

# 1. Órai feladatok 5. hét

## 1.1. feladat

### 1.1.1. Elméleti áttekintés

Tekintsük az  $y = Af(ax + b) + B$  hozzárendelést, ahol  $f(x)$  egy elemi függvény. Ekkor a transzformációk elvégzésénél az alábbi sorrendet kell követni:

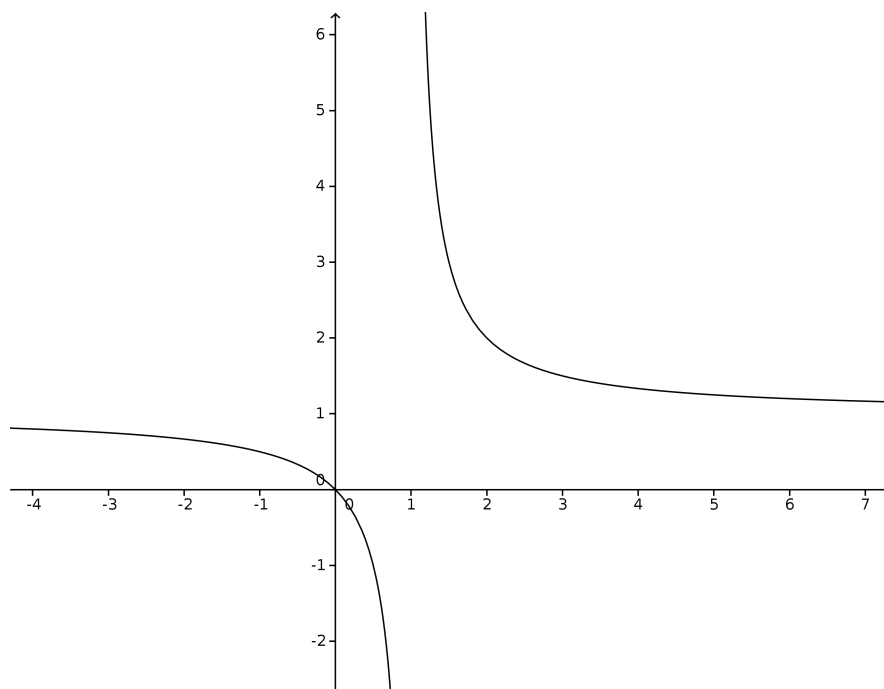
1.  $f(x)$  eltolása az  $x$ -tengelyen  $(-b)$ -vel
2.  $f(x)$   $y$ -tengelyhez való affinitásának  $\frac{1}{a}$ -szorosra változtatása
3.  $f(x)$   $x$ -tengelyhez való affinitásának  $A$ -szorosra változtatása
4.  $f(x)$  eltolása az  $y$ -tengelyen  $B$ -vel.

Azért kell ezt a sorrendet követni, mert  $a$  és  $b$  változótranszformációkat jelölnek,  $A$  és  $B$  pedig értéktranszformációkat.

### 1.1.2. (a)

$$y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Azt látjuk, hogy a függvényt jobbra kell tolni 1-el, és fölfelé 1-el. A grafikon így fog kinézni:



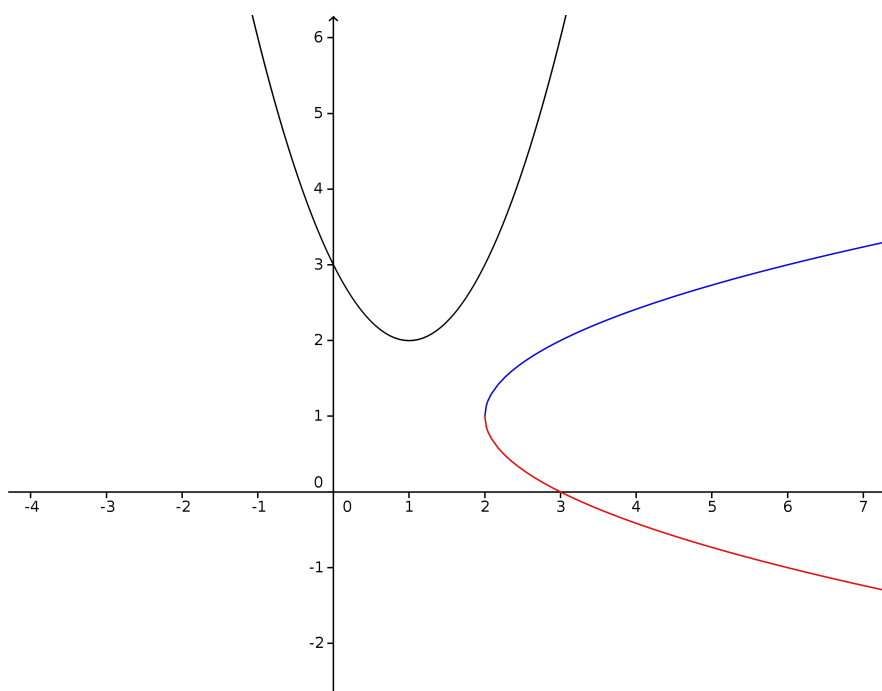
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

A függvény önmaga inverze.

