Lineáris Algebra I.

jegyzet  
2017

Tartalomjegyzék

[1. Lineáris (elsőfokú) egyenletrendszerek 4](#_Toc527303105)

[Alapfogalmak 4](#_Toc527303106)

[A Gauss-elimináció 4](#_Toc527303107)

[Gauss algoritmus 5](#_Toc527303108)

[2. Mátrix algebra 6](#_Toc527303109)

[Alapfogalmak 6](#_Toc527303110)

[A mátrix összeadás 6](#_Toc527303111)

[A mátrix összeadás tulajdonságai 6](#_Toc527303112)

[Speciális mátrixok 6](#_Toc527303113)

[A mátrix szorzás 7](#_Toc527303114)

[A mátrix szorzás tulajdonságai 7](#_Toc527303115)

[Az inverz mátrix 7](#_Toc527303116)

[Az inverz mátrix tulajdonságai 7](#_Toc527303117)

[A mátrix inverzének kiszámítása 8](#_Toc527303118)

[A mátrix számszorosa és transzponáltja 8](#_Toc527303119)

[A mátrix számszorosának tulajdonságai 8](#_Toc527303120)

[További speciális mátrixok 8](#_Toc527303121)

[További fontos tételek 9](#_Toc527303122)

[3. Vektoralgebra 10](#_Toc527303123)

[Alapfogalmak 10](#_Toc527303124)

[A vektorok összeadásának tulajdonságai 10](#_Toc527303125)

[A vektorok számszorosának tulajdonságai 11](#_Toc527303126)

[A skalárszorzat fogalma 11](#_Toc527303127)

[A skalárszorzat geometriai jelentése 11](#_Toc527303128)

[A skalárszorzat tulajdonságai 11](#_Toc527303129)

[A vektoriális szorzat fogalma 12](#_Toc527303130)

[A vektoriális szorzat geometriai jelentése 12](#_Toc527303131)

[A vektoriális szorzat tulajdonságai 12](#_Toc527303132)

[A vegyes szorzat fogalma 13](#_Toc527303133)

[A vegyes szorzat geometriai jelentése 13](#_Toc527303134)

[Lineáris kombinációval, bázissal kapcsolatos tételek és definíciók 13](#_Toc527303135)

[Speciális bázisok 15](#_Toc527303136)

[Bázisokkal kapcsolatos további tételek 15](#_Toc527303137)

[A sík normál vektora és egyenlete 18](#_Toc527303138)

[4. Algebrai struktúrák, relációk 19](#_Toc527303139)

[Az alap struktúrák 19](#_Toc527303140)

[A vektortér axiómák 19](#_Toc527303141)

[5. Vektorterek 21](#_Toc527303142)

[Altér, altér elégséges feltétele 21](#_Toc527303143)

[Vektorterekkel kapcsolatos tételek 21](#_Toc527303144)

[Lineáris függetlenséggel és összefüggőséggel kapcsolatos tételek 22](#_Toc527303145)

[Bázisok, generátorrendszerek és dimenzió 24](#_Toc527303146)

[6. Determinánsok 28](#_Toc527303147)

[Alapfogalmak 28](#_Toc527303148)

[A determináns tulajdonságai 28](#_Toc527303149)

[Mátrix adjungáltja 30](#_Toc527303150)

[Vektorok függetlenségének megállapítása 31](#_Toc527303151)

[7. Homogén lineáris leképezések 32](#_Toc527303152)

[Alapfogalmak 32](#_Toc527303153)

[A homogén lineáris leképezés mátrixa 32](#_Toc527303154)

[A lineáris leképezések magtere, képtere 33](#_Toc527303155)

[Dimenzió tétel 33](#_Toc527303156)

[Sajátérték, sajátvektor 34](#_Toc527303157)

[Izomorfia 35](#_Toc527303158)

[8. Bázistranszformáció 36](#_Toc527303159)

[Az áttérési mátrix 36](#_Toc527303160)

[Diagonalizálás, hasonló mátrixok 37](#_Toc527303161)

[Végszó 39](#_Toc527303162)

[Irodalomjegyzék 40](#_Toc527303163)

# Lineáris (elsőfokú) egyenletrendszerek

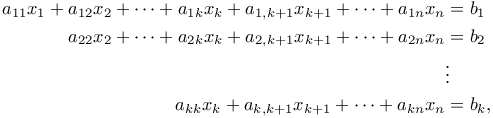
## Alapfogalmak

A lineáris algebra egyik alapvető módszere és gyakran megjelenő eszköze a lineáris (elsőfokú) egyenletrendszerek megoldására használatos Gauss-elimináció, illetve annak módosított verziója a Gauss-Jordan elimináció.

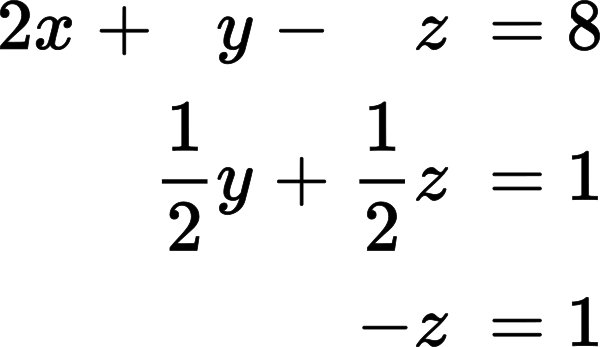
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Definíció** | A **lineáris egyenletrendszer** lineáris egyenletekből áll. Egy egyenletet lineárisnak tekintünk, ha a benne szereplő ismeretlenek legfeljebb első hatványon szerepelnek.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |

Ahol az ismeretlenek, az együtthatók, tagok pedig konstansok. Az egyenletrendszer megoldásának nevezzük azon szám n-eseket, amelyet behelyettesítve az egyenletrendszerbe az összes egyenlet kielégíthető.

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az egyenletrendszer **lépcsős alakjában** az *i.* egyenlet tartalmazza az *xi* ismeretlent, de nem tartalmazhatja az ismeretleneket. |



**Magyarázat** *A lépcsős forma előnye, hogy a megoldása szinte magától értetődő, az egyenletek egymásba való helyettesítésével könnyen megoldható lesz. A szemléltetéséhez vehetjük az alábbi egyenletet, mely egyértelműen lépcsős alakú. Ebben az esetben a z könnyen kifejezhető, melyet visszahelyettesítve a 2. egyenletbe az y is könnyen megkapható, majd az y és a z behelyettesítésével az x hasonlóképpen meghatározható.*



## A Gauss-elimináció

A **Gauss-elimináció** célja, hogy egy adott egyenletrendszerből ekvivalens átalakításokkal egy lépcsős alakú egyenletrendszert hozzon létre.

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | **Ekvivalens az egyenletrendszer átalakítása**, ha az átalakítás után keletkező egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása, mint az eredetinek. |

Ekvivalens átalakítások:

* két egyenlet felcserélése,
* adott egyenlet szorzása egy nem nulla valós számmal,
* valamely egyenlet számszorosának hozzáadása valamely más egyenlethez.

A Gauss-Jordan elimináció egy olyan megoldási módszer, melynek kiindulási egyenletrendszerén végrehajtjuk a Gauss-eliminációt, majd még egyszer kiküszöböljük a változókat, de az utolsó egyenlettől kezdve.

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Ha az egyenletrendszer együtthatóiból képzett mátrix főátlója alatt és felett is 0-k vannak, azt **redukált lépcsős alaknak** nevezzük. |

## Gauss algoritmus

1. Legyen *i = 1*.
2. Vizsgáljuk meg, hogy *aii* egyenlő e nullával. Amennyiben igen, az egyenletek cserélésével érjük el, hogy ne legyen az. Ha nem az, rátérhetünk a 3. lépésre.
3. Az *i.* ismeretlent kiküszöböljük az egyenletből úgy, hogy az *i.* egyenlet számszorosát hozzáadjuk a *k.* egyenlethez.
   1. Ha ezáltal a *k.* egyenlet többi együtthatója is, és konstans tagja is nulla az egyenletet elhagyjuk.
   2. Ha ezáltal a *k.* egyenlet együtthatói nullák, de a konstans tag nem az, ez tiltósor lesz, az egyenletnek nem lesz megoldása.
   3. Ha a fentiek közül egyik sem fordul elő, és még van *i+1.* egyenlet, akkor növeljük i értékét eggyel és elvégezzük a *2.)* és *3.)* pontokat. Ha nincsen *i+1*. egyenlet az eljárás véget ért.

