét irányban teljesül az állítás a tételt bebizonyítottuk.

Tétel *(Térbeli felbontási tétel)* Ha adott a térben három, nem egy síkú, páronként nem párhuzamos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor, akkor bármely $\mathbf{d}$ térbeli vektorhoz van olyan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, amelyekre igaz, hogy

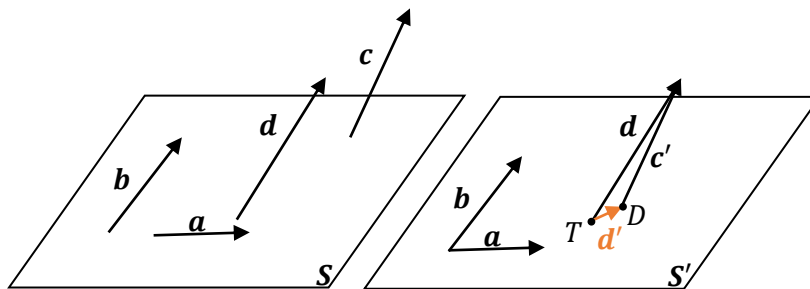
$$\mathbf{d} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c}.$$

Ez a felbontás egyértelmű.

Bizonyítás *(folytatás a következő oldalon)*

A síkbeli felbontási tételhez hasonlóan ez a bizonyítás is konstruktív.

A $\mathbf{d}$ vektor talppontján, T -n átváz $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott S síkkal párhuzamos S' síkot rajzolunk.



A $\mathbf{c}$ vektor nem párhuzamos $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel, tehát $\mathbf{d}$ vektor végpontjában $\mathbf{c}$ -vel húzott párhuzamos egyenes D pontban dőli a síkot. A T pontból a D pontba mutató vektor legyen $\mathbf{d}'$, a T pontot s $\mathbf{d}$ végpontját összekötő vektor $\mathbf{c}'$. Ekkor $\mathbf{d} = \mathbf{d}' + \mathbf{c}' = (\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}) + \gamma \cdot \mathbf{c}$, hiszen $\mathbf{d}'$ egy síkban van $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel, így síkbeli felbontási tétel miatt felírható azok lineáris kombinációjaként.

Az egyértelműség bizonyítása hasonlóan működik, mint a síkbeli felbontási tétel esetén. Bármely három nem egysíkú térbeli vektor bázist alkot.

Tétel

Bizonyítás Egy korábbi tételben már beláttuk, hogy három nem egy síkú, páronként nem párhuzamos vektor lineárisan független. A térbeli felbontási tételben azt bizonyítottuk, hogy minden vektor felírható e három vektor lineáris kombinációjaként, ezért bázist alkotnak.

Tétel

Bármely három lineárisan független vektor bázist alkot.

Bizonyítás

Az előző bizonyítás közvetlen következménye.

Speciális bázisok

Ortogonalis Egy bázis ortogonalis, ha a vektorai páronként merőlegesek.

Normált Egy bázis normált, ha a vektorai egységvektorok.

Ortonormált Egy bázis ortonormált, ha ortogonalis és normált.

Bázisokkal kapcsolatos további tételek

Tétel Adott a tér egy $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázisa, valamint a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáikkal.

$$\mathbf{c} = c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + c_2 \cdot \mathbf{b}_2 + c_3 \cdot \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} = [c_1 \ c_2 \ c_3]_{[\mathbf{b}]}^T$$

$$\mathbf{d} = d_1 \cdot \mathbf{b}_1 + d_2 \cdot \mathbf{b}_2 + d_3 \cdot \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} = [d_1 \ d_2 \ d_3]_{[\mathbf{b}]}^T$$

$$\text{Ebben az esetben a } \mathbf{c} + \mathbf{d} \text{ vektor koordinátái: } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ c_3 + d_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

Bizonyítás Az asszociatív, kommutatív és disztributív tulajdonságok felhasználásával könnyen bizonyítható a tétel.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} + \mathbf{d} &= (c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + c_2 \cdot \mathbf{b}_2 + c_3 \cdot \mathbf{b}_3) + (d_1 \cdot \mathbf{b}_1 + d_2 \cdot \mathbf{b}_2 + d_3 \cdot \mathbf{b}_3) \\ &= c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + c_2 \cdot \mathbf{b}_2 + c_3 \cdot \mathbf{b}_3 + d_1 \cdot \mathbf{b}_1 + d_2 \cdot \mathbf{b}_2 + d_3 \cdot \mathbf{b}_3 \\ &= c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + d_1 \cdot \mathbf{b}_1 + c_2 \cdot \mathbf{b}_2 + d_2 \cdot \mathbf{b}_2 + c_3 \cdot \mathbf{b}_3 + d_3 \cdot \mathbf{b}_3 \\ &= (c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + d_1 \cdot \mathbf{b}_1) + (c_2 \cdot \mathbf{b}_2 + d_2 \cdot \mathbf{b}_2) + (c_3 \cdot \mathbf{b}_3 + d_3 \cdot \mathbf{b}_3) \\ &= (c_1 + d_1) \cdot \mathbf{b}_1 + (c_2 + d_2) \cdot \mathbf{b}_2 + (c_3 + d_3) \cdot \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ c_3 + d_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} \end{aligned}$$

Tétel Adott a tér egy $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázisa, valamint az $\mathbf{a}$ vektor a $\mathbf{b}$ bázisra vonatkozó koordinátái.

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{b}_1 + a_2 \cdot \mathbf{b}_2 + a_3 \cdot \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} = [a_1 \ a_2 \ a_3]_{[\mathbf{b}]}^T$$

Ebben az esetben az $\lambda \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$

Bizonyítás A bizonyítás triviális.

Tétel Adott a tér egy ortonormált bázisa (kanonikus bázis) és az $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$ vektorok koordinátái.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$$

Ekkor az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skalárszorzat a következőképpen kiszámítható.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot b_i$$

A tétel a várt módon N dimenziós térben is teljesül.

Bizonyítás Jelöljük a bázisvektorokat a szokásos módon: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Alkalmazva a skalárszorzat homogén és lineáris tulajdonságait, azaz, hogy $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, illetve hogy $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j} + a_3 \cdot \mathbf{k}) \cdot (b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j} + b_3 \cdot \mathbf{k}) \\ &= (a_1 \cdot \mathbf{i} \cdot b_1 \cdot \mathbf{i}) + (a_1 \cdot \mathbf{i} \cdot b_2 \cdot \mathbf{j}) + (a_1 \cdot \mathbf{i} \cdot b_3 \cdot \mathbf{k}) + (a_2 \cdot \mathbf{j} \cdot b_1 \cdot \mathbf{i}) \\ &\quad + (a_2 \cdot \mathbf{j} \cdot b_2 \cdot \mathbf{j}) + (a_2 \cdot \mathbf{j} \cdot b_3 \cdot \mathbf{k}) + (a_3 \cdot \mathbf{k} \cdot b_1 \cdot \mathbf{i}) + (a_3 \cdot \mathbf{k} \cdot b_2 \cdot \mathbf{j}) \\ &\quad + (a_3 \cdot \mathbf{k} \cdot b_3 \cdot \mathbf{k}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \end{aligned}$$

Tétel Adott a tér egy ortonormált, jobbrendszerű bázisa, és az $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$ vektorok az erre a bázisra vonatkozó koordinátaikkal.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$$

Ekkor az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat a következőképpen kiszámítható.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \mathbf{i} - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \cdot \mathbf{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \mathbf{k}$$

Bizonyítás Jelöljük a bázisvektorokat a szokásos módon: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Alkalmazva a vektoriális szorzat disztributív és antikommutatív tulajdonságait, valamint az $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ egyenlőséget, illetve azt a három triviális egyenletet, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Innentől az előző egyenlethez hasonlóan könnyen levezethető a bizonyítás.

Megjegyzés Itt felhasználásra fog kerülni a determináns fogalma, illetve számítási módja, amelynek pontos definiálása és ismertetése a 6. fejezetben található.

Tétel Adott a tér egy ortonormált, jobbrendszerű bázisa, és az $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$ vektorok az erre a bázisra vonatkozó koordinátaikkal.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$$

Ekkor az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat a következőképpen kiszámítható.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Tétel Adott a tér egy ortonormált, jobbrészes bázisa, és az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ illetve $\mathbf{c}$ vektorok az erre a bázisra vonatkozó koordinátaikkal.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T$$

Ekkor az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ vegyes szorzat a következőképpen kiszámítható.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bizonyítás Felhasználjuk a skaláris és vektoriális szorzatok kiszámításához kapcsolódó tételket.

