

1. Órai feladatok 10. hét

1.1. feladat

A becslendő érték $\sqrt[3]{10} \approx 2.1544$.

1.1.1. (a)

Legyen $f(x) = 10^x$ és $x_0 = 0$. Ekkor

$$T_3(x) = 1 + \ln 10x + \frac{1}{2} \ln^2 10x^2 + \frac{1}{6} \ln^3 10x^3.$$

Ez alapján

$$\sqrt[3]{10} \approx T_3\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2.1374.$$

Becsüljük meg a közelítés hibáját a Lagrange-féle maradéktaggal!

$$\left|L_3\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{\ln^4 10}{3^4 4!} 10^\xi\right| \leq \frac{\ln^4 10}{3^4 4!} \sup_{\xi \in (0, \frac{1}{3})} 10^\xi \approx 0.0312$$

1.1.2. (b)

Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ és $x_0 = 8$. Ekkor

$$T_3(x) = 8^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} 8^{-\frac{2}{3}}(x-8) - \frac{1}{8} 8^{-\frac{5}{3}}(x-8)^2 + \frac{5}{81} 8^{-\frac{8}{3}}(x-8)^3.$$

Ez alapján

$$\sqrt[3]{10} \approx T_3(10) \approx 2.1547.$$

Becsüljük meg a közelítés hibáját a Lagrange-féle maradéktaggal!

$$|L_3(10)| = \left|-\frac{10}{243} \xi^{-\frac{11}{3}} 2^4\right| \leq \frac{160}{243} \sup_{\xi \in (8, 10)} \xi^{-\frac{11}{3}} \approx 0.00032$$