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | **A lineáris egyenletrendszer homogén**, ha az egyenletrendszer minden egyenletének konstans tagja nulla. |

# Mátrix algebra

## Alapfogalmak

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Legyen (egyelőre ) egy kommutatív test, illetve és adott pozitív egészek. Ekkor a test feletti **-es mátrixon** egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek sora és oszlopa van, és amelynek elemei -ből valók. Jelölésük az alábbi módon történhet. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | **Két mátrix akkor egyenlő**, ha a megfelelő pozíciókon álló elemeik egyenlőek. |
| **Definíció** | A **művelet** a matematikában általában speciális függvényt jelent, mely esetében adott halmaz néhány eleméhez (azaz elemek rendezett véges sorozataihoz) rendelünk ugyanebbe a halmazba eső elemeket. |

## A mátrix összeadás

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Csak azonos dimenziójú mátrixok adhatók össze. Legyen és két azonos dimenziójú, -es méretű mátrix. Az + összeget úgy képezzük, hogy az azonos helyen lévő elemeket összegezzük |

## A mátrix összeadás tulajdonságai

* kommutatív
* asszociatív
* létezik egységelem *(nullmátrix)*
* létezik inverz *(„ellentett mátrix”)*

## Speciális mátrixok

|  |  |
| --- | --- |
| **Kvadratikus** | A kvadratikus mátrixokon (másnéven négyzetes mátrixokon) az típusú mátrixokat értjük. |
| **Sorvektorok** | Az típusú mátrixok. |
| **Oszlopvektorok** | Az típusú mátrixok. |
| **Szimmetrikus** | Azokat a mátrixokat nevezzük szimmetrikusnak, melyek megegyeznek transzponáltjukkal. |
| **Diagonális** | Olyan kvadratikus mátrix, melynek minden főátlón kívüli eleme nulla. |
| **Nullmátrix** | Olyan mátrix, melynek minden eleme nulla. |
| **Egység mátrix** | Olyan diagonális mátrix, melynek minden átlóeleme 1. |
|  |  |

## A mátrix szorzás

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az típusú mátrix és a típusú **mátrix szorzata** az a típusú mátrix, melynek elemeit a következőképp számoljuk ki: |

## A mátrix szorzás tulajdonságai

* nem kommutatív
* asszociatív
* az összeadásra nézve disztributív
* létezik egységelem (egységmátrix)

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Legyen típusú mátrix. Ekkor . |
| ***Bizonyítás*** | Legyen , ekkor   |  |  | | --- | --- | |  | mivel , ha és 1, ha . |   Legyen most , ekkor   |  |  | | --- | --- | |  | mivel , ha és 1, ha . |   Ezekből következik, hogy , hiszen elemenként egyenlők. |

## Az inverz mátrix

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az típusú mátrix. Azt az típusú mátrixot, amelyre egyenlőség teljesül, az  **mátrix inverzének** nevezzük. |
| **Tétel** | Ha az  mátrixnak létezik bal- és jobboldali inverze, akkor az egyértelmű. |
| ***Bizonyítás*** | Legyen baloldali inverze , jobboldali inverze . Azt kell belátunk, hogy ezek megegyeznek. A definíció szerint a két inverz elemre igazak a következő összefüggések:  Ezekből következik, hogy |

## Az inverz mátrix tulajdonságai

* Ha az mátrix invertálható, inverzének inverze önmaga.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** |  |

* Ha az és mátrixok invertálhatók, akkor szorzatuk is invertálható, és inverze a tényezők inverzeinek fordított sorrendben való szorzata.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | A bizonyításhoz egyszerűen a definíciót használhatjuk fel.  Ezzel beláttuk, hogy az inverze a , és mivel az inverz egyértelmű más inverz nem létezik. |

* Ha a mátrix invertálható (nem szinguláris), akkor a mátrix egyenletet lehet a szokásos módon rendezni.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Csak az részét bizonyítjuk, a következő belátása hasonló módon történik.  Tehát . |

## A mátrix inverzének kiszámítása

A mátrix inverzének kiszámolásához több módszert is alkalmazhatunk. Tudva azt, hogy a mátrixot az inverzével megszorozva az egységmátrixot kapjuk, felírhatjuk az alábbi egyenlőséget.

Ezt az egyenletet Gauss-Jordan eliminációval megoldva az egységmátrix helyén előáll az inverze, míg az helyén az egységmátrix jelenik meg.

A másik inverz számítási módszer az adjungált mátrix és a mátrix determinánsának használatával történik. Ekkor az mátrix inverzére vonatkozó kiszámítási képlet:

## A mátrix számszorosa és transzponáltja

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Legyen . Ekkor **transzponáltján** azt a mátrixot értjük, amelynek elemeire . Az transzponáltját -vel jelöljük. |
| **Definíció** | Legyen . Az *m x n* típusú **mátrix számszorosa** az a mátrix, melynek elemeire igaz, hogy . |

## A mátrix számszorosának tulajdonságai

* Létezik egységelem:
* :
* (1) Vegyes disztributivitás:
* (2) Vegyes disztributivitás:

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | **Polinomnak** nevezzük az formát, ahol -re. |

## További speciális mátrixok

|  |  |
| --- | --- |
| **Permutáló** | Az olyan kvadratikus mátrixot, amelynek mindegyik sorában és oszlopában pontosan egy darab egyes áll, permutáló mátrixnak nevezzük. |
| **Antiszimmetrikus** | Az mátrix antiszimmetrikus, ha , tehát . |
| **Ortogonális** | A mátrix ortogonális, ha , ahol a megfelelő típusú egységmátrix. |

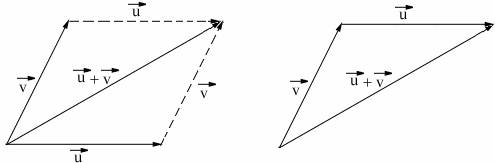
## További fontos tételek

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Minden mátrix felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként. |
| ***Bizonyítás*** | Konstruktív bizonyítási módszert alkalmazunk, vagyis meg is adjuk ezeket a mátrixokat. A mátrix összeadás tulajdonságai miatt az azonosság fennáll.  Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy az mátrix szimmetrikus, az mátrix pedig antiszimmetrikus.   * Az mátrix elemei leírhatók az összefüggésből, amiből az mátrix elemei definíció alapján, pedig az képletből következnek. A két egyenlet megegyezik az összeadás kommutativitása miatt, tehát valóban szimmetrikus. * Az előző ponthoz hasonlóan mátrix elemei leírhatók az összefüggés alapján, míg az mátrix elemei szintén definíció alapján az képletből következnek. Látható, hogy , tehát az mátrix antiszimmetrikus.   A tételt tehát bebizonyítottuk. |
| **Tétel** | A mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha . |
| ***Bizonyítás*** | Az állítás az inverz mátrix és az ortogonális mátrix definíciójából következik. |
| **Definíció** | A mátrix **idempotens**, ha . |

# Vektoralgebra

## Alapfogalmak

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az irányított szakaszokat **vektoroknak** nevezzük. |
| **Definíció** | **Két vektor akkor egyenlő**, ha hosszuk és irányuk megegyezik. |
| **Definíció** | Az és **vektorok összegét** úgy kapjuk, hogy a vektort eltoljuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy kezdőpontja az vektor végpontjához kerüljön. Az vektor kezdőpontjából a vektor végpontjába mutató vektor a két vektor összege. |

****

## A vektorok összeadásának tulajdonságai

* kommutatív
* asszociatív
* létezik egységelem

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Az összeadás definíciójából következik, hogy az egységelem kezdőpontját az vektor végpontjához kell illeszteni, és az összegvektor kezdőpontját köti össze az egységelem végpontjával. De az összeg szintén . Tehát az egységelem hossza csak nulla lehet. Mivel a nullvektor iránya tetszőleges, ezért a az vektor megegyezik a nullvektorral. |

* létezik inverz elem

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | | Az összeadás definíciója szerint az vektor végpontjához egy olyan vektort fűzünk, melynek az vektor végpontja kezdőpontja és végpontja az vektor kezdőpontja. Ekkor nullvektor lesz a két vektor összege. | | |
| **Definíció** | | Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja ugyanaz a pont, tehát nagysága nulla, **nullvektornak** nevezzük. A nullvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük. | |
| **Definíció** | | Az olyan vektort, amelynek nagysága egységnyi, azt **egységvektornak** nevezzük. | |
| **Definíció** | | Az vektor összeadásra vonatkozó inverz elemét, az vektor ellentettjének nevezzük és -val jelöljük. | |
| **Definíció** | | Legyen , tetszőleges vektor. Az vektor számszorosa az a -val jelölt vektor, amelyre   |  |  | | --- | --- | |  | * ha , -val egyirányú, hossza pedig . | |  | * ha , -val ellentétes irányú, hossza pedig. | | |
| **Lemma** | | Az és a vektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha van egy olyan valós szám, amelyikkel az egyik vektor felírható a másik számszorsaként.  , melyre | |
| ***Bizonyítás*** | | Először azt bizonyítjuk, ha a vektorok párhuzamosak, akkor van egy ilyen valós szám.   * Először tekintsük a két vektort egyirányúnak. A párhuzamos irányt megadhatjuk egy egységnyi hosszú vektorral, legyen ez . Ezzel mind az , mind a felírható.   és  Egységnyi hosszú irányú vektort kapunk, ha -t szorozzuk -vel. Ezt -be behelyettesítve . Ekkor az összefüggésben a .   * Ellentétes irányú vektorok esetén, az vektor legyen egyirányú az vektorral.   és  Ebből következik, hogy . Ekkor az összefüggésben a .  Másodszor azt tekintjük, hogy . Ekkor a definícióból automatikusan következik, hogy . | | |