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1 \cdot \mathbf{i} + c_2 \cdot \mathbf{j} + c_3 \cdot \mathbf{k}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} \right) \cdot (c_1 \cdot \mathbf{i} + c_2 \cdot \mathbf{j} + c_3 \cdot \mathbf{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 \end{aligned}$$

Amennyiben az utolsó kifejezést egy determináns elsősor szerinti kifejtésének tekintjük, akkor felírhatjuk az alábbi kifejezést.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

A tételt tehát bebizonyítottuk

Tétel Adottak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok. Az $\mathbf{a}$ vektor felírható a $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos $\mathbf{a}_b$ és a $\mathbf{b}$ vektorra merőleges $\mathbf{a}_m$ vektorok összegeként.

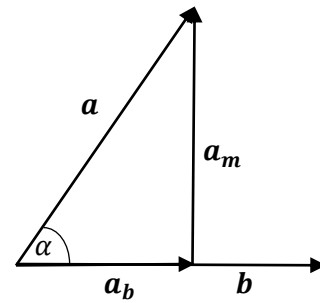
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_m$$

Ezen $\mathbf{a}_b$ és $\mathbf{a}_m$ vektorokat az $\mathbf{a}$ vektor párhuzamos és merőleges összetevőinek nevezzük.

$$\mathbf{a}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \cdot \mathbf{e}_b, \text{ és } \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_b$$

Bizonyítás Ahogy már korábban a skalárszorzat speciális eseteinél vettük, az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b = |\mathbf{a}| \cos \alpha$, amiről pedig kimondtuk, hogy nem más, mint az $\mathbf{a}$ vektor merőleges vetülete $\mathbf{b}$ irányában.

Az ábrán látható derékszögű háromszögben az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b = |\mathbf{a}_b|$. Ezt az $\mathbf{a}_b$ vektort a skaláris szorzatról tanultak szerint megkapjuk az $\mathbf{a}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \cdot \mathbf{e}_b$ képlet szerint. Az $\mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_b$ összefüggés ezekből már triviálisan következik.



A sík normál vektora és egyenlete

Definíció Ha az $\mathbf{n}$ vektor merőleges az S síkra, akkor az $\mathbf{n}$ vektort az S sík normálvektorának nevezzük.

Tétel Ha az S sík egy normálvektora $\mathbf{n}$, egy adott pontja pedig P_0 , az ebbe a pontba mutató $\mathbf{p}_0$, egy tetszőleges pontja P , s a P pontba mutató helyvektor pedig $\mathbf{p}$, akkor a sík egyenlete felírható az alábbi módon.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$$

Bizonyítás Ha $\mathbf{n}$ merőleges a síkra, merőleges annak az összes vektorára is, így a $\overrightarrow{P_0P}$ vektorra is. Mivel a két vektor merőleges egymásra, ezért skaláris szorzatuk nulla.

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Mivel a $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$, ezért $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$. A képletet gyakran $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0$ formában alkalmazzuk.

4. ALGEBRAI STRUKTÚRÁK, RELÁCIÓK

Az alap struktúrák

Definíció Egy G nem üres halmazt **csoportnak** nevezünk, ha értelmezve van G -n egy $\oplus$ művelet, amelyre

1. zárt: $\forall a, b \in G$ -re $a \oplus b \in G$
2. asszociatív: $\forall a, b, c \in G$ -re $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
3. létezik egységelem (*nullelem*): $\exists n \in G$, melyre $\forall a \in G$ esetén $a \oplus n = a$
4. létezik inverz elem: $\forall a \in G$ -hez $\exists a^{-1} \in G$, melyre $a \oplus a^{-1} = n$

Definíció Ha a G nem üres halmaz csoport, továbbá teljesül rá az alábbi tulajdonság **Abel-csoportnak**, vagy másnéven kommutatív csoportnak nevezzük.

5. kommutatív: $\forall a, b \in G$ -re $a \oplus b = b \oplus a$

Tétel Ha G csoport, akkor $\forall x, y, z \in G$ -re, ha $a \oplus x = a \oplus y$, akkor $x = y$. Hasonlóan, ha $x \oplus a = y \oplus a$, akkor $x = y$

Bizonyítás Az asszociativitás, az egységelem és az inverzelem létezését kihasználva könnyen levezethető.

$$x = n \oplus x = (a^{-1} \oplus a) \oplus x = a^{-1} \oplus (a \oplus x) = a^{-1} \oplus (a \oplus y) = (a^{-1} \oplus a) \oplus y = y$$

Tétel Ha G csoport, akkor $\forall a, x, y \in G$ -re, ha $a \oplus x = b$, akkor $x = a^{-1} \oplus b$. Hasonlóan, ha $x \oplus a = b$, akkor $x = b \oplus a^{-1}$.

Bizonyítás Az asszociativitás, az egységelem és az inverzelem létezését kihasználva könnyen levezethető.

$$x = n \oplus x = (a^{-1} \oplus a) \oplus x = a^{-1} \oplus (a \oplus x) = a^{-1} \oplus b$$

Definíció Egy G nem üres halmazt **félcsoportnak** nevezünk, ha értelmezve van G -n egy $\oplus$ művelet, amely asszociatív, tehát $\forall a, b, c \in G$ -re $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

Definíció Egy R nem üres halmazt **gyűrű** nevezünk, ha értelmezve van R -n egy $\oplus$ additív művelet, amelyre R Abel-csoport, illetve egy $\otimes$ multiplikatív művelet, amely

6. zárt: $\forall a, b \in R$ -re $a \otimes b \in R$
7. asszociatív: $\forall a, b, c \in R$ -re $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
8. disztributív: $\forall a, b, c \in R$ -re $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$, illetve $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$.

Definíció Ha egy R nem üres halmaz gyűrű, továbbá az $\otimes$ multiplikatív műveletére nézve létezik egységelem, tehát

9. $\exists e \in R$, melyre $\forall a \in R$ esetén $a \otimes e = a$,

akkor R -t **egységelemes gyűrűnek** nevezzük.

Definíció Ha T egységelemes gyűrű, továbbá létezik a $\otimes$ multiplikatív műveletére nézve inverz elem, tehát

10. $\forall a \in T$ -hez $\exists a^{-1} \in T$, melyre $a \otimes a^{-1} = e$,

akkor **ferdetestnek** nevezzük.

Definíció Ha T ferdetest, továbbá a $\otimes$ multiplikatív műveletére nézve kommutatív, tehát

11. $\forall a, b \in T$ -re $a \otimes b = b \otimes a$

akkor **testnek** nevezzük.

A vektortér axiómák

Definíció A V nem üres halmazt **vektortérnek** nevezzük a T test felett, ha

- V halmazon értelmezve van egy összeadás művelet, ami bármely $u, v \in V$ elemhez hozzárendel egy másik V -beli elemet, amelyet $u + v$ -vel jelölünk,
- a T test és a V halmaz között értelmezve van a skalárral való szorzás művelete, ami bármely $\lambda \in T$ skálárhoz és bármely $v \in V$ vektorhoz egyértelműen hozzárendelünk egy V -beli elemet, amelyet $\lambda \cdot v$ -vel jelölünk,

továbbá a műveletekre, az alábbi ún. vektortér-axiómák teljesülnek:

- Az összeadás műveletre:
 1. asszociativitás: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ estén $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
 2. létezik egységelem: $\exists \mathbf{n} \in V$, melyre $\forall \mathbf{v} \in V$ esetén $\mathbf{v} + \mathbf{n} = \mathbf{v}$
 3. létezik inverzelem: $\forall \mathbf{v} \in V$ esetén $\exists \mathbf{v}^{-1} \in V$, melyre $\mathbf{v} + \mathbf{v}^{-1} = \mathbf{n}$
 4. kommutatív: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ esetén $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- A skalárral való szorzás műveletére:
 5. disztributivitás: $\forall \lambda \in T$, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ esetén $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\lambda \cdot \mathbf{u}) + (\lambda \cdot \mathbf{v})$
 6. disztributivitás (2): $\forall \lambda, \mu \in T$ és $\mathbf{v} \in V$ esetén $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = (\lambda \cdot \mathbf{v}) + (\mu \cdot \mathbf{v})$
 7. vegyes asszociatív: $\forall \lambda, \mu \in T$ és $\mathbf{v} \in V$ esetén $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{v}$
 8. létezik egységelem: $\forall \mathbf{v} \in V$ -re teljesül, hogy $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, ahol az 1 a T test egységeleme (tehát $\forall \lambda \in T$ -re $1 \cdot \lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda$).

