

1. Órai feladatok 6. hét

1.1. feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(x^3+1)-1}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + (x^2+1)^{\frac{1}{3}} + 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} + (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{1}{3}$$

1.2. feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = 2$$

1.3. feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

1.4. feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \cdot \frac{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\frac{\sin x}{x}} = 0$$

1.5. feladat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} = n a^{n-1}$$

1.6. feladat

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\} \\ 0, & \text{ha } x \in \{-1; 0; 1\} \end{cases}$$

A függvénynek az $x = -1$, $x = 0$ illetve az $x = 1$ pontokban lehet szakadási helye. Vizsgáljuk meg az egyoldali határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x + 1}{x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x + 1}{x - 1} = 0$$

Tehát $x = -1$ nem lenne szakadási hely, de a függvény értéke -1 -ben 0 -nak van definiálva, így itt a függvénynek megszüntethető szakadása van.

$$\lim_{x \rightarrow -0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0-} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -0-} \frac{x + 1}{x - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0+} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -0+} \frac{x + 1}{x - 1} = -1$$

Tehát $x=0$ nem lenne szakadási hely, de a függvény értéke 0-ban 0-nak van definiálva, így itt a függvénynek megszüntethető szakadása van.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x + 1}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x + 1}{x - 1} = \infty$$

Itt a függvénynek másodfajú szakadása van.

1.7. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.8. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1 + \sin x - \cos x)(1 - \sin x + \cos x)}{1 - \sin x + \cos x}}{\frac{(1 - \sin x - \cos x)(1 + \sin x + \cos x)}{1 + \sin x + \cos x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin x \cos x}{1 - \sin x + \cos x}}{\frac{-2 \sin x \cos x}{1 + \sin x + \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 - \sin x + \cos x} = -1 \end{aligned}$$

1.9. feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}} = \frac{a}{b}$$

1.10. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos^3 x}}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos^3 x})(1 + \sqrt{\cos^3 x})}{(1 - \cos x)(1 + \sqrt{\cos^3 x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{(1 - \cos x)(1 + \sqrt{\cos^3 x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{1 + \sqrt{\cos^3 x}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1.11. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.12. feladat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{x + 3x \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} = -\frac{1}{4}$$

1.13. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x (1 - \cos^3 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{3(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6} \cdot \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

1.14. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \end{aligned}$$

1.15. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{-x}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x+2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{-x}}}{\frac{2x+2}{\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{-x} + \sqrt[3]{-x}^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}^2 + \sqrt[3]{x+2} \sqrt[3]{-x} + \sqrt[3]{-x}^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{-x}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1.16. feladat

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}}{\frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x} + 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{5}{3}$$

1.17. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 5 \end{aligned}$$

1.18. feladat

1.18.1. (a)

$$f(x) := \begin{cases} \frac{3}{x-1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

A függvénynek az $x = 1$ pontban lehet szakadási helye. Vizsgáljuk meg az egyoldali határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3}{x-1} = \infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{3}{x-1} = -\infty$$

Azt látjuk, hogy itt másodfajú szakadás van.

1.18.2. (b)

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & \text{ha } x \leq 2 \\ x, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

A függvénynek az $x = 2$ pontban lehet szakadási helye. Vizsgáljuk meg az egyoldali határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} x = 2$$
$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} -\frac{1}{2}x^2 = -2$$

A függvénynek elsőfajú szakadása van itt.

1.18.3. (c)

$$f(x) := \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } x \leq 0 \\ (1 - x)^2, & \text{ha } 0 < x \leq 2 \\ 4 - x, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$

A függvénynek az $x = 0$ és az $x = 2$ pontban lehet szakadási helye. Vizsgáljuk meg az egyoldali határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (1 - x)^2 = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 1 - x^2 = 1$$

Tehát az $x = 0$ nem szakadási pont, itt folytonos a függvény.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} 4 - x = 2$$
$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (1 - x)^2 = 1$$

Itt a függvénynek elsőfajú szakadása van.