

## 1. Órai feladatok 9. hét

### 1.1. feladat

A megadott trapéz területe

$$T = (a + a \sin x)a \cos x$$

ahol  $x$  a dőlésszög  $\frac{\pi}{2}$ -nél nagyobb része ( $x$  lehet negatív is, ebben az esetben a dőlésszög derékszögnél kisebb). A keresett kifejezés maximumát deriválással megkaphatjuk.

$$T' = a^2 \cos^2 x - a^2 \sin^2 x - a^2 \sin x = -2a^2 \sin^2 x - a^2 \sin x + a^2 = 0$$

Ebből  $\sin x_1 = \frac{1}{2}$  illetve  $\sin x_2 = -1$ . Fizikai megfontolásból a második eset kizárható, hiszen ekkor a dőlésszög 0 lenne.

$$\sin x_1 = \frac{1}{2} \implies x_1 = \frac{\pi}{6}$$

Tehát a keresett dőlésszög  $\frac{2\pi}{3}$ .

### 1.2. feladat

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dF}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \implies \frac{dy}{dx} = \sqrt{3} \implies e: y = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

### 1.3. feladat

Mivel az  $x^2$  függvény, és az  $ax + b$  függvény is mindenhol differenciálható, csak  $x = 4$ -ben kell biztosítanunk, hogy  $f(x)$  differenciálható. Ehhez az kell, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f'(x)$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$$

teljesüljön. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f'(x) = 4a$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f'(x) = 8$$

így  $a = 2$ . Továbbá

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 4a + b = 8 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 16$$

így  $b = 8$ . Tehát az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 4 \\ 2x + 8, & \text{ha } x > 4 \end{cases}$$

mindenütt differenciálható.

#### 1.3.1. feladat

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{[0/0]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} \stackrel{[0/0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1$$

### 1.4. feladat

Világos, hogyha a kivágunk egy  $\varphi$  szögű körcikket a körből, akkor a maradék ívhossza  $(2\pi - \varphi)R$ . Tehát a tölsér alapjának kerülete  $(2\pi - \varphi)R$  amiből a tölsér alapjának sugara

$$r = \frac{2\pi - \varphi}{2\pi} R.$$

Továbbá a tölsér alkotóinak hossza  $R$ , így a magasság

$$m = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

A tölsér térfogata

$$V = \frac{\pi r^2 m}{3} = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Tehát ha megmondjuk az  $r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$  kifejezés maximumát, akkor egyben megmondtuk a térfogat maximumát is. Deriváljuk a kifejezést!

$$(r^2 \sqrt{R^2 - r^2})' = 2r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Ahhoz, hogy szélsőértéke legyen a kifejezésnek, a deriválnak nullának kell lennie, és előjelet kell váltania. Tehát

$$2r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \implies r = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

Világos, hogy a derivált ekkor valóban előjelet vált. Tehát

$$r = \frac{2\pi - \varphi}{2\pi} R = \sqrt{\frac{2}{3}} R \implies \varphi = 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

esetben lesz a létrehozható tölsér térfogata maximális.

### 1.5. feladat

Legyen a henger alapjának sugara  $r$ . Ekkor a henger magassága  $m = \sqrt{1 - r^2}$ . Így a henger térfogata

$$V = \pi r^2 m = \pi r^2 \sqrt{1 - r^2}.$$

Az előzőhöz hasonlóan akkor lesz maximuma a kifejezésnek, ha  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

### 1.6. feladat

Dolgozzunk általánosan! Legyen a torony átmérője  $b$  és az ajtó magassága  $a$ . Vizsgáljuk meg, hogy legfeljebb mekkora hosszúságú rúd vihető át! Vegyük észre, hogy a kérdés ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy melyik a legrövidebb rúd, amelyik érinti az ajtó tetejét, és hozzáér a földhöz és a torony túlsó falához.

Legyen rúd és a föld által bezárt szög  $\varphi$ . Ekkor a rúd hossza

$$h(\varphi) = \frac{a}{\sin \varphi} + \frac{b}{\cos \varphi}.$$

Deriváljunk!

$$h'(\varphi) = -\frac{a \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{b \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0$$

Tehát

$$\frac{a \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{b \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \implies \operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Továbbá

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$$

és

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}.$$

Eszerint

$$h(\varphi)_{\min} = \frac{a}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}} + \frac{b}{\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

azaz

$$h^{\frac{2}{3}}(\varphi)_{\min} = a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}.$$

Behelyettesítve amikor  $b = 4$  és  $a = 2$ , akkor

$$h(\varphi)_{\min} \approx 8.32$$

azaz legfeljebb ilyen hosszú rudat lehet bevinni, így be lehet vinni a toronyba egy 8 méteres rudat.