## A vektorok számszorosának tulajdonságai

* vegyes asszociatív szabály:
* (1) vegyes disztributív szabály:
* (2) vegyes disztributív szabály:

## A skalárszorzat fogalma

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az és vektorok skaláris szorzatán azt az -vel jelölt számot értjük, melyre , ahol az a két vektor által bezárt szög. |

## A skalárszorzat geometriai jelentése

Mivel az vektornak-re eső merőleges vetülete, a skalárszorzatot geometriailag úgy lehet értelmezni, mint -nak irányába eső komponensének és -nek a szorzatát.

Abban a speciális esetben, mikor a vektor egységvektor, akkor a skaláris szorzat megadja az vektor vektor egyenesére eső merőleges vetületének hosszát.

## A skalárszorzat tulajdonságai

* pozitív definit: ,
* szimmetrikus:
* homogén:
* lineáris:

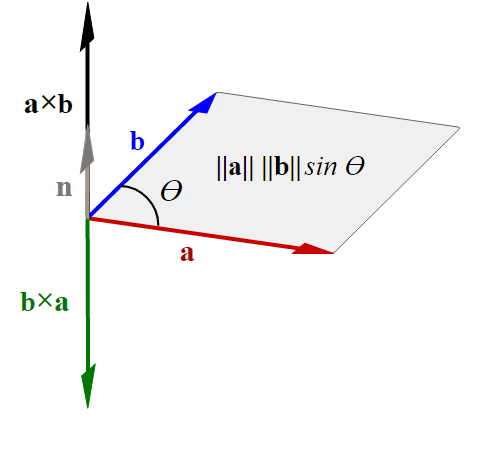
|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Két vektor akkor és csak akkor merőleges, ha a skaláris szorzatuk nulla. |
| ***Bizonyítás*** | A bizonyítás két részből áll, melyekből először azt bizonyítjuk, hogy amennyiben , akkor .   * Ha és , akkor csak úgy teljesülhet, ha , tehát vagy . Mivel megállapodás szerint ilyenkor a kisebb szöget tekintjük, a két vektor merőleges egymásra. * Ha valamelyik vektor nullvektor, akkor a skaláris szorzat is nulla. Mivel a nullvektor iránya tetszőleges, így a merőlegesség teljesül   A bizonyítás második felében azt bizonyítjuk, hogy ha , tehát akkor . Ez triviális, hiszen definíció alapján a skaláris szorzat nulla lesz, mivel esetén . |

## A vektoriális szorzat fogalma

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Definíció** | | Az , és vektorok **jobbrendszert** alkotnak, ha közös kezdőpontból ábrázolva őket, az vektor irányávól nézve az vektort π-nél kisebb szögű pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányú forgatás | |
| **Definíció** | Az és vektorok **vektoriális szorzatán** azt az -vel jelölt vektort értjük, amelyre   * **=**, ahol α az és vektorok által bezárt szög. * Az vektor iránya az és vektorra is merőleges, és velük jobbrendszert alkot. | |

## A vektoriális szorzat geometriai jelentése

Az ábrán látható paralelogramma vektor végpontjából a vektor végpontjába mutató átlójának behúzásával két egybevágó háromszögre bontható, melyek területe a háromszög szinuszos terület képlete alapján.

Látható, hogy mivel egy ilyen háromszög területe a paralelogramma félterületét adja meg, a paralelogramma területe lesz. Ez pontosan a az -vel egyezik meg. A vektoriális szorzat számértéke tehát megadja a két vektor által kifeszített paralelogramma területét.

## A vektoriális szorzat tulajdonságai

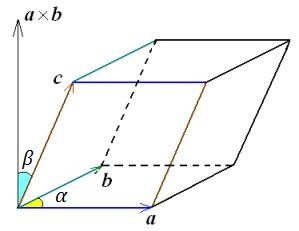
* antikommutatív:
* nem asszociatív:
* (1) vegyes disztributivitás:
* (2) vegyes disztributivitás: **a**

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Két vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk nullvektor. |
| ***Bizonyítás*** | A bizonyítást két irányból tekintjük. Először azt bizonyítsuk, hogy amennyiben , akkor . Ez triviálisan következik a definícióból, hiszen az, hogy azt jelenti, hogy és vektor vagy -ot, vagy fokot zár be, tehát mindenképp nulla. Így az nullvektort fog adni.  A második részben azt bizonyítjuk, hogy amennyiben , abból következik, hogy . A vektoriális szorzat csak akkor lehet nulla, ha vagy legalább az egyik vektor nullvektor, vagy .   * Ha , abból következik, hogy vagy . Tehát a két vektor párhuzamos. * Amennyiben legalább az egyik vektor nullvektor az eredmény is nullvektor lesz, s mivel a nullvektor iránya tetszőleges így a párhuzamosság fennáll. |

## A vegyes szorzat fogalma

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az számot az , és vektorok vegyes szorzatának nevezzük. |

## A vegyes szorzat geometriai jelentése

Tekintsük az , és vektorok által kifeszített paralelepipedont. A test alapja az és vektorok által kifeszített paralelogramma. Az vektor legyen az -vel párhuzamos egységvektor tehát merőleges az és vektorok síkjára.

alapterület magasság = előjeles térfogat

Az az az és vektorok által kifeszített paralelogramma előjeles területét adja meg, míg az vektorok skaláris szorzata a vektor vektor irányába eső merőleges vetületének a hosszát, ami pont a paralelepipedon magassága. Így a kettő skalár szorzata megadja a paralelepipedon előjeles térfogatát.

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Az , és vektorok geometriai jelentése a vektorok általmeghatározott paralelepipedon előjeles térfogata. |