5. VEKTORTEREK

A vektortér axiómák az előző fejezetben bemutatásra kerültek.

Altér, altér elégséges feltétele

Definíció Legyen V vektortér T test felett, és egy $W \subseteq V$ halmaz szintén vektortér T felett, akkor W -t V **alterének** nevezzük.

Tétel Legyen V vektortér valamely T test felett, és $W \subseteq V$. W akkor és csak akkor altere V -nek, ha $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ -re és $\lambda \in T$ -re teljesül, hogy $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$, és $\lambda \cdot \mathbf{w}_1 \in W$, tehát az összeadásra, és a skalárral való szorzás műveletre nézve is zárt.

Bizonyítás Először lássuk be, hogy amennyiben W altér, akkor $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ -re és $\lambda \in T$ -re teljesül, hogy $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$, és $\lambda \cdot \mathbf{w}_1 \in W$. Ez a vektortér axiómákból következik.

Másodszor igazoljuk, hogy amennyiben $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ -re és $\lambda \in T$ -re teljesül, hogy $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$, és $\lambda \cdot \mathbf{w}_1 \in W$, akkor W altér. Ahhoz, hogy W altér legyen, az összes vektortér axiómának teljesülnie kell. Az összeadásra vonatkozó kommutativitás, asszociativitás, valamint a vegyes asszociatív és disztributív szabályok automatikusan teljesülnek, hiszen ha nem így lenne, maga V sem lenne vektortér. Hasonlóképpen a skalárral való szorzás egységeleme is teljesül.

A fennmaradó két axióma közül az egyik az összesadás egységelemének W -beli létezése, a másik pedig az erre vonatkozó inverz megléte. Ha vesszük az 1 és -1 skalárokat, akkor a második feltétel szerint $1 \cdot \mathbf{v} \in W$ és hasonlóan $-1 \cdot \mathbf{v} \in W$. Ebből rögtön látható, hogy $\mathbf{v}$ összeadásra vonatkozó inverze létezik W -ben.

Az első feltétel szerint $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$, tehát a $(1 \cdot \mathbf{v}) + (-1 \cdot \mathbf{v}) \in W$. Ebből következik, hogy létezik egységelem.

A fentiekből következik, hogy az állítás oda-vissza igaz.

Vektorterekkel kapcsolatos tételek

Tétel Legyen V vektortér valamely T test felett. Bármely $\lambda \in T$ -re $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ a V halmaznak az összeadásra vonatkozó egységeleme.

Bizonyítás A vektorok az összeadás műveletre csoportot alkotnak, ezért létezik egység.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{0} \\ \lambda \cdot \mathbf{v} &= \lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{0}) \\ \lambda \cdot \mathbf{v} &= \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{0} \\ \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{v}^{-1} &= \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{v}^{-1} \\ \mathbf{0} &= \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{v}^{-1} + \lambda \cdot \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &= \lambda \cdot \mathbf{0} \end{aligned}$$

Tétel Legyen V vektortér valamely T test felett. Bármely $\mathbf{v} \in V$ -re $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ahol 0 a T test összeadásra vonatkozó egységeleme.

Bizonyítás A bizonyításhoz a T test összeadás műveletének egységelemének definícióját, majd a vektortér vegyes disztributivitásra vonatkozó axiómáit használjuk fel.

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mathbf{v} &= (\lambda + 0) \cdot \mathbf{v} \\ \lambda \cdot \mathbf{v} &= \lambda \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v} \\ \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{v}^{-1} &= \lambda \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{v}^{-1} \\ \mathbf{0} &= \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{v}^{-1} + 0 \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{0} &= 0 \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Tétel Legyen V vektortér valamely T test felett. Bármely $\mathbf{v} \in V$ -re $(-1) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^{-1}$, ahol a -1 a T test szorzásra vonatkozó egységelemének összeadáshoz tartozó inverze, a $\mathbf{v}^{-1}$ pedig a vektortérben a $\mathbf{v}$ vektor összeadásra vonatkozó inverze.

Bizonyítás A bizonyítás az előző tétel, illetve a nullelem definíciójából következik

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= 0 \cdot \mathbf{v} \\
\mathbf{0} &= ((-1) + 1) \cdot \mathbf{v} \\
\mathbf{0} &= (-1) \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{v} \\
\mathbf{0} &= (-1) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \\
\mathbf{0} + \mathbf{v}^{-1} &= ((-1) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}) + \mathbf{v}^{-1} \\
\mathbf{0} + \mathbf{v}^{-1} &= (-1) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} + \mathbf{v}^{-1}) \\
\mathbf{v}^{-1} &= (-1) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{0} \\
\mathbf{v}^{-1} &= (-1) \cdot \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Tétel Legyen V vektortér valamely T test felett. Ha egy $\lambda \in T$ -re teljesül, hogy $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor vagy $\lambda = 0$ vagy pedig $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás Ha $\lambda \neq 0$, akkor λ -nak létezik a szorzásra vonatkozó inverze a T testben. Legyen ez λ^{-1} .

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
\lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot \mathbf{v} &= \lambda^{-1} \cdot \mathbf{0} \\
1 \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{v} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Ha a $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenlőség baloldalán csak $\lambda = 0$ lehet, hiszen a nem nulla $\mathbf{v}$ vektor minden más számszorosa nem nullvektort ad.

Lineáris függetlenséggel és összefüggőséggel kapcsolatos tételek

Tétel A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha van közöttük olyan $\mathbf{v}_j$ vektor, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i$$

Bizonyítás Tekintsük a lineáris összefüggőséget jellemző lineáris kombinációt.

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i$$

Ha a vektorok összefüggők, akkor $\exists \lambda_j \neq 0$. A hozzá tartozó vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ez egyértelműen látszik, ha

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_j \cdot \mathbf{v}_j + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

egyenletből kivonjuk a $\lambda_j \cdot \mathbf{v}_j$ tagot.

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{0} + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n = -\lambda_j \cdot \mathbf{v}_j$$

Mivel a $\lambda_j \neq 0$, van szorzásra vonatkozó inverze $\frac{1}{\lambda_j}$. Az egyenlet $-\frac{1}{\lambda_j}$ -szorosát véve az alábbi összefüggést kapjuk.

$$\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right) \cdot \mathbf{v}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_j}\right) \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{0} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right) \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_j$$

Láthatjuk tehát, hogy amennyiben a vektorok lineárisan összefüggők van közöttük olyan $\mathbf{v}_j$ vektor, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.

Most lássuk, hogy mi a helyzet fordított esetben. Ha a $\mathbf{v}_j$ vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, az alábbi összefüggést írhatjuk fel.

$$\mathbf{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_i \cdot \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{v}_j = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \cdot \mathbf{v}_{j-1} + \alpha_{j+1} \cdot \mathbf{v}_{j+1} + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + (-1) \cdot \mathbf{v}_j + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$$

A $\mathbf{v}_j$ vektorhoz tartozó együttható -1 , tehát a nullvektor előállt a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok nem triviális lineáris kombinációjaként.

Tétel Ha a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, tetszőleges vektort hozzávéve, továbbra is lineárisan összefüggők maradnak.

Bizonyítás Tekintsük a lineáris összefüggőséget jellemző lineáris kombinációt.

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_j \cdot \mathbf{v}_j + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$$

Legyen mondjuk $\lambda_j \neq 0$. Vegyünk hozzá még egy $\mathbf{v}_{n+1}$ vektort úgy, hogy $\lambda_{n+1} = 0$, és az összes többi skalár ugyanaz marad.

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_j \cdot \mathbf{v}_j + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n + \lambda_{n+1} \cdot \mathbf{v}_{n+1}$$

Ebben az új lineáris kombinációban is $\lambda_j \neq 0$, hiszen így választottuk meg a lineáris kombinációt. Mivel teljesül, hogy a nullvektort előállító lineáris kombinációban egyik skalár sem nulla, ezért a vektorok lineárisan összefüggők maradnak.

Tétel Ha a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, tetszőleges vektort elhagyva a maradék vektorok függetlenek maradnak.

Bizonyítás Az előző tételt használjuk fel. Indirekt módon tegyük fel, hogy a független rendszerből már elhagytunk egy vektort, és az így kapott rendszer lineárisan összefüggő. Az előző tétel szerint, ha ehhez a rendszerhez hozzáveszünk egy vektort, a rendszer továbbra is lineárisan összefüggő marad. Tehát akkor az eredeti is lineárisan összefüggő lenne, ami ellentmondás.