### 1.7. feladat

Vegyünk fel egy  $P$  futópontot az  $y = \sqrt{x}$  görbén. Ekkor nyilván  $P(t, \sqrt{t})$ . A  $P$  pont és a  $(2, 0)$  pont távolsága (távolságának a négyzete)

$$(t - 2)^2 + (\sqrt{t} - 0)^2 = t^2 - 3t + 4 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

Ahhoz, hogy ez minimális legyen  $t = \frac{3}{2}$  kell. Tehát az  $y = \sqrt{x}$  görbén a  $(2, 0)$  ponthoz legközelebb lévő pont a

$$P\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

### 1.8. feladat

Tudjuk, hogy

$$E = \frac{1}{2}m(t)v^2(t) = \frac{1}{2}(5 + 2t)(3 - t)^2 = x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 6x + \frac{45}{2}.$$

Azt szeretnénk kideríteni, hogy mikor csökken, illetve nő az energia, azaz a fenti harmadfokú egyenlet mikor monoton csökken, illetve monoton nő. Ehhez a derivált előjelét kell megvizsgálni.

$$E' = 3x^2 - 7x - 6$$

Ennek gyökei a 3 és a  $-\frac{5}{2}$ . Mivel időről van szó, csak a három jöhet szóba. Itt előjelet vált a derivált, negatívból pozitívba vált. Ez azt jelenti, hogy 3 másodpercig csökkenni fog a mozgási energia, onnantól kezdve pedig nőni.

### 1.9. feladat

A feladat szövege szerint

$$x^2 + y^2 = 9$$

azaz  $y = \sqrt{9 - x^2}$ . Ennek deriváltja

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

### 1.10. feladat

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x} &\stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}} = -1 \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x^a}{\ln \sin x} \stackrel{\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{ax^{a-1}}{x^a}}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0+} a \frac{\operatorname{tg} x}{x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0+} a \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1} = a$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \cos x}{x}} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} e^{\lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{\operatorname{tg} x}{1}} = 1$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+a} + e^{-(x+a)}}{e^{x-a} + e^{-(x-a)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{a-x}}{e^{a-x}} \cdot \frac{e^{x+a} + e^{-(x+a)}}{e^{x-a} + e^{-(x-a)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2a} + e^{-2x}}{1 + e^{2a-2x}} = e^{2a} \end{aligned}$$

*Megjegyzés:* Nem tudom, hogy ehhez miért kell a L'Hospital-szabály.

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} = \frac{1}{3}$$

### 1.11. feladat

#### 1.11.1. (a)

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$R_f = \mathbb{R}^+$$

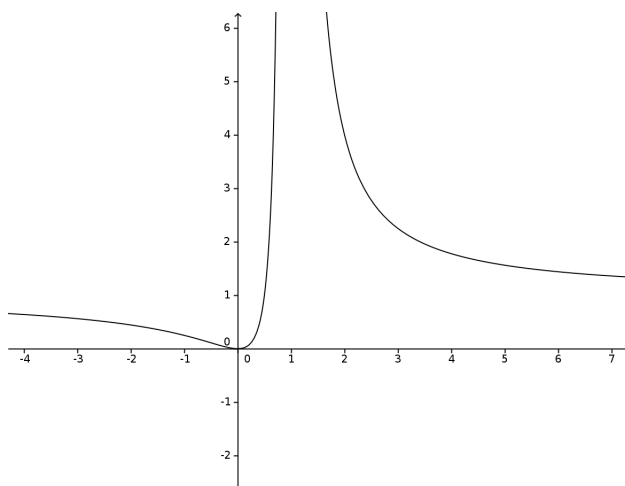
A függvény mindenhol folytonos, kivéve  $x = 1$ -ben, itt másodfajú szakadása van és

$$f(1+0) = f(1-0) = \infty.$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

|          | $x < -\frac{1}{2}$ | $x = -\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} < x < 0$ | $x = 0$     | $0 < x < 1$       | $1 < x$           |
|----------|--------------------|--------------------|------------------------|-------------|-------------------|-------------------|
| $f'(x)$  | -                  | -                  | -                      | 0           | +                 | -                 |
| $f''(x)$ | -                  | 0                  | +                      | +           | +                 | +                 |
| $f(x)$   | $\searrow$ konkáv  | $\searrow$ inf.    | $\searrow$ konvex      | min. konvex | $\nearrow$ konvex | $\searrow$ konvex |



1.11.2. (b)