## Lineáris kombinációval, bázissal kapcsolatos tételek és definíciók

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | *(Síkbeli felbontási tétel)* Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor, az és a , akkor minden más , azonos síkbeli vektor felbontható az és a vektor párhuzamos összetevőire, melyek összege megadja a vektort.  , ahol és  Tehát bármely síkbeli vektor egyértelműen felírható két vele egysíkban lévő, nem párhuzamos vektor lineáris kombinációjaként. |
| ***Bizonyítás*** | A vektor kezdőpontján át -val, míg végpontján át -vel húzunk párhuzamos egyeneseket. Mivel a tétel szerint és nem párhuzamos vektorok, ezért az M pontban metszik egymást.  Mivel , amelyre és hasonlóan , amelyre . Ezekből következik, hogy mivel , ezért , ahol és .  A felbontás egyértelműségét indirekten bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a vektornak két ilyen felbontása van.  Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat és alkalmazzuk a disztributív szabályokat azt kapjuk, hogy . Két vektor összege csak akkor lehet nullvektor, ha párhuzamosak, egyenlőhosszúak és ellentétes irányúak. Mivel , így számszorosaik sem lehetnek párhuzamosak, így ezek összege semmiképp nem adhat nullvektort. Ebből arra következtethetünk, hogy az és vektorok együtthatóinak kell nullának lennie, tehát és , melyből következik, hogy , illetve , tehát a felbontás egyértelmű. |
| **Definíció** | Legyen és , ahol test (egyelőre ), pedig egy feletti k dimenziós vektortér. elemei vektorok, míg elemei skalárok. Ekkor a vektort a vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük. |
| **Definíció** | A vektorok **lineárisan függetlenek**, ha  csak úgy lehetséges, hogy . |
| **Definíció** | A vektorok **lineárisan összefüggőek**, ha  lineáris kombinációban van olyan melyre . |
| **Definíció** | **Bázisnak** nevezzük a lineárisan független generátorrendszereket, tehát az olyan vektorokat, melyek függetlenek és minden más vektor előáll lineáris kombinációjuk által. |
| **Tétel** | Három vektor pontosan akkor lineárisan független, ha nem lineárisan összefüggők. |
| **Tétel** | A térben három vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem egysíkúak. |
| ***Bizonyítás*** | Először lássuk be, hogy ha három vektor lineárisan független, abból következik, hogy nincsenek egy síkban.  Tegyük fel, hogy három lineárisan független vektor egy síkban van. Ebben az esetben   * vagy valamely kettő bázist alkot, így a harmadik kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként, * vagy amennyiben mindhárom párhuzamos, az egyik lineáris kombinációjaként a másik kettő előállítható, így lineárisan összefüggőek.   Tehát mindkét esetben ellentmondásra jutunk, így nem lehetnek egy síkban.  Következő lépésben azt próbáljuk belátni, hogy ha három vektor nincsen egy síkban abból következik, hogy lineárisan függetlenek. Ezt onnan tudhatjuk, hogy amennyiben nem teljesülnek lineárisan összefüggőek. Ez pedig az előző pontból könnyen belátható, tehát mivel mindkét irányban teljesül az állítás a tételt bebizonyítottuk. |
| **Tétel** | *(Térbeli felbontási tétel)* Ha adott a térben három, nem egy síkú, páronként nem párhuzamos , és vektor, akkor bármely térbeli vektorhoz van olyan , amelyekre igaz, hogy  .  Ez a felbontás egyértelmű. |
| ***Bizonyítás*** | *(folytatás a következő oldalon)*  A síkbeli felbontási tételhez hasonlón ez a bizonyítás is konstruktív.  A vektor talppontján, -n átaz és vektorok által meghatározott síkkal párhuzamos síkot rajzolunk.  A vektor nem párhuzamos -val és -vel, tehát vektor végpontjában -vel húzott párhuzamos egyenes pontban döfi a síkot. A pontból a pontba mutató vektor legyen , a pontot s végpontját összekötő vektor . Ekkor , hiszen egy síkban van -val és -vel, így síkbeli felbontási tétel miatt felírható azok lineáris kombinációjaként.  Az egyértelműség bizonyítása hasonlóan működik, mint a síkbeli felbontási tétel esetén. |
| **Tétel** | Bármely három nem egysíkú térbeli vektor bázist alkot. |
| ***Bizonyítás*** | Egy korábbi tételben már beláttuk, hogy három nem egy síkú, páronként nem párhuzamos vektor lineárisan független. A térbeli felbontási tételben azt bizonyítottuk, hogy minden vektor felírható e három vektor lineáris kombinációjaként, ezért bázist alkotnak. |
| **Tétel** | Bármely három lineárisan független vektor bázist alkot. |
| ***Bizonyítás*** | Az előző bizonyítás közvetlen következménye. |

## Speciális bázisok

|  |  |
| --- | --- |
| **Ortogonális** | Egy bázis ortogonális, ha a vektorai páronként merőlegesek. |
| **Normált** | Egy bázis normált, ha a vektorai egységvektorok. |
| **Ortonormált** | Egy bázis ortonormált, ha ortogonális és normált. |

## Bázisokkal kapcsolatos további tételek

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Adott a tér egy bázisa, valamint a és vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáikkal.  Ebben az esetben a vektor koordinátái: |
| ***Bizonyítás*** | Az asszociatív, kommutatív és disztributív tulajdonságok felhasználásával könnyen bizonyítható a tétel. |
| **Tétel** | Adott a tér egy bázisa, valamint az vektor a bázisra vonatkozó koordinátai.  Ebben az esetben az |
| ***Bizonyítás*** | A bizonyítás triviális. |
| **Tétel** | Adott a tér egy ortonormált bázisa (kanonikus bázis) és az , illetve vektorok koordinátái.  **,**  Ekkor az skalárszorzat a következőképpen kiszámítható.  A tétel a várt módon dimenziós térben is teljesül. |
| ***Bizonyítás*** | Jelöljük a bázisvektorokat a szokásos módon: . Alkalmazva a skalárszorzat homogén és lineáris tulajdonságait, azaz, hogy , illetve hogy azt kapjuk, hogy |
| **Tétel** | Adott a tér egy ortonormált, jobbrendszerű bázisa, és az , illetve vektorok az erre a bázisra vonatkozó koordinátáikkal.  **,**  Ekkor az vektoriális szorzat a következőképpen kiszámítható. |
| ***Bizonyítás*** | Jelöljük a bázisvektorokat a szokásos módon: . Alkalmazva a vektoriális szorzat disztributív és antikommutatív tulajdonságait, valamint az egyenlőséget, illetve azt a három triviális egyenletet, hogy , , . Innentől az előző egyenlethez hasonlóan könnyen levezethető a bizonyítás. |

**Megjegyzés** *Itt felhasználásra fog kerülni a determináns fogalma, illetve számítási módja, amelynek pontos definiálása és ismertetése a 6. fejezetben található.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Adott a tér egy ortonormált, jobbrendszerű bázisa, és az , illetve vektorok az erre a bázisra vonatkozó koordinátáikkal.  **,**  Ekkor az vektoriális szorzat a következőképpen kiszámítható. |
| **Tétel** | Adott a tér egy ortonormált, jobbrendszerű bázisa, és az és illetve vektorok az erre a bázisra vonatkozó koordinátáikkal.  **,**  Ekkor az vegyes szorzat a következőképpen kiszámítható. |
| ***Bizonyítás*** | Felhasználjuk a skaláris és vektoriális szorzatok kiszámításához kapcsolódó tételeket.  Amennyiben az utolsó kifejezést egy determináns elsősor szerinti kifejtésének tekintjük, akkor felírhatjuk az alábbi kifejezést.  A tételt tehát bebizonyítottuk |
| **Tétel** | Adottak az és vektorok. Az vektor felírható a vektorral párhuzamos és a vektorra merőleges vektorok összegeként.  Ezen és vektorokat az vektor párhuzamos és merőleges összetevőinek nevezzük.  , és |
| ***Bizonyítás*** | Ahogy már korábban a skalárszorzat speciális eseteinél vettük, az , amiről pedig kimondtuk, hogy nem más, mint az vektor merőleges vetülete irányában.  Az ábrán látható derékszögű háromszögben az . Ezt az vektort a skaláris szorzatról tanultak szerint megkapjuk az képlet szerint. Az összefüggés ezekből már triviálisan következik. |

## A sík normál vektora és egyenlete

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Ha az vektor merőleges az síkra, akkor az vektort az sík normálvektorának nevezzük. |
| **Tétel** | Ha az sík egy normálvektora , egy adott pontja pedig , az ebbe a pontba mutató , egy tetszőleges pontja , s a pontba mutató helyvektor pedig , akkor a sík egyenlete felírható az alábbi módon. |
| ***Bizonyítás*** | Ha merőleges a síkra, merőleges annak az összes vektorára is, így a vektorra is. Mivel a két vektor merőleges egymásra, ezért skaláris szorzatuk nulla.  Mivel a , ezért . A képletet gyakran formában alkalmazzuk. |

# Algebrai struktúrák, relációk

## Az alap struktúrák

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Egy nem üres halmazt **csoportnak** nevezünk, ha értelmezve van -n egy művelet, amelyre   1. zárt: -re 2. asszociatív: -re 3. létezik egységeleme *(nullelem)*: , melyre esetén 4. létezik inverz elem: -hez , melyre |
| **Definíció** | Ha a nem üres halmaz csoport, továbbá teljesül rá az alábbi tulajdonság **Abel-csoportnak**, vagy másnéven kommutatív csoportnak nevezzük.   1. kommutatív: -re |
| **Tétel** | Ha csoport, akkor -re, ha , akkor . Hasonlóan, ha , akkor |
| ***Bizonyítás*** | Az asszociativitás, az egységelem és az inverzelem létezését kihasználva könnyen levezethető. |
| **Tétel** | Ha csoport, akkor -re, ha , akkor . Hasonlóan, ha , akkor . |
| ***Bizonyítás*** | Az asszociativitás, az egységelem és az inverzelem létezését kihasználva könnyen levezethető. |
| **Definíció** | Egy nem üres halmazt **félcsoportnak** nevezünk, ha értelmezve van -n egy művelet, amely asszociatív, tehát -re . |
| **Definíció** | Egy nem üres halmazt **gyűrű** nevezünk, ha értelmezve van -n egy additív művelet, amelyre Abel-csoport, illetve egy multiplikatív művelet, amely   1. zárt: -re 2. asszociatív: -re 3. disztributív: -re , illetve . |
| **Definíció** | Ha egy nem üres halmaz gyűrű, továbbá az multiplikatív műveletére nézve létezik egységelem, tehát   1. , melyre esetén ,   akkor -t **egységelemes gyűrűnek** nevezzük. |
| **Definíció** | Ha egységelemes gyűrű, továbbá létezik a multiplikatív műveletére nézve inverz elem, tehát   1. -hez , melyre ,   akkor **ferdetestnek** nevezzük. |
| **Definíció** | Ha ferdetest, továbbá a multiplikatív műveletére nézve kommutatív, tehát   1. -re   akkor **testnek** nevezzük. |

## A vektortér axiómák

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | A nem üres halmazt **vektortérnek** nevezzük a test felett, ha   * halmazon értelmezve van egy összeadás művelet, ami bármely elemhez hozzárendel egy másik -beli elemet, amelyet -vel jelölünk, * a test és a halmaz között értelmezve van a skalárral való szorzás művelete, ami bármely skalárhoz és bármely vektorhoz egyértelműen hozzárendelünk egy -beli elemet, amelyet -vel jelölünk,   továbbá a műveletekre, az alábbi ún. vektortér-axiómák teljesülnek:   * Az összeadás műveletre:  1. asszociativitás: estén 2. létezik egységelem:, melyre esetén 3. létezik inverzelem: esetén , melyre 4. kommutatív: esetén  * A skalárral való szorzás műveletére:  1. disztributivitás: , és esetén 2. disztributivitás (2): és esetén 3. vegyes asszociatív: és esetén 4. létezik egységelem: -re teljesül, hogy , ahol az 1 a test egységeleme (tehát -re ). |

# Vektorterek

A vektortér axiómák az előző fejezetben bemutatásra kerültek.