Tétel Ha a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, és egy $\mathbf{v}_{n+1}$ vektort hozzávételével lineárisan összefüggővé válnak, akkor ez a $\mathbf{v}_{n+1}$ vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás Az alábbi lineáris kombinációban van egy olyan λ_i együttható, amely nem nulla.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Azt már láttuk, hogy azok a vektorok, melyekhez tartozó skalár együttható a lineáris kombinációban nem nulla, előállíthatók a többi vektor lineáris kombinációjaként. Eszerint csak azt kell bizonyítanunk, hogy a $\lambda_{n+1} \neq 0$.

Ha a $\lambda_{n+1} = 0$ és az $i \leq n$ lenne, akkor az alábbi egyenlet teljesülne.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i + 0 \cdot \mathbf{v}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Valamelyik λ_i együtthatóról azonban tudjuk, hogy nem nulla, ez viszont azt jelentené, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők voltak, tehát $\lambda_{n+1} \neq 0$.

Tétel A $\mathbf{v}$ vektor alábbi előállítása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$$

Bizonyítás Először bizonyítsuk, hogy ha a felírás egyértelmű, akkor a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárisan független rendszer.

Ezt indirekt módon láthatjuk be. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők. Ekkor a definíció közvetlen következménye, hogy $\exists \mathbf{v}_j$ vektor, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i$$

Helyettesítsük be ezt a vektort a $\mathbf{v}$ vektor előállításra vonatkozó egyenletbe.

$$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot v_k = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_j \cdot \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \cdot v_i \right) + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

$$v = (\alpha_1 + \alpha_j \lambda_1) \cdot v_1 + (\alpha_2 + \alpha_j \lambda_2) \cdot v_2 + \dots + (\alpha_n + \alpha_n \lambda_n) \cdot v_n$$

Amelyben természetesen immár a v_j -s tag nem szerepel, tehát pontosabb felírás alább látható.

$$v = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\alpha_i + \alpha_j \cdot \lambda_i) \cdot v_i$$

Az első és a második lineáris kombináció együtthatói különböznek, tehát ellentmondásra jutottunk. A lineáris kombináció nem lenne egyértelmű.

Második lépésben azt bizonyítjuk, hogy ha a vektorok függetlenek, akkor a

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$$

lineáris kombináció előállítása egyértelmű.

Ezt az állítást is indirekt módon bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy a v vektornak két előállítása van.

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$$

$$v = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot v_i$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet.

$$v - v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i - \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot v_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \cdot v_i$$

Mivel a vektorok lineárisan függetlenek, ezért csak a triviális lineáris kombináció állíthatja elő a nullvektort, tehát $\forall \alpha_i - \beta_i = 0$, amiből viszont következik, hogy minden α_i -re és β_i -re $\alpha_i = \beta_i$. Tehát a két lineáris kombináció megegyezik, ami ellentmondás.

Bázisok, generátorrendszerek és dimenzió

Definíció Azok a vektorok, melyek lineáris kombinációjaként a vektortér minden eleme előáll **generátorrendszert** alkotnak.

Definíció A $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok által **generált altér**, amelyet $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ -vel jelölünk, ezen vektorok minden lehetséges lineáris kombinációját jelenti.

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \{v \in V \mid v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n, \alpha_j \in T\}$$

A bázis definíciója a Vektoralgebra fejezetben tisztázásra került.

Definíció A V vektortérbeli $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorok a V bázisát alkotják, ha

- $\forall V$ -beli vektor előáll a lineáris kombinációjuként, továbbá
- $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Definíció A V vektortér egy bázisa a $[b] = b_1, b_2, \dots, b_n$ A $v \in V$ vektor e bázisokkal való felírásában a

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

lineáris kombinációban szereplő $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ együtthatókat a $\mathbf{v}$ vektor $[b]$ bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük.

Definíció A V vektortér egy bázisa a $[b] = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$. A $\mathbf{v} \in V$ vektor e bázisokkal való felírásában a

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{v}_n$$

lineáris kombinációban szereplő $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ együttható skalárokból álló megfelelő mátrixot a $\mathbf{v}$ vektor **koordináta mátrixának** nevezzük.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{[b]}$$

Definíció A V vektortér **dimenzióján** bármelyik bázisának elemszámát értjük, és $\dim(V)$ -vel jelöljük.

Tétel (*Kicserélési tétel*) Az $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ független vektorokból álló rendszer bármely $\mathbf{f}_i$ tagjához található egy olyan $\mathbf{g}_k$ vektor a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_j$ generátorrendszerből, amellyel az $\mathbf{f}_i$ -t kicserélve az $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{i-1}, \mathbf{g}_k, \mathbf{f}_{i+1}, \dots, \mathbf{f}_n$ vektorokból álló rendszer független.

Bizonyítás A tételt indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy például az $\mathbf{f}_1$ vektorhoz nem lenne egyik $\mathbf{g}_i$ vektor sem jó, tehát az $\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ vektorok lineárisan összefüggők. Az $\mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ rendszer lineárisan független, hiszen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ az állítás szerint független rendszert alkot, amelyből egy vektort elvéve a rendszer továbbra is független marad. Azonban az indirekt feltevésünk szerint a $\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ vektorok lineárisan összefüggők. Mivel a $\mathbf{g}_1$ vektor hozzávételével a rendszer összefüggővé vált, tudhatjuk, hogy kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{g}_1 = \sum_{k=2}^n \gamma_{1k} \cdot \mathbf{f}_k$$

Mivel a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_j$ vektorok generátorrendszert alkotnak, ezért a vektortér minden vektora, így $\mathbf{f}_1$ is felírható lineáris kombinációjuként.

$$\mathbf{f}_1 = \sum_{k=1}^j \phi_{1k} \cdot \mathbf{g}_k = \sum_{k=1}^j \phi_{1k} \cdot \left(\sum_{l=2}^n \gamma_{kl} \cdot \mathbf{f}_l \right)$$

Tehát az $\mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ vektorok lineáris kombinációja előállítja az $\mathbf{f}_1$ vektort. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ vektorok lineárisan összefüggők lennének, azonban ez ellentmondás.

Köv. A generátorrendszerben lévő vektorok száma legalább annyi, mint bármely független rendszer elemszáma.

Bizonyítás A független rendszer vektorait különböző generátorrendszerbeli vektorokra lehet csak kicserélni, különben összefüggő rendszert kapunk. Ezért legalább annyi vektort tartalmaz, mint bármely független rendszer.

Tétel Bármely vektortérben a bázisok elemszáma egyenlő.

Bizonyítás Legyen a vektortér két bázisa $[b]$ és $[c]$, melyek rendre n_b és n_c darab vektort tartalmaznak. Tekintsük a $[b]$ bázis vektorait lineárisan függetlennek, míg $[c]$ -t generátor rendszernek. Ebből következik, hogy $n_b \leq n_c$. Ha a két bázis szerepét megcseréljük, abból pedig az $n_c \leq n_b$ összefüggésre jutunk. Ebből következik, hogy $n_b = n_c$.

Tétel Legyen V vektor nem nulla vektortér, az n pedig egy pozitív egész. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

- $\dim(V) = n$
- V -ben található n darab lineárisan független vektor, de bármely $n + 1$ lineárisan összefügg.

- V -ben található n elemű generátorrendszer, de $n - 1$ elemű nem.

Bizonyítás Ha $\dim(V) = n$, akkor bármely bázis n vektort tartalmaz. Mivel a bázisvektorok lineárisan függetlenek, így biztosan van n darab lineárisan független vektor. Ezek után már csak azt kell bizonyítani, hogy $n + 1$ darab vektor mindig összefüggő. Tekintsük az $n + 1$ db $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ vektort és egy tetszőleges, de rögzített bázist. Ekkor $\forall j$ -re egyértelmű az alábbi állítás.

$$\mathbf{v}_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \cdot \mathbf{b}_k$$

Ekkor tekintünk egy tetszőleges $\mathbf{u}$ vektort, mely előáll a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot \mathbf{v}_i = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$$

Helyettesítsük be a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ vektorok helyére a fentebbi képletet.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha_1 \cdot \sum_{k=1}^n \gamma_{1k} \cdot \mathbf{b}_k + \alpha_2 \cdot \sum_{k=1}^n \gamma_{2k} \cdot \mathbf{b}_k + \dots + \alpha_n \cdot \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} \cdot \mathbf{b}_k \\ \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{i1} \cdot \alpha_i \cdot \mathbf{b}_1 + \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{i2} \cdot \alpha_i \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{in} \cdot \alpha_i \cdot \mathbf{b}_n \end{aligned}$$

Továbbá tudjuk, hogy $\mathbf{u}$ -nak elő kell állnia a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \mathbf{b}_i$$

A két egyenletet kivonva egymásból:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \mathbf{b}_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{i1} \cdot \alpha_i \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{in} \cdot \alpha_i \cdot \mathbf{b}_n \right) \\ \mathbf{0} &= \left(\beta_1 - \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{i1} \cdot \alpha_i \right) \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + \left(\beta_n - \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{in} \cdot \alpha_i \right) \cdot \mathbf{b}_n \end{aligned}$$

Mivel a bázisvektorok függetlenek, ezért az együtthatók mindegyike nulla. Azonban a γ_{ik} együtthatók egyszerre nem lehetnek nullák, mert akkor a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ vektorok mindegyike nullvektor lenne.