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

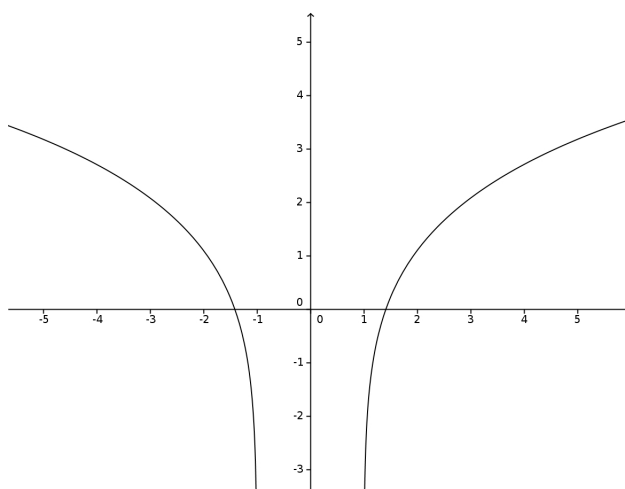
$$R_f = \mathbb{R}$$

A függvény mindenhol folytonos, ahol értelmezve van.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

|          | $x < -1$          | $1 < x$           |
|----------|-------------------|-------------------|
| $f'(x)$  | -                 | +                 |
| $f''(x)$ | -                 | -                 |
| $f(x)$   | $\searrow$ konkáv | $\nearrow$ konkáv |



## 1.11.3. (c)

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

$$R_f = (-\infty, -5 - 2\sqrt{6}] \cup [-5 + 2\sqrt{6}, \infty)$$

A függvény mindenhol folytonos, de  $-1$ -ben és  $0$ -ban másodfajú szakadása van.

$$f'(x) = \frac{3}{(1+x)^2} - \frac{2}{x^2}$$

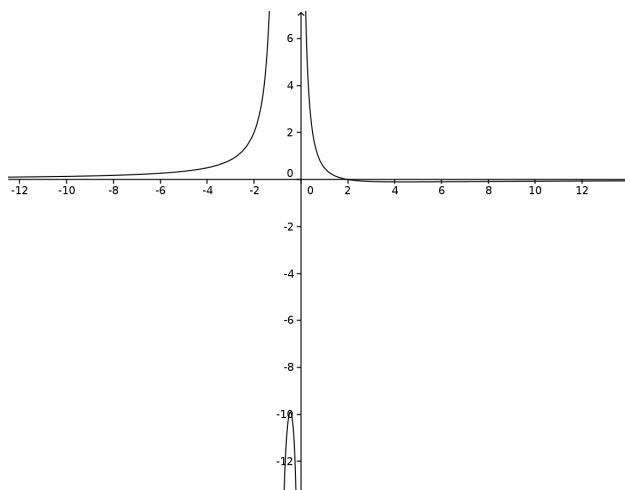
$$f''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{6}{(x+1)^3}$$

Nem tudok táblát rajzolni, túl sok cella lenne.

$$\text{Maximum: } x = 2 - \sqrt{6}$$

$$\text{Minimum: } x = 2 + \sqrt{6}$$

$$\text{Inflexió pont: } x = 2 + 12^{\frac{1}{3}} + 18^{\frac{1}{3}}$$



## 1.11.4. (d)

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$D_f = [0, 2\pi]$$

$$R_f = \left[ -\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right]$$

A függvény mindenhol folytonos.

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x$$

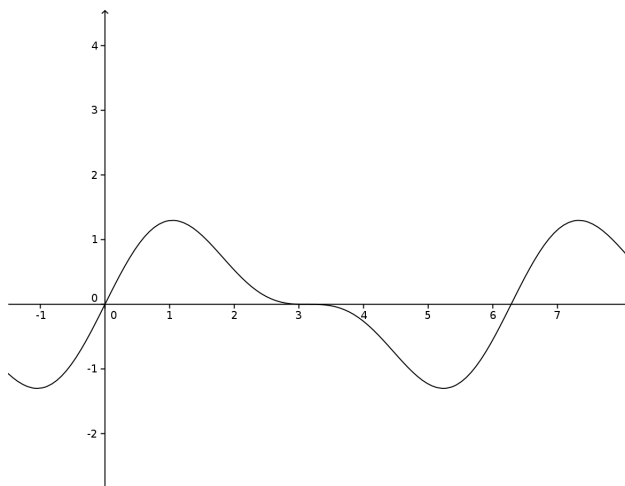
$$f''(x) = -\sin x - 2 \sin 2x$$

Nem tudok táblát rajzolni, túl sok cella lenne.

$$\text{Maximum: } x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Minimum: } x = \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{Inflexiós pont: } \begin{cases} x = 0 \\ x = \arccos \frac{1}{4} \\ x = \pi \\ x = 2\pi - \arccos \frac{1}{4} \\ x = 2\pi \end{cases}$$



1.11.5. (e)

$$f(x) = x \ln x$$

$$D_f = (0, \infty)$$

$$R_f = [-e^{-1}, \infty)$$

A függvény mindenhol folytonos, ahol értelmezve van.

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

|          | $x < e^{-1}$      | $x = e^{-1}$ | $e^{-1} < x$      |
|----------|-------------------|--------------|-------------------|
| $f'(x)$  | -                 | 0            | +                 |
| $f''(x)$ | +                 | +            | +                 |
| $f(x)$   | $\searrow$ konvex | min. konvex  | $\nearrow$ konvex |