## Altér, altér elégséges feltétele

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Legyen vektortér test felett, és egy halmaz szintén vektortér felett, akkor -t **alterének** nevezzük. |
| **Tétel** | Legyen vektortér valamely test felett, és . akkor és csak akkor altere -nek, ha -re és -re teljesül, hogy , és , tehát az összeadásra, és a skalárral való szorzás műveletre nézve is zárt. |
| ***Bizonyítás*** | Először lássuk be, hogy amennyiben altér, akkor -re és -re teljesül, hogy , és . Ez a vektortér axiómákból következik.  Másodszor igazoljuk, hogy amennyiben -re és -re teljesül, hogy , és , akkor altér. Ahhoz, hogy altér legyen, az összes vektortér axiómának teljesülnie kell. Az összeadásra vonatkozó kommutativitás, asszociativitás, valamint a vegyes asszociatív és disztributív szabályok automatikusan teljesülnek, hiszen ha nem így lenne, maga sem lenne vektortér. Hasonlóképpen a skalárral való szorzás egységeleme is teljesül.  A fennmaradó két axióma közül az egyik az összesadás egységének -beli létezése, a másik pedig az erre vonatkozó inverz megléte. Ha vesszük az és skalárokat, akkor a második feltétel szerint és hasonlóan . Ebből rögtön látható, hogy összeadásra vonatkozó inverze létezik-ben.  Az első feltétel szerint , tehát a . Ebből következik, hogy létezik egységelem.  A fentiekből következik, hogy az állítás oda-vissza igaz. |

## Vektorterekkel kapcsolatos tételek

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Legyen vektortér valamely test felett. Bármely -re , ahol a halmaznak az összeadásra vonatkozó egységeleme. |
| ***Bizonyítás*** | A vektorok az összeadás műveletre csoportot alkotnak, ezért létezik egység. |
| **Tétel** | Legyen vektortér valamely test felett. Bármely -re , ahol a test összeadásra vonatkozó egységeleme. |
| ***Bizonyítás*** | A bizonyításhoz a test összeadás műveletének egységelemének definícióját, majd a vektortér vegyes disztributivitásra vonatkozó axiómáit használjuk fel. |
| **Tétel** | Legyen vektortér valamely test felett. Bármely -re , ahol a a test szorzásra vonatkozó egységelemének összeadáshoz tartozó inverze, a pedig a vektortérben a vektor összeadásra vonatkozó inverze. |
| ***Bizonyítás*** | A bizonyítás az előző tétel, illetve a nullelem definíciójából következik |
| **Tétel** | Legyen vektortér valamely test felett. Ha egy -re teljesül, hogy , akkor vagy vagy pedig . |
| ***Bizonyítás*** | Ha , akkor -nak létezik a szorzásra vonatkozó inverze a testben. Legyen ez .  Ha a , akkor a egyenlőség baloldalán csak lehet, hiszen a nem nulla vektor minden más számszorosa nem nullvektort ad. |

## Lineáris függetlenséggel és összefüggőséggel kapcsolatos tételek

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | A vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggők, ha van közöttük olyan vektor, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként. |
| ***Bizonyítás*** | Tekintsük a lineáris összefüggőséget jellemző lineáris kombinációt.  Ha a vektorok összefüggők, akkor . A hozzá tartozó vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként Ez egyértelműen látszik, ha  egyenletből kivonjuk a tagot.  Mivel a , van szorzásra vonatkozó inverze . Az egyenlet -szorosát véve az alábbi összefüggést kapjuk.  Láthatjuk tehát, hogy amennyiben a vektorok lineárisan összefüggők van közöttük olyan vektor, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.  Most lássuk, hogy mi a helyzet fordított esetben. Ha a vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, az alábbi összefüggést írhatjuk fel.  A vektorhoz tartozó együttható , tehát a nullvektor előállt a vektorok nem triviális lineáris kombinációjaként. |
| **Tétel** | Ha a vektorok lineárisan összefüggők, tetszőleges vektort hozzávéve, továbbra is lineárisan összefüggők maradnak. |
| ***Bizonyítás*** | Tekintsük a lineáris összefüggőséget jellemző lineáris kombinációt.  Legyen mondjuk . Vegyünk hozzá még egy vektort úgy, hogy , és az összes többi skalár ugyanaz marad.  Ebben az új lineáris kombinációban is , hiszen így választottuk meg a lineáris kombinációt. Mivel teljesül, hogy a nullvektort előállító lineáris kombinációban egyik skalár sem nulla, ezért a vektorok lineárisan összefüggők maradnak. |
| **Tétel** | Ha a vektorok lineárisan függetlenek, tetszőleges vektort elhagyva a maradék vektorok függetlenek maradnak. |
| ***Bizonyítás*** | Az előző tételt használjuk fel. Indirekt módon tegyük fel, hogy a független rendszerből már elhagytunk egy vektort, és az így kapott rendszer lineárisan összefüggő. Az előző tétel szerint, ha ehhez a rendszerhez hozzáveszünk egy vektort, a rendszer továbbra is lineárisan összefüggő marad. Tehát akkor az eredeti is lineárisan összefüggő lenne, ami ellentmondás. |
| **Tétel** | Ha a vektorok lineárisan függetlenek, és egy vektort hozzávételével lineárisan összefüggővé válnak, akkor ez a vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként. |
| ***Bizonyítás*** | Az alábbi lineáris kombinációban van egy olyan együttható, amely nem nulla.  Azt már láttuk, hogy azok a vektorok, melyekhez tartozó skalár együttható a lineáris kombinációban nem nulla, előállíthatók a többi vektor lineáris kombinációjaként. Eszerint csak azt kell bizonyítanunk, hogy a .  Ha a és az lenne, akkor az alábbi egyenlet teljesülne.  Valamelyik együtthatóról azonban tudjuk, hogy nem nulla, ez viszont azt jelentené, hogy a vektorok lineárisan összefüggők voltak, tehát . |
| **Tétel** | A vektor alábbi előállítása akkor és csak akkor egyértelmű, ha lineárisan függetlenek. |
| ***Bizonyítás*** | Először bizonyítsuk, hogy ha a felírás egyértelmű, akkor a lineárisan független rendszer.  Ezt indirekt módon láthatjuk be. Tegyük fel, hogy a vektorok lineárisan összefüggők. Ekkor a definíció közvetlen következménye, hogy vektor, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.  Helyettesítsük be ezt a vektort a vektor elállításra vonatkozó egyenletbe.  Amelyben természetesen immár a -s tag nem szerepel, tehát pontosabb felírás alább látható.  Az első és a második lineáris kombináció együtthatói különböznek, tehát ellentmondásra jutottunk. A lineáris kombináció nem lenne egyértelmű.  Második lépésben azt bizonyítjuk, hogy ha a vektorok függetlenek, akkor a  lineáris kombináció előállítása egyértelmű.  Ezt az állítást is indirekt módon bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy a vektornak két előállítása van.  Vonjuk ki egymásból a két egyenletet.  Mivel a vektorok lineárisan függetlenek, ezért csak a triviális lineáris kombináció állíthatja elő a nullvektort, tehát , amiből viszont következik, hogy minden -re és -re. Tehát a két lineáris kombináció megegyezik, ami ellentmondás. |

## Bázisok, generátorrendszerek és dimenzió

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Azok a vektorok, melyek lineáris kombinációjaként a vektortér minden eleme előáll **generátorrendszert** alkotnak. |
| **Definíció** | A vektorok által **generált altér**, amelyet -vel jelölünk, ezen vektorok minden lehetséges lineáris kombinációját jelenti. |