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldásáért keressük. Ha ismertnek tételezzük fel a γ_{ik} és β_k együtthatókat, akkor az $n + 1$ db ismeretlen α_k meghatározásához n egyenlet áll csak rendelkezésre. Ez azt jelenti, hogy legalább egy ismeretlen szabadon választható, vagyis az $\mathbf{u}$ vektor felírása az alábbi alakban nem egyértelmű.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot \mathbf{v}_i = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$$

Ez viszont ellentmond a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ vektorok függetlenségének.

Fordítva, ha van n darab vektorból álló lineárisan független rendszer, és bármely $n + 1$ vektor összefügg, akkor tekintsük az n elemű független rendszert. Ehhez bármilyen vektort hozzávéve összefüggővé válik, ezért a hozzávett vektor kifejezhető a független vektorok lineáris kombinációjával. Ezért az n elemű független rendszer bázis, vagyis valóban n a tér dimenziója.

Az 1. és a 3. állítás ekvivalens mivoltát is az előzőhöz hasonlóan lehet bizonyítani.

- Köv.** Ha $\dim(V) = n$, akkor
- V -ben bármilyen n elemű független rendszer bázist alkot.
 - V -ben bármilyen n elemű generátorrendszer bázist alkot.
 - Egy vektortér bármely véges generátorrendszere tartalmaz bázist.
- Tétel** Ha egy V vektortérnek van véges generátorrendszere, akkor bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá.

6. DETERMINÁNSOK

Alapfogalmak

Definíció Az $n \times n$ -es A mátrix a_{ik} eleméhez tartozó **minormátrixának** nevezzük, és A_{ik} -val jelöljük azt az $(n-1)$ -ed rendű mátrixot, melyet úgy kapunk A -ból, hogy annak i . sorát és k . oszlopát elhagyjuk.

Definíció Ha az $(n-1)$ -ed rendű mátrix **determinánsát** már értelmeztük, az n -ed rendű mátrix determinánsának nevezzük a következő számot.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det(A_{1j})$$

Definíció Az a_{ij} elem **előjeles aldeterminánsán** értjük a $D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$ számot. Ezt felhasználva n -ed rendű A mátrix determinánsa felírható az alábbi módon.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot D_{1j}$$

Tétel (*Kifejtési tétel*) Egy n -ed rendű determináns tetszőleges sora vagy oszlopa szerint kifejtethető, és

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij}$$

A determináns tulajdonságai

- Ha a determináns valamely sorát λ -val szorozzuk, a determináns az eredeti λ -szorosa lesz.

Bizonyítás Fejtsük ki a determinánst azon a_k sor szerint, amelyet beszoroztunk λ -val.

$$\det(B) = \sum_{j=1}^n \lambda \cdot a_{ij} \cdot D_{ij} = \lambda \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} = \lambda \cdot \det(A)$$

- Ha a determináns i . sorának minden eleme kéttagú összeg, akkor két olyan determináns összegére bontható, melyből az első i . sorában az összeg első tagjai, a második determináns i . sorában az összeg második tagjai szerepelnek, a többi elem változatlan.

Bizonyítás Fejtsük ki a determinánst azon sora szerint, amelyben az összeg szerepel.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (b_{ij} + c_{ij}) \cdot D_{ij} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot D_{ij} + \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot D_{ij}$$

- Ha egy determináns egy sora csupa nulla elemet tartalmaz, akkor a determináns is nulla.

Bizonyítás Fejtsük ki a determinánst azon sora szerint, amelyben a nullák szerepelnek.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n 0 \cdot D_{ij} = 0$$

- Ha egy determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke (-1) -szeresére változik

Bizonyítás Először bizonyítsuk két szomszédos sor cseréjére az állítást. Cseréljük fel a determináns i . és $(i+1)$. sorát. Az eredeti és a két sor cseréje után kapott determinánsokat jelöljük D_1 -gyel és D_2 -vel.

Az első determinánst az i . sora szerint, míg a második az $(i+1)$. sora szerint kifejtve a következő egyenleteket kapjuk.

$$D_1 = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij}$$

$$D_2 = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1) \cdot D_{ij}$$

Ebből következik, hogy $D_1 = -D_2$.

Ha két tetszőleges sort cserélünk fel, akkor van köztük valahány sor, legyen ezek száma k . Az alul lévő sort k szomszédos sor cseréjével tudjuk a másik sor alá vinni, ekkor szomszédosok. Ebben a pozícióban felcserélve őket, most az eredetileg felül lévő sor kerül alulra. Ezzel együtt eddig $k + 1$ szomszédos sor csere történt. Ebből a pozícióból, amikor az eredetileg felül lévő sor helyén már a másik sor áll, és alatta pedig ő maga, megint k darab szomszédos sor cserével tudjuk az eredetileg felül lévő sort az eredetileg alul lévő helyére mozgatni. összesen $k + 1 + k = 2 \cdot k + 1$ darab szomszédos csere történt, az az ennyiszor változott (-1) -szeresére a determináns értéke, tehát a $(-1)^{2 \cdot k + 1} = -1$ -szerese lett az eredetinek.

- Ha egy determináns két sora megegyezik a determináns értéke nulla.

Bizonyítás Cseréljük fel a determinánsban a két egyenlő sort. Ekkor a determináns értéke – az előző tételt szerint – (-1) -szeresére változik. Másrészt viszont nem változik, hiszen a két determináns elemei megegyeznek. Ha tehát D a determináns értéke akkor $D = -D$, amiből $D = 0$.

- Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk valamely sor λ -szorosát, a determináns értéke nem változik.

Bizonyítás Ábrázoljuk a régi és az új determinánst. Felhasználva a fentebb használt tételeket külön írhatjuk két determináns összegére az új determinánst, melynek egyike az eredeti régi determináns lesz, a másik pedig egy olyan, melynek két sora megegyezik, tehát értéke nulla. Ebből következik, hogy a régi és az új determináns értéke megegyezik.

- Egy alsó (vagy felső) háromszögdetermináns értéke a főátlóban lévő elemek szorzata.

Bizonyítás Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint, majd a keletkező $(n - 1)$ -ed rendű aldeterminánst szintén az első sora szerint, és így tovább.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

- (*Ferde kifejtés tétele*) Ha egy determináns egyik sorának elemeit rendre valamely másik sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk meg, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk az eredmény nulla lesz.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{kj} = 0, \quad i \neq k$$

Bizonyítás Ezt a tételt 3×3 -as determinánsokra bizonyítjuk. Szorozzuk meg az első sor elemit a második sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Az így kapott determináns két sora megegyezik, tehát az értéke nulla.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Az eddig felsorolt tételek mindegyike igaz oszlopokra is.

Bizonyítás A fenti bizonyításokban a sorok helyett megfelelő oszlop szerint kell kifejtteni a determinánst.

A Cramer-szabály habár nem szerepelt az előadásokon, a teljesség érdekében megemlítem, viszont a bizonyítását nem.

Tétel (Cramer-szabály) Ha az A négyzetes mátrix, és $D = \det(A) \neq 0$, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A megoldásban $x_j = \frac{D_j}{D}$, ahol a D_j determinánst úgy kapjuk, hogy D -ben a j -edik oszlop helyére a jobb oldali konstansokat azaz a b vektor komponenseit tesszük.

Mátrix adjungáltja

Definíció Az A négyzetes mátrix (klasszikus) **adjungáltján** az $\text{adj}(A) = (D_{ki})$ mátrixot értjük.