*A bázis definíciója a Vektoralgebra fejezetben tisztázásra került.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | A vektortérbeli vektorok a bázisát alkotják, ha   * -beli vektor előáll a lineáris kombinációjukként, továbbá * vektorok lineáris függetlenek. |
| **Definíció** | A vektortér egy bázisa a A vektor e bázisokkal való felírásában a  lineáris kombinációban szereplő együtthatókat a vektor bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük. |
| **Definíció** | A vektortér egy bázisa a A vektor e bázisokkal való felírásában a  lineáris kombinációban szereplő együttható skalárokból álló megfelelő mátrixot a vektor **koordináta mátrixának** nevezzük. |
| **Definíció** | A vektortér **dimenzióján** bármelyik bázisának elemszámát értjük, és -vel jelöljük. |
| **Tétel** | *(Kicserélési tétel)* Az független vektorokból álló rendszer bármely tagjához található egy olyan vektor a generátorrendszerből, amellyel az -t kicserélve az vektorokból álló rendszer független. |
| ***Bizonyítás*** | A tételt indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy például az vektorhoz nem lenne egyik vektor sem jó, tehát az vektorok lineárisan összefüggők. Az rendszer lineárisan független, hiszen az állítás szerint független rendszert alkot, amelyből egy vektort elvéve a rendszer továbbra is független marad. Azonban az indirekt feltevésünk szerint a vektorok lineárisan összefüggők. Mivel a vektor hozzávételével a rendszer összefüggővé vált, tudhatjuk, hogy kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.  Mivel a vektorok generátorrendszert alkotnak, ezért a vektortér minden vektora, így is felírható lineáris kombinációjukként.  Tehát az vektorok lineáris kombinációja előállítja az vektort. Ez azt jelenti, hogy az vektorok lineárisan összefüggőek lennének, azonban ez ellentmondás. |
| ***Köv.*** | A generátorrendszerben lévő vektorok száma legalább annyi, mint bármely független rendszer elemszáma. |
| ***Bizonyítás*** | A független rendszer vektorait különböző generátorrendszerbeli vektorokra lehet csak kicserélni, különben összefüggő rendszert kapunk. Ezért legalább annyi vektort tartalmaz, mint bármely független rendszer. |
| ***Tétel*** | Bármely vektortérben a bázisok elemszáma egyenlő. |
| ***Bizonyítás*** | Legyen a vektortér két bázisa és , melyek rendre és darab vektort tartalmaznak. Tekintsük a bázis vektorait lineárisan függetlennek, míg -t generátor rendszernek. Ebből következik, hogy Ha a két bázis szerepét megcseréljük, abból pedig az összefüggésre jutunk. Ebből következik, hogy . |
| ***Tétel*** | Legyen vektor nem nulla vektortér, az pedig egy pozitív egész. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:   * -ben található darab lineárisan független vektor, de bármely lineárisan összefügg. * -ben található elemű generátorrendszer, de elemű nem. |
| ***Bizonyítás*** | Ha , akkor bármely bázis vektort tartalmaz. Mivel a bázisvektorok lineárisan függetlenek, így biztosan van darab lineárisan független vektor. Ezek után már csak azt kell bizonyítani, hogy darab vektor mindig összefüggő. Tekintsük az db vektort és egy tetszőleges, de rögzített bázist. Ekkor -re egyértelmű az alábbi állítás.  Ekkor tekintünk egy tetszőleges vektort, mely előáll a vektorok lineáris kombinációjaként.  Helyettesítsük be a vektorok helyére a fentebbi képletet.  Továbbá tudjuk, hogy -nak elő kell állnia a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.  A két egyenletet kivonva egymásból:  Mivel a bázisvektorok függetlenek, ezért az együtthatók mindegyike nulla. Azonban a együtthatók egyszerre nem lehetnek nullák, mert akkor a vektorok mindegyike nullvektor lenne.  Tehát e lineáris egyenletrendszer megoldásár keressük. Ha ismertnek tételezzük fel a és együtthatókat, akkor az db ismeretlen meghatározásához egyenlet áll csak rendelkezésre. Ez azt jelenti, hogy legalább egy ismeretlen szabadon választható, vagyis az vektor felírása az alábbi alakban nem egyértelmű.  Ez viszont ellentmond a vektorok függetlenségének.  Fordítva, ha van darab vektorból álló lineárisan független rendszer, és bármely vektor összefügg, akkor tekintsük az elemű független rendszert. Ehhez bármilyen vektort hozzávéve összefüggővé válik, ezért a hozzávett vektor kifejezhető a független vektorok lineáris kombinációjával. Ezért az elemű független rendszer bátis, vagyis valóban a tér dimenziója.  Az 1. és a 3. állítás ekvivalens mivoltát is az előzőhöz hasonlóan lehet bizonyítani. |
| ***Köv.*** | Ha , akkor   * -ben bármilyen elemű független rendszer bázist alkot. * -ben bármilyen elemű generátorrendszer bázist alkot. * Egy vektortér bármely véges generátorrendszere tartalmaz bázist. |
| **Tétel** | Ha egy vektortérnek van véges generátorrendszere, akkor bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá. |

# Determinánsok

## Alapfogalmak

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az -es mátrix eleméhez tartozó **minormátrixának** nevezzük, és -val jelöljük azt az -ed rendű mátrixot, melyet úgy kapunk -ból, hogy annak sorát és oszlopát elhagyjuk. |
| **Definíció** | Ha az -ed rendú mátrix **determinánsát** már értelmeztük, az -ed rendű mátrix determinánsának nevezzük a következő számot. |
| **Definíció** | Az elem **előjeles aldeterminánsán** értjük a számot. Ezt felhasználva -ed rendű mátrix determinánsa felírható az alábbi módon. |
| **Tétel** | *(Kifejtési tétel)* Egy -ed rendű determináns tetszőleges sora vagy oszlopa szerint kifejthető, és |

## A determináns tulajdonságai

* Ha a determináns valamely sorát -val szorozzuk, a determináns az eredeti -szorosa lesz.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Fejtsük ki a determinánst azon sor szerint, amelyet beszoroztunk -val. |

* Ha a determináns sorának minden eleme kéttagú összeg, akkor két olyan determináns összegére bontható, melyből az első sorában az összeg első tagjai, a második determináns sorában az összeg második tagjai szerepelnek, a többi elem változatlan.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Fejtsük ki a determinánst azon sora szerint, amelyben az összeg szerepel. |

* Ha egy determináns egy sora csupa nulla elemet tartalmaz, akkor a determináns is nulla.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Fejtsük ki a determinánst azon sora szerint, amelyben a nullák szerepelnek. |

* Ha egy determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke -szeresére változik

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Először bizonyítsuk két szomszédos sor cseréjére az állítást. Cseréljük fel a determináns és . sorát. Az eredeti és a két sor cseréje után kapott determinánsokat jelöljük -gyel és -vel.  Az első determinánst az sora szerint, míg a másodikaz sora szerint kifejtve a következő egyenleteket kapjuk.   |  |  | | --- | --- | |  |  |   Ebből következik, hogy .  He két tetszőleges sort cserélünk fel, akkor van köztük valahány sor, legyen ezek száma . Az alul lévő sort szomszédos sor cseréjével tudjuk a másik sor alá vinni, ekkor szomszédosok. Ebben a pozícióban felcserélve őket, most az eredetileg felül lévő sor kerül alulra. Ezzel együtt eddig szomszédos sor csere történt. Ebből a pozícióból, amikor az eredetileg felül lévő sor helyén már a másik sor áll, és alatta pedig ő maga, megint darab szomszédos sor cserével tudjuk az eredetileg felül lévő sort az eredetileg alul lévő helyére mozgatni. összesen darab szomszédos csere történt, az az ennyiszer változott -szeresére a determináns értéke, tehát a -szerese lett az eredetinek. |

* Ha egy determináns két sora megegyezik a determináns értéke nulla.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Cseréljük fel a determinánsban a két egyenlő sort. Ekkor a determináns értéke – az előző tételt szerint - -szeresére változik. Másrészt viszont nem változik, hiszen a két determináns elemei megegyeznek. Ha tehát a determináns értéke akkor , amiből . |

* Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk valamely sor -szorosát, a determináns értéke nem változik.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Ábrázoljuk a régi és az új determinánst. Felhasználva a fentebb használt tételeket külön írhatjuk két determináns összegére az új determinánst, melynek egyike az eredeti régi determináns lesz, a másik pedig egy olyan, melynek két sora megegyezik, tehát értéke nulla. Ebből következik, hogy a régi és az új determináns értéke megegyezik. |