Tétel Az A $n \times n$ típusú mátrixot az adjungáltjával jobbról szorozva az eredmény $\det(A) \cdot E_n$.

Bizonyítás

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix} = C$$

Legyen a C mátrix a szorzás eredménye. A főátló beli elmeit a szorzás szabálya szerint kiszámítva az összes c_{jj} elem felírható az alábbi alakban.

$$c_{jj} = \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot D_{ji}$$

A nem a főátlóban található elemekre pedig felírhatjuk az alábbi összefüggést.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{kj} = 0$$

Az eredmény nulla lesz, hiszen az i . sor elemei rendre a k . sorhoz tartozó aldeterminánsokkal vannak szorozva: ez az összeg a ferde kifejtés tétele szerint nulla. Tehát

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) \cdot E_n$$

Tétel Ha az A $n \times n$ típusú mátrix és $\det(A) \neq 0$, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

Bizonyítás Mivel a mátrixok szorzás asszociatív, ezért a struktúrákról szóló fejezetben igazoltak szerint pontosan egy inverz létezik. Ha tehát találunk egy olyan mátrixot, melyre az $A \cdot B = E_n$, akkor ez a B mátrix nem lehet más csakis az A inverze.

Az előző tétel szerint $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot E_n$. Szorozzuk be az egyenletet $\frac{1}{\det(A)}$ -val!

$$A \cdot \text{adj}(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} = \det(A) \cdot E_n \cdot \frac{1}{\det(A)}$$

$$A \cdot \text{adj}(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} = E_n$$

Az inverz mátrix definíciója alapján ebből következik az állítás.

Definíció A nem nulla determinánsú mátrix az úgynevezett **reguláris mátrixok**. A nulla determinánsú mátrixokat **szinguláris mátrixnak** nevezzük.

Vektorok függetlenségének megállapítása

Tétel Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ n dimenziós vektortérbeli vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a vektorokból, mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem nulla.

Bizonyítás A függetlenség definíciójából kiindulva: a nullvektor csak triviálisan állítható elő az adott vektorokból.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Írjuk fel ez alapján a megfelelő egyenletrendszert.

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk a Gauss-eliminációt.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* & 0 \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{nn}^* & 0 \end{bmatrix}$$

Két esetet különböztetünk meg:

- Ha $a_{nn}^* = 0$, akkor $\det(\mathbf{A}) = 0$, hiszen az elimináció során az együttható mátrix determinánsának nulla volta nem változik meg az elemi sorműveletek alkalmazásával. Ekkor van nem triviális megoldás, tehát az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függő rendszert alkotnak.
- Ha $a_{nn}^* \neq 0$, akkor $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Ekkor $a_{nn}^* \cdot \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. De akkor a többi ismeretlen is nulla, hiszen őket mindig a rájuk következőkből kapjuk. Ekkor tehát csak a triviális megoldás létezik, ezért az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tétel Az $n \times n$ -es homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha együtthatómátrixának determinánsa nulla.

Bizonyítás Lásd: az előző bizonyítás.

7. HOMOGÉN LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

Alapfogalmak

Definíció A **lineáris leképezés** egy olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is vektortér.

Definíció Legyenek V és W vektorterek, valamint $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Azt az $L: V \rightarrow W$ függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, **homogén lineáris leképezéseknek** nevezzük.

1. Lineáris: $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$
2. Homogén: $L(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot L(\mathbf{u})$

Ha $V = W$, akkor a leképezést **lineáris transzformációnak** nevezzük.

Köv. Ha az $L: V \rightarrow W$ leképezés homogén lineáris, akkor a $\mathbf{0} \in V$ képe $\mathbf{0} \in W$.

Bizonyítás Tudjuk, hogy $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$, amiből a homogén tulajdonság miatt $L(0 \cdot \mathbf{v}) = 0 \cdot L(\mathbf{v})$. Ami $\mathbf{0} \in W$.

Tétel Az $L: V \rightarrow W$ leképezés akkor és csak akkor homogén lineáris leképezés, ha $L(\lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot L(\mathbf{u}) + \mu \cdot L(\mathbf{v})$

A homogén lineáris leképezés mátrixa

Definíció Az $L: V^n \rightarrow W^k$ lineáris leképezés mátrixa $A_{[a][b]} = [k_1 | k_2 | \dots | k_n]$, ahol a $k_i := L(\mathbf{a}_i)$. Azaz az A mátrix oszlopai a V^n -beli $[a]$ bázis $\mathbf{a}_i$ bázisvektorainak képei, a W^k -beli $[b]$ bázisra vonatkozó képei.

Tétel Legyen $L: V^n \rightarrow W^k$ a lineáris leképezés, az A mátrix leképezés mátrixa, $\mathbf{x} \in V$ tetszőleges, ennek képe pedig $\mathbf{y} \in W, \mathbf{y} = L(\mathbf{x})$. Ekkor az $\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x}$.

Bizonyítás Konstruktív, a bizonyítás során meg is adjuk a kérdéses mátrixot. Legyen V^n bázisa $[a] = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, W^k bázisa pedig $[b] = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$. A tétel állítása szerint a kiindulási tér bázisvektorainak képét kell felírnunk.

$$L(\mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^k \beta_{ji} \cdot \mathbf{b}_j$$

Írjunk fel egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektort a kiindulási térben az $[a]$ bázisra vonatkozó koordinátákkal.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{a}_i$$

Ekkor a vektor képe:

$$L(\mathbf{x}) = L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{a}_i\right)$$

Használjuk fel a lineáris és a homogén tulajdonságokat.

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot L(\mathbf{a}_i)$$

Behelyettesítve az $L(\mathbf{a}_i)$ bázisvektorok képtérbeli előállítását:

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \cdot \sum_{j=1}^k \beta_{ji} \cdot \mathbf{b}_j \right)$$

Az egyenlet jobb oldalán található kifejtett alakot átrendezve megkapjuk az $\mathbf{x}$ vektor koordinátáit a $[b]$ bázisra vonatkozóan. (Az egyes $\mathbf{b}_j$ tagok együtthatói)

A felírásból látható lesz, hogyha a $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{in}$ skalárokat egy mátrix i . sorának tekintjük, akkor az $\mathbf{x}$ vektor képeinek a $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}$ koordináta vektorát e mátrix segítségével egyszerű szorzással kiszámíthatjuk.

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}_{[b]}$$

A fenti szorzatban az első mátrix a leképezés mátrixa, a második a vektor koordinátáit tartalmazza, míg a harmadik a vektor képeinek koordinátáit.

A tétel állításában szereplő $A_{[a][b]}$ mátrix oszlopai valóban a kiindulási V^n -beli $[a]$ bázis $\mathbf{a}_i$ bázisvektorainak képei, a W^k -beli $[b]$ bázisra vonatkozóan.

$$A_{[a][b]} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{kn} \end{bmatrix}$$

A lineáris leképezések magtere, képtere

Definíció Legyen az $L: V \rightarrow W$ egy lineáris leképezés. Azon vektorok összességét V -ben, amelyek képe nullvektor a leképezés **magterének** nevezzük és $\text{Ker}(L)$ -lél jelöljük.

Definíció Legyen az $L: V \rightarrow W$ egy lineáris leképezés. Azon vektorok összességét W -ben, amelyek előállnak valamely V -beli vektor képeként, a leképezés **képterének** nevezzük és $\text{Im}(L)$ -lél jelöljük.

Lemma A V -beli nullvektor képe a W -beli nullvektor.

Tétel Legyen az $L: V \rightarrow W$ egy lineáris leképezés R felett. $\text{Ker}(L)$ altere a V -nek.

Bizonyítás Legyenek $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor a magtér vektorai, vagyis $L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. A lineáris tulajdonság miatt $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, vagyis az összegük is magtérbeli vektor.

Hasonlóan a homogén tulajdonság miatt $L(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot L(\mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, tehát a számszorosaik is magtérbeliek. Az összeadásra és a számszorosra vonatkozó zárttság biztosítja, hogy $\text{Ker}(L)$ altere a V -nek.

Tétel Legyen az $L: V \rightarrow W$ egy lineáris leképezés R felett. $\text{Im}(L)$ altere a W -nek.

Dimenzió tétel

Tétel (*Dimenzió-tétel*) Legyen az $L: V \rightarrow W$ egy lineáris leképezés. Ekkor az alábbi egyenlőség teljesül.

$$\dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Im}(L)) = \dim(V)$$

Bizonyítás Bizonyítandó, hogy a leképezés magterének és képterének dimenziójának összege éppen a kiindulási tér dimenziójával egyenlő.