* Egy alsó (vagy felső) háromszögdetermináns értéke a főátlóban lévő elemek szorzata.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint, majd a keletkező -ed rendű aldeterminánst szintén az első sora szerint, és így tovább. |

* *(Ferde kifejtés tétele)* Ha egy determináns egyik sorának elemeit rendre valamely másik sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk meg, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk az eredmény nulla lesz.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | Ezt a tételt -as determinánsokra bizonyítjuk. Szorozzuk meg az első sor elemit a második sor elemihez tartozó aldeterminánsokkal.  Az így kapott determináns két sora megegyezik, tehát az értéke nulla. |

* Az eddig felsorolt tételek mindegyike igaz oszlopokra is.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Bizonyítás*** | A fenti bizonyításokban a sorok helyett megfelelő oszlop szerint kell kifejteni a determinánst. |

*A Cramer-szabály habár nem szerepelt az előadásokon, a teljesség érdekében megemlítem, viszont a bizonyítását nem.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | *(Cramer-szabály)* Ha az négyzetes mátrix, és , akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A megoldásban , ahol a determinánst úgy kapjuk, hogy -ben a -edik oszlop helyére a jobb oldali konstansokat azaz a vektor komponenseit tesszük. |

## Mátrix adjungáltja

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az négyzetes mátrix *(klasszikus)* **adjungáltján** az mátrixot értjük. |
| **Tétel** | Az  típusú mátrixot az adjungáltjával jobbról szorozva az eredmény . |
| ***Bizonyítás*** | Legyen a  mátrix a szorzás eredménye. A főátló beli elmeit a szorzás szabálya szerint kiszámítva az összes elem felírható az alábbi alakban.  A nem a főátlóban található elemekre pedig felírhatjuk az alábbi összefüggést.  Az eredmény nulla lesz, hiszen az sor elemei rendre a sorhoz tartozó aldeterminánsokkal vannak szorozva: ez az összeg a ferde kifejtés tétele szerint nulla. Tehát |
| **Tétel** | Ha az  típusú mátrix és , akkor |
| ***Bizonyítás*** | Mivel a mátrixok szorzás asszociatív, ezért a struktúrákról szóló fejezetben igazoltak szerint pontosan egy inverz létezik. Ha tehát találunk egy olyan mátrixot, melyre az , akkor ez a mátrix nem lehet más csakis az inverze. Az előző tétel szerint . Szorozzuk be az egyenletet -val!  Az inverz mátrix definíciója alapján ebből következik az állítás. |
| **Definíció** | A nem nulla determinánsú mátrix az úgynevezett **reguláris mátrixok**. A nulla determinánsú mátrixokat **szinguláris mátrixnak** nevezzük. |

## Vektorok függetlenségének megállapítása

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Az dimenziós vektortérbeli vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a vektorokból, mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem nulla. |
| ***Bizonyítás*** | A függetlenség definíciójából kiindulva: a nullvektor csak triviálisan állítható elő az adott vektorokból.  Írjuk fel ez alapján a megfelelő egyenletrendszert.  Alkalmazzuk a Gauss-eliminációt.  Két esetet különböztetünk meg:   * Ha , akkor , hiszen az elimináció során az együttható mátrix determinánsának nulla volta nem változik meg az elemi sorműveletek alkalmazásával. Ekkor van nem triviális megoldás, tehát az vektorok lineárisan függő rendszert alkotnak. * Ha , akkor . Ekkor miatt . De akkor a többi ismeretlen is nulla, hiszen őket mindig a rájuk következőkből kapjuk. Ekkor tehát csak a triviális megoldás létezik, ezért az vektorok lineárisan függetlenek. |
| **Tétel** | Az -es homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha együtthatómátrixának determinánsa nulla. |
| ***Bizonyítás*** | *Lásd: az előző bizonyítás.* |

# Homogén lineáris leképezések

## Alapfogalmak

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | A **lineáris leképezés** egy olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is vektortér. |
| **Definíció** | Legyenek és vektorterek, valamint . Azt az függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, **homogén lineáris leképezéseknek** nevezzük.   1. Lineáris: 2. Homogén:   Ha , akkor a leképezést **lineáris transzformációnak** nevezzük. |
| **Köv.** | Ha az leképezés homogén lineáris, akkor a képe . |
| ***Bizonyítás*** | Tudjuk, hogy , amiből a homogén tulajdonság miatt  Ami . |
| **Tétel** | Az leképezés akkor és csak akkor homogén lineáris leképezés, ha |

## A homogén lineáris leképezés mátrixa

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Az lineáris **leképezés mátrixa** , ahol a Azaz az mátrix oszlopai a -beli bázis bázisvektorainak képei, a -beli bázisra vonatkozó képei. |
| **Tétel** | Legyen a lineáris leképezés, az mátrix leképezés mátrixa, tetszőleges, ennek képe pedig . Ekkor az . |
| ***Bizonyítás*** | Konstruktív, a bizonyítás során meg is adjuk a kérdéses mátrixot. Legyen bázisa , bázisa pedig .  A tétel állítása szerint a kiindulási tér bázisvektorainak képét kell felírnunk.  Írjunk fel egy tetszőleges vektort a kiindulási térben az bázisra vonatkozó koordinátákkal.  Ekkor a vektor képe:  Használjuk fel a lineáris és a homogén tulajdonságokat.  Behelyettesítve az bázisvektorok képtérbeli előállítását:  Az egyenlet jobb oldalán található kifejtett alakot átrendezve megkapjuk az vektor koordinátáit a bázisra vonatkozóan. (Az egyes tagok együtthatói)  A felírásból látható lesz, hogyha a skalárokat egy mátrix sorának tekintjük, akkor az vektor képének a koordináta vektorát e mátrix segítségével egyszerű szorzással kiszámíthatjuk.  A fenti szorzatban az első mátrix a leképezés mátrixa, a második a vektor koordinátáit tartalmazza, míg a harmadik a vektor képének koordinátáit.  A tétel állításában szereplő mátrix oszlopai valóban a kiindulási -beli bázis bázisvektorainak képei, a -beli bázisra vonatkozóan. |

## A lineáris leképezések magtere, képtere

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | Legyen az egy lineáris leképezés. Azon vektorok összességét -ben, amelyek képe nullvektor a leképezés **magterének** nevezzük és -lel jelöljük. |
| **Definíció** | Legyen az egy lineáris leképezés. Azon vektorok összességét -ben, amelyek előállnak valamely -beli vektor képeként, a leképezés **képterének** nevezzük és -lel jelöljük. |
| **Lemma** | A -beli nullvektor képe a -beli nullvektor. |
| **Tétel** | Legyen az egy lineáris leképezés felett. altere a -nek. |
| ***Bizonyítás*** | Legyenek és vektor a magtér vektorai, vagyis . A lineáris tulajdonság miatt , vagyis az összegük is magtérbeli vektor.  Hasonlóan a homogén tulajdonság miatt , tehát a számszorosaik is magtérbeliek. Az összeadásra és a számszorosra vonatkozó zártság biztosítja, hogy altere a -nek. |
| **Tétel** | Legyen az egy lineáris leképezés felett. altere a -nek. |

## Dimenzió tétel

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | *(Dimenzió-tétel)* Legyen az egy lineáris leképezés. Ekkor az alábbi egyenlőség teljesül. |
| ***Bizonyítás*** | Bizonyítandó, hogy a leképezés magterének és képterének dimenziójának összege éppen a kiindulási tér dimenziójával egyenlő.  Mivel altér, így van bázisa. Legyen a bázis . Egészítsük ki ezt a független rendszert úgy, hogy legyen bázisa.  Azt kell bizonyítani, hogy bázist alkotnak -ben. Ezzel a tétel bizonyítása kész, hiszen a dimenzió a báziselemek száma, és így az képlet, ahol a kiindulási tér, a magtér, pedig a képtér dimenziója, éppen a tétel állítása.  Először azt látjuk be, hogy az vektorok az -ben generátorrendszert alkotnak, majd azt, hogy függetlenek. E két tulajdonság biztosítja, hogy az egy bázisa.  Tekintsük tetszőleges vektorát. Ehhez van olyan , melyre . A vektortér bázisával vektort kifejezve és erre alkalmazva az lineáris leképezést:  Vagyis valóban, vektorai felírhatók az ( vektorok lineáris kombinációjaként, tehát ezek a vektorok generátorrendszert alkotnak.  A függetlenség bizonyításához felírjuk a definíciót:  (  Mivel lineáris leképezés, ezért  Eszerint az vektor benne van a magtérben, így felírható a magtérbeli bázis vektorainak lineáris kombinációjával:  amiből  Mivel a bázisát alkotó vektorok függetlenek, ezért a vektort csak úgy tudják előállítani, ha minden |

## Sajátérték, sajátvektor

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | A szám **sajátértéke** az transzformációnak, ha van olyan nem nulla vektor, amelyre . Ezt a vektort az transzformáció sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük. |
| **Tétel** | Az lineáris transzformáció sajátértékéhez tartozó összes sajátvektor és a nullvektor alteret alkotnak. |
| ***Bizonyítás*** | Legyenek és sajátvektok az lineáris transzformáció sajátértékéhez. A már tanult tétel szerint, ha az összegükről, és számszorosukról be tudjuk látni, hogy szintén e sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor e vektorok összessége alteret alkot.  Összegük sajátvektor, ugyanis  A számszoros is sajátvektor, ugyanis |
| **Tétel** | Legyen és , ahol az a transzformáció egy mátrixa, az pedig az vektor koordináta mátrixa, mindkettő valamely  bázisra vonatkozóan. Ekkor az transzformáció sajátértékei a , karakterisztikus egyenlet megoldásai. A polinom a -ban -ed fokú, ez az ún. karakterisztikus polinom, melynek gyökei a sajátértékek. A sajátvektorok pedig e sajátértékek ismeretében a homogén lineáris egyenletből kaphatók. |
| ***Bizonyítás*** | Rendezve a mátrix egyenletet, az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani:  Ennek pontosan akkor lesz a triviálistól különböző megoldása, ha . Ebből az egyenletből a értékek kiszámolhatók. Visszahelyettesítéssel kapjuk a keresett sajátvektorokat. |
| **Tétel** | Tegyük fel, hogy egy homogén lineáris transzformáció (különböző sajátértékekhez tartozó) sajátvektorai bázist alkotnak. Ekkor a transzformáció mátrixa e bázisra vonatkozóan diagonális és a főátlóban rendre a megfelelő sajátértékek állnak. |
| ***Bizonyítás*** | A transzformáció mátrixának oszlopvektorai a bázisvektorok képei. Sajátvektor képe önmaga sajátértékszerese. Pl. az -edik sajátvektor () mátrixos alakja a sajátértékek bázisában egy olyan oszlopvektor, amelynek -edik koordinátája , összes többi koordinátája pedig nulla:  Ezek az oszlopvektorok alkotják a leképezés mátrixát, innen már látható, hogy a mátrix valóban diagonális lesz. |
| **Tétel** | Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek. |
| ***Bizonyítás*** | *A bizonyítás csak a jeles osztályzathoz szükséges, hossza miatt nem tárgyalom. A hivatalos jegyzet 144. oldalán található.* |

## Izomorfia

|  |  |
| --- | --- |
| **Definíció** | A kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezéseket **izomorf** leképezéseknek nevezzük. Az izomorf vektortereket *(melyek között fennáll az izomorfizmus)* a következőképpen jelöljük: . |
| **Tétel** | Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk egyenlő. |
| ***Bizonyítás*** | Ha a két vektortér dimenziója egyenlő, akkor bármely két bázisának elemszáma egyenlő. Legyen a vektortér egy bázisa a vektortérnek pedig . A -beli vektort az bázisra vonatkozó koordináta mátrixával reprezentáljuk. Rendeljük hozzá a -ben azt az vektort, aminek a -re vonatkoztatva ugyanaz a koordináta mátrixa.  Nyilvánvaló, hogy az így adott leképezés egy egyértelmű lineáris leképezés.  Legyen két vektortér izomorf. Egyik tér egy bázisának képvektorai a művelettartás miatt a második vektortérben is bázist alkotnak, tehát a dimenziójuk egyenlő. |

# Bázistranszformáció

## Az áttérési mátrix

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Legyen dimenziós vektortér, valamint és két bázis -ben. Ha a vektortér vektorának koordináta mátrixa  az bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon vektor bázisra vonatkozó koordinátái az alábbi képletből kiszámolhatók:  Ahol az mátrix oszlopai az bázis vektorainak az bázisra vonatkozó koordináta mátrixai. Az mátrixot **áttérési mátrixnak** nevezzük. |
| ***Bizonyítás*** | Az vektor szerinti eredeti koordináta mátrixa  és ugyanezen vektor szerinti koordináta mátrixa  közötti összefüggéseket felhasználva  Ebből következik, hogy , ezt rendezve pedig pont a tétel állítását kaphatjuk. |
| **Tétel** | *(Áttérési formula)* , ahol a képtér, pedig a kiindulási tér áttérési mátrixa. |
| ***Bizonyítás*** | Az képletből kiindulva alkalmazzuk a bázistranszformáció képletét, vagyis az és az koordináta mátrixába behelyettesítjük a régi koordináta mátrix új bázissal és koordináta mátrix segítségével kifejezett alakját: |
| **Tétel** | Ha az lineáris transzformáció mátrixa a rögzített bázisra vonatkoztatva , akkor ugyanezen transzformáció mátrixa az bázisra a következő képlettel számolható:  Ahol a kiindulási tér áttérési mátrixa. |
| ***Bizonyítás*** | Az előző tételben bizonyított képletbe helyébe is kerül. |

## Diagonalizálás, hasonló mátrixok

|  |  |
| --- | --- |
| **Tétel** | Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, melynek főátlójában a sajátértékek állnak.  , azaz |
| **Definíció** | Az mátrix **hasonló** a mátrixhoz, ha létezik egy olyan mátrix, amelyre |
| **Definíció** | Az mátrix **diagonalizálható**, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz. |
| **Tétel** | A hasonlóság-es mátrixok körében ekvivalencia reláció. |
| ***Bizonyítás*** | Azt kell bizonyítani, hogy a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív   * reflexivitás: , tehát a -nek az egységmátrixot választjuk. * szimmetria: Ha, akkor . Felírva a definíciót * tranzitivitás: Ha , és , akkor . |
| **Tétel** | Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha hasonló -hez , és sajátvektora , akkor ugyanazon a sajátértékéhez tartozó sajátvektora . |
| ***Bizonyítás*** |  |
| **Tétel** | *(Diagonalizálhatóság elégséges feltétele)* Ha valamely kvadratikus mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonalizálható. |
| ***Bizonyítás*** | Különböző sajátértékek esetén a sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért bázist alkotnak. |
| **Tétel** | Az mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa. |
| ***Bizonyítás*** | * Ha a sajátvektorok bázist alkotnak, akkor ha áttérünk a sajátvektorok bázisára, akkor a transzformáció mátrixa a sajátvektorok bázisában diagonális. (Korábban bizonyítva) * Ha az mátrix diagonalizálható, vagyis hasonló egy diagonális mátrixhoz, akkor azt fogjuk bizonyítani, hogy a diagonális mátrix elemei mátrix sajátértékei, és elemei az sajátvektorai. Az, hogy ezen utóbbiak bázist alkotnak abból következik, hogy a mátrixunk inverze létezik, így , vagyis a vektorok függetlenek. Mivel bármely független vektorrendszer bázis, ha elemszáma egyenlő a dimenzióval, csak azt kell bizonyítani, hogy eloszlopai valóban sajátvektorok.   Legyen , , akkor a hasonlóság képletéből kiindulva:  Felírva a bal- és jobboldali mátrixszorzásokat, és a mátrixokat az oszlopvektoraikkal reprezentálva a fenti jelölésekkel az alábbiakat kapjuk:  A két mátrix egyenlőségéből fakadóan , tehát a diagonális mátrix elemei valóban a sajátértékek, az áttérési mátrix elemei pedig a hozzátartozó sajátvektorok. Ahhoz, hogy e sajátvektorok bázist alkossanak, elegendő, ha függetlenek, hiszen db. vektorról van szó. A függetlenség abból következik, hogy az mátrix létezik, vagyis . |
| **Tétel** | Ha valamely típusú mátrix sajátértékei által meghatározott alterek (az úgynevezett sajátalterek) dimenzióinak összege éppen , akkor a mátrix diagonalizálható. |

# Végszó

A vizsgával kapcsolatos általános tudnivalók megtalálhatók a <http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/LA/Vizsga_info_2015_osz.docx> linken.

A tantárgyi követelményrendszer megtalálható az alábbi linken. <http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/LA/2015_LA_1_kovetelmeny.docx>

**Sok sikert a vizsgához!**

A siker érdekében itt egy kedves süni, aki erőt ad mindenkinek.



# Irodalomjegyzék

2012, *Bércesné dr. Novák Ágnes* - Lineáris algebra, Az alapoktól az euklideszi terekig (Pázmány egyetem eKiadó)

2006, *Freud Róbert* - Lineáris algebra (ELTE Eötvös Kiadó)

2013, *Naszlady Márton* - <http://users.itk.ppke.hu/~nasma1/jegyzetek/matszigo_2dmla_p.pdf>