Mivel $\text{Ker}(L)$ altér, így van bázisa. Legyen a bázis $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$. Egészítsük ki ezt a független rendszert úgy, hogy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ legyen V bázisa.

Azt kell bizonyítani, hogy $\mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ bázist alkotnak W -ben. Ezzel a tétel bizonyítása kész, hiszen a dimenzió a báziselemek száma, és így az $n = m + (n - m)$ képlet, ahol n a kiindulási tér, m a magtér, $(n - m)$ pedig a képtér dimenziója, éppen a tétel állítása.

Először azt látjuk be, hogy az $L(\mathbf{b}_{m+1}), \dots, L(\mathbf{b}_n)$ vektorok az $\text{Im}(L)$ -ben generátorrendszert alkotnak, majd azt, hogy függetlenek. E két tulajdonság biztosítja, hogy $L(\mathbf{b}_{m+1}), \dots, L(\mathbf{b}_n)$ az $\text{Im}(L)$ egy bázisa.

Tekintsük $\text{Im}(L)$ tetszőleges $\mathbf{y}$ vektorát. Ehhez van olyan $\mathbf{x} \in V$, melyre $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$. A V vektortér bázisával $\mathbf{x}$ vektort kifejezve és erre alkalmazva az L lineáris leképezést:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1 \cdot \mathbf{b}_1 + x_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + x_m \cdot \mathbf{b}_m + x_{m+1} \cdot \mathbf{b}_{m+1} + \dots + x_n \cdot \mathbf{b}_n \\ L(\mathbf{x}) &= L(x_1 \cdot \mathbf{b}_1 + x_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + x_m \cdot \mathbf{b}_m + x_{m+1} \cdot \mathbf{b}_{m+1} + \dots + x_n \cdot \mathbf{b}_n) = \\ &= x_1 \cdot L(\mathbf{b}_1) + x_2 \cdot L(\mathbf{b}_2) + \dots + x_m \cdot L(\mathbf{b}_m) + x_{m+1} \cdot L(\mathbf{b}_{m+1}) + \dots + x_n \cdot L(\mathbf{b}_n) \\ L(\mathbf{x}) &= 0 + 0 + \dots + 0 + x_{m+1} \cdot L(\mathbf{b}_{m+1}) + \dots + x_n \cdot L(\mathbf{b}_n)\end{aligned}$$

Vagyis valóban, $\text{Im}(L)$ vektorai felírhatók az $L(\mathbf{b}_{m+1}), \dots, L(\mathbf{b}_n)$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát ezek a vektorok generátorrendszer alkotnak.

A függetlenség bizonyításához felírjuk a definíciót:

$$\mathbf{0} = \alpha_{m+1} \cdot L(\mathbf{b}_{m+1}) + \dots + \alpha_n \cdot L(\mathbf{b}_n)$$

Mivel L lineáris leképezés, ezért

$$\mathbf{0} = L(\alpha_{m+1} \cdot \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{b}_n)$$

Eszerint az $\mathbf{x}^* = \alpha_{m+1} \cdot \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{b}_n$ vektor benne van a magtérben, így felírható a magtérbeli bázis vektorainak lineáris kombinációjával:

$$\mathbf{x}^* = \alpha_{m+1} \cdot \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{b}_n = \alpha_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_m \cdot \mathbf{b}_m$$

amiből

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_m \cdot \mathbf{b}_m - \alpha_{m+1} \cdot \mathbf{b}_{m+1} - \dots - \alpha_n \cdot \mathbf{b}_n$$

Mivel a V bázisát alkotó $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ vektorok függetlenek, ezért a $\mathbf{0}$ vektort csak úgy tudják előállítani, ha minden $\alpha_i = 0$.

Sajátérték, sajátvektor

Definíció A λ szám **sajátértéke** az L transzformációnak, ha van olyan nem nulla vektor, amelyre $L(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}$. Ezt a vektort az L transzformáció λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük.

Tétel Az L lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó összes sajátvektor és a nullvektor alteret alkotnak.

Bizonyítás Legyenek $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$ sajátvektok az L lineáris transzformáció λ sajátértékéhez. A már tanult tétel szerint, ha az összegükről, és számszorosukról be tudjuk látni, hogy szintén e sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor e vektorok összessége alteret alkot.

$$L(\mathbf{s}_1) = \lambda \cdot \mathbf{s}_1, \quad L(\mathbf{s}_2) = \lambda \cdot \mathbf{s}_2$$

Összegük sajátvektor, ugyanis $L(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = L(\mathbf{s}_1) + L(\mathbf{s}_2) = \lambda \cdot \mathbf{s}_1 + \lambda \cdot \mathbf{s}_2 = \lambda \cdot (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)$

A számszoros is sajátvektor, ugyanis $L(\mu \cdot \mathbf{s}_1) = \mu \cdot L(\mathbf{s}_1) = \mu \cdot \lambda \cdot \mathbf{s}_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{s}_1)$

Tétel Legyen $L: R^n \rightarrow R^n$ és $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{[b]}$, ahol az $\mathbf{A}$ a transzformáció egy mátrixa, az $\mathbf{x}_{[b]}$ pedig az $\mathbf{x}$ vektor koordináta mátrixa, mindkettő valamely $[b]$ bázisra vonatkozóan. Ekkor az L transzformáció sajátértékei a $\det(\lambda \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$, karakterisztikus egyenlet megoldásai. A $p(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A})$ polinom a λ -ban n -ed fokú, ez az ún. karakterisztikus polinom, melynek gyökei a sajátértékek. A sajátvektorok pedig e sajátértékek ismeretében a $(\lambda \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}$ homogén lineáris egyenletből kaphatók.

Bizonyítás Rendezve a mátrix egyenletet, az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - (\lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ennek pontosan akkor lesz a triviálistól különböző megoldása, ha $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$. Ebből az egyenletből a λ értékek kiszámolhatók. Visszahelyettesítéssel kapjuk a keresett sajátvektorokat.

Tétel Tegyük fel, hogy egy $V^n \rightarrow V^n$ homogén lineáris transzformáció (különböző sajátértékekhez tartozó) sajátvektorai bázist alkotnak. Ekkor a transzformáció mátrixa e bázisra vonatkozóan diagonális és a főátlóban rendre a megfelelő sajátértékek állnak.

Bizonyítás A transzformáció mátrixának oszlopvektorai a bázisvektorok képei. Sajátvektor képe önmaga sajátértékszerese. Pl. az i -edik sajátvektor ($\mathbf{s}_i$) mátrixos alakja a sajátértékek bázisában egy olyan oszlopvektor, amelynek i -edik koordinátája λ_i , összes többi koordinátája pedig nulla:

$$\mathcal{L}(\mathbf{s}_i) = \lambda_i \cdot \mathbf{s}_i = 0 \cdot \mathbf{s}_1 + 0 \cdot \mathbf{s}_2 + \dots + \lambda_i \cdot \mathbf{s}_i + \dots + 0 \cdot \mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[s]}$$

Ezek az oszlopvektorok alkotják a leképezés mátrixát, innen már látható, hogy a mátrix valóban diagonális lesz.

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}_{[s]}$$

Tétel Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás *A bizonyítás csak a jeles osztályzathoz szükséges, hossza miatt nem tárgyalom. A hivatalos jegyzet 144. oldalán található.*

Izomorfia

Definíció A kölcsönösen egyértelmű $L: V \rightarrow W$ lineáris leképezéseket **izomorf** leképezéseknek nevezzük. Az izomorf vektortereket (*melyek között fennáll az izomorfizmus*) a következőképpen jelöljük: $V \cong W$.

Tétel Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk egyenlő.

Bizonyítás Ha a két vektortér dimenziója egyenlő, akkor bármely két bázisának elemszáma egyenlő. Legyen a V vektortér egy bázisa $[a]$ a W vektortérnek pedig $[b]$. A V -beli $\mathbf{x}$ vektort az $[a]$ bázisra vonatkozó koordináta mátrixával reprezentáljuk. Rendeljük hozzá a W -ben azt az $\mathbf{y}$ vektort, aminek a $[b]$ -re vonatkoztatva ugyanaz a koordináta mátrixa.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{[a]} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{[b]} = \mathbf{y}$$

Nyilvánvaló, hogy az így adott leképezés egy egyértelmű lineáris leképezés.

Legyen két vektortér izomorf. Egyik tér egy bázisának képvektorai a művelettartás miatt a második vektortérben is bázist alkotnak, tehát a dimenziójuk egyenlő.

8. BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ

Az áttérési mátrix

Tétel Legyen $V \neq \{0\}$ n dimenziós vektortér, valamint $[e]$ és $[u]$ két bázis V -ben. Ha a V vektortér x vektorának koordináta mátrixa

$$x_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]}$$

az $[e]$ bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon x vektor $[u]$ bázisra vonatkozó koordinátái az alábbi képletből kiszámolhatók:

$$x_{[u]} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]} = U^{-1} \cdot x_{[e]}$$

Ahol az U mátrix oszlopai az $[u]$ bázis vektorainak az $[e]$ bázisra vonatkozó koordináta mátrixai. Az U mátrixot **áttérési mátrixnak** nevezzük.

Bizonyítás Az x vektor $[e]$ szerinti eredeti koordináta mátrixa

$$x_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]}$$

és ugyanezen x vektor $[u]$ szerinti koordináta mátrixa

$$x_{[u]} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}_{[u]}$$

közötti összefüggéseket felhasználva

$$\begin{aligned} x = x_{[e]} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n = \\ &= x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[e]} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[e]} + \cdots + x_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{[e]} = E_{[e]} \cdot x_{[e]} \\ x = x_{[u]} &= x_1' \cdot u_1 + x_2' \cdot u_2 + \cdots + x_n' \cdot u_n = \\ &= x_1' \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}_{[e]} + x_2' \cdot \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}_{[e]} + \cdots + x_n' \cdot \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix}_{[e]} = \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}_{[u]} = U \cdot x_{[u]} \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $E_{[e]} \cdot x_{[e]} = U \cdot x_{[u]}$, ezt rendezve pedig pont a tétel állítását kaphatjuk.

Tétel (Áttérési formula) $A_{[a'] [b']} = T^{-1} \cdot A_{[a] [b]} \cdot S$, ahol T a képtér, S pedig a kiindulási tér áttérési mátrixa.

Bizonyítás Az $A_{[a][b]} \cdot x_{[a]} = y_{[b]}$ képletből kiindulva alkalmazzuk a bázistranszformáció képletét, vagyis az $x_{[a]}$ és az $y_{[b]}$ koordináta mátrixába behelyettesítjük a régi koordináta mátrix új bázissal és koordináta mátrix segítségével kifejezett alakját:

$$x_{[e]} = U \cdot x_{[u]}$$

$$A_{[a][b]} \cdot x_{[a]} = y_{[b]}$$

$$A_{[a][b]} \cdot (S \cdot x_{[a']}) = T \cdot y_{[b']}$$

$$T^{-1} \cdot A_{[a][b]} \cdot (S \cdot x_{[a']}) = y_{[b']}$$

Tétel Ha az $L: V^n \rightarrow W^n$ lineáris transzformáció mátrixa a rögzített $[a] \in V^n$ bázisra vonatkoztatva $A_{[a]}$, akkor ugyanezen transzformáció $A'_{[a']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ bázisra a következő képlettel számolható:

$$A_{[a']} = S^{-1} \cdot A_{[a]} \cdot S$$

Ahol S a kiindulási tér áttérési mátrixa.

Bizonyítás Az előző tételben bizonyított képletbe T helyébe is S kerül.

Diagonalizálás, hasonló mátrixok

Tétel Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, melynek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$A_{[a']} = S^{-1} \cdot A_{[a]} \cdot S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \text{ azaz}$$

$$y_{[s]} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot x_{[s]}$$

Definíció Az A mátrix **hasonló** a B mátrixhoz, ha létezik egy olyan S mátrix, amelyre

$$A = S^{-1} \cdot B \cdot S$$

Definíció Az A mátrix **diagonalizálható**, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel A hasonlóság $n \times n$ -es mátrixok körében ekvivalencia reláció.

Bizonyítás Azt kell bizonyítani, hogy a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív

- reflexivitás: $A \cong A \leftrightarrow A = E^{-1} \cdot A \cdot E$, tehát a C -nek az egység mátrixot választjuk.
- szimmetria: Ha $A \cong B$, akkor $B \cong A$. Felírva a definíciót

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

$$C \cdot A \cdot C^{-1} = C \cdot C^{-1} \cdot B \cdot C \cdot C^{-1}$$

$$C \cdot A \cdot C^{-1} = B$$

- tranzitivitás: Ha $A \cong B$, és $B \cong C$, akkor $A \cong C$.

$$A = U^{-1} \cdot B \cdot U, \quad B = V^{-1} \cdot C \cdot V$$

$$A = U^{-1} \cdot (V^{-1} \cdot C \cdot V) \cdot U$$

$$A = (V \cdot U)^{-1} \cdot C \cdot (V \cdot U)$$

Tétel Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha A hasonló B -hez $A = T^{-1} \cdot B \cdot T$, és A sajátvektora s , akkor B ugyanazon a sajátértékéhez tartozó sajátvektora $T \cdot s$.

Bizonyítás

$$A = T^{-1} \cdot B \cdot T$$

$$A \cdot s = T^{-1} \cdot B \cdot T \cdot s = \lambda \cdot s$$

$$T \cdot T^{-1} \cdot B \cdot T \cdot s = T \cdot \lambda \cdot s$$

$$B \cdot T \cdot s = \lambda \cdot (T \cdot s)$$

Tétel (*Diagonalizálhatóság elégséges feltétele*) Ha valamely A kvadrátikus mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.

Bizonyítás Különböző sajátértékek esetén a sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért bázist alkotnak.

Tétel Az A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa.

Bizonyítás

- Ha a sajátvektorok bázist alkotnak, akkor ha áttérünk a sajátvektorok bázisára, akkor a transzformáció mátrixa a sajátvektorok bázisában diagonális. (Korábban bizonyítva)
- Ha az A mátrix diagonalizálható, vagyis hasonló egy diagonális mátrixhoz, akkor azt fogjuk bizonyítani, hogy a diagonális mátrix elemei A mátrix sajátértékei, és S elemei az A sajátvektorai. Az, hogy ezen utóbbiak bázist alkotnak abból következik, hogy a mátrixunk S inverze létezik, így $\det(S) \neq 0$, vagyis a vektorok függetlenek. Mivel bármely független vektorrendszer bázis, ha elemszáma egyenlő a dimenzióval, csak azt kell bizonyítani, hogy S eloszlopai valóban sajátvektorok. Legyen $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $S = [s_1 | \dots | s_n]$, akkor a hasonlóság képletéből kiindulva:

$$D = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

$$S \cdot D = A \cdot S$$

Felírva a bal- és jobboldali mátrixszorzásokat, és a mátrixokat az oszlopvektoraikkal reprezentálva a fenti jelölésekkel az alábbiakat kapjuk:

$$[s_1 | \dots | s_n] \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = A \cdot [s_1 | \dots | s_n]$$

$$[\lambda_1 \cdot s_1 | \dots | \lambda_n \cdot s_n] = [A \cdot s_1 | \dots | A \cdot s_n]$$

A két mátrix egyenlőségéből fakadóan $A \cdot s_i = \lambda_i \cdot s_i$, tehát a diagonális mátrix elemei valóban a sajátértékek, az áttérési mátrix elemei pedig a hozzátartozó sajátvektorok. Ahhoz, hogy e sajátvektorok bázist alkossanak, elegendő, ha függetlenek, hiszen n db. vektorról van szó. A függetlenség abból következik, hogy az S^{-1} mátrix létezik, vagyis $\det(S) \neq 0$.

Tétel Ha valamely A $n \times n$ típusú mátrix sajátértékei által meghatározott alterek (az úgynevezett sajátalterek) dimenzióinak összege éppen n , akkor a mátrix diagonalizálható.

VÉGSZÓ

A vizsgával kapcsolatos általános tudnivalók megtalálhatók a http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/LA/Vizsga_info_2015_osz.docx linken.

A tantárgyi követelményrendszer megtalálható az alábbi linken.
http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/LA/2015_LA_1_kovetelmeny.docx

Sok sikert a vizsgához!

A siker érdekében itt egy kedves süni, aki erőt ad mindenkinek.



IRODALOMJEGYZÉK

2012, *Bércesné dr. Novák Ágnes* - Lineáris algebra, Az alapoktól az euklideszi terekig (Pázmány egyetem eKiadó)

2006, *Freud Róbert* - Lineáris algebra (ELTE Eötvös Kiadó)

2013, *Naszlady Márton* - http://users.itk.ppke.hu/~nasma1/jegyzetek/matszigo_2dmla_p.pdf