**1.1.3. (b)**

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

Az ilyen esetekben nagyon kell vigyázni, hiszen látjuk, hogy  $f(x)$  nem bijektív, így nincs inverze. Ekkor azt kell tennünk, hogy egyszerre csak a (jelen esetben) parabola egyik ágát vizsgáljuk. Az ábrán különböző színnel jelöljük a különböző parabola ágakhoz tartozó inverzeket.

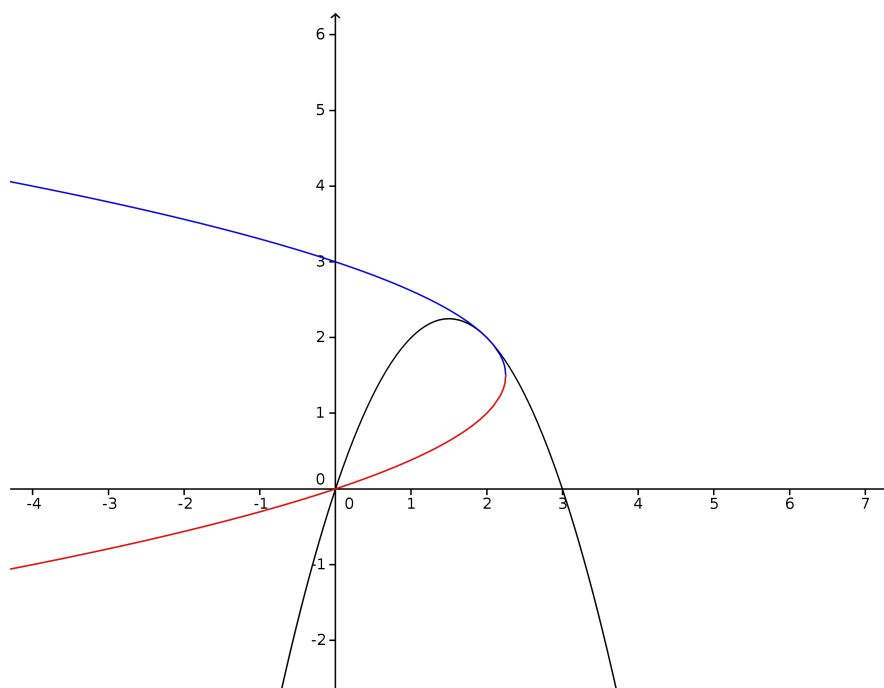


$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{x - 2}$$

**1.1.4. (c)**

$$y = -x^2 + 3x = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$



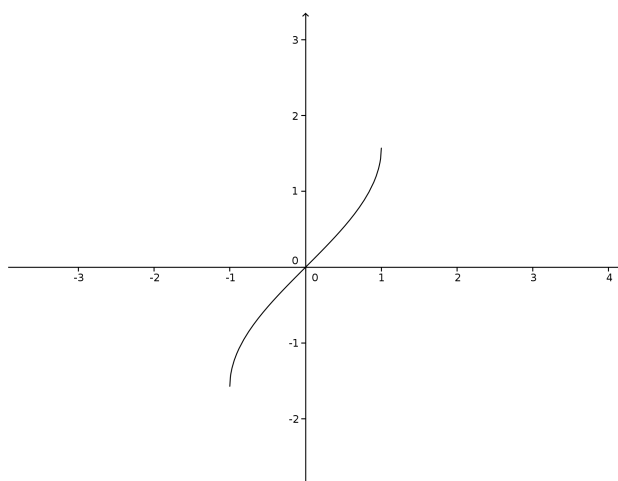
$$f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4x}}{2}$$

#### 1.1.5. (d)

$$y = \sin \frac{1}{x}$$

Ez egy trükkös feladat. Nyilván láthatjuk, hogy  $f^{-1}(x) = \frac{1}{\arcsin(x)}$ , azonban ezt nem lehet úgy ábrázolni, hogy  $f(x)$ -et tükrözzük az  $y = x$  egyenesre. Tekintsük ugyanis a  $g(x) = \arcsin(x)$  függvényt!

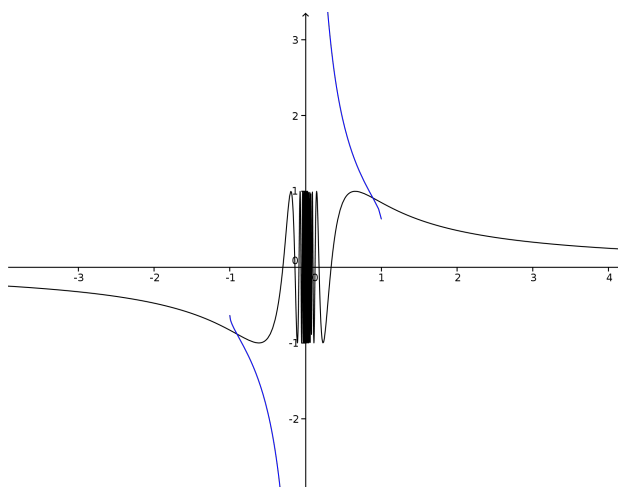


$$g(x) = \arcsin(x)$$

Ennek a függvénynek az értelmezési tartománya nyilván

$$D_f = [-1, 1]$$

ezért lesz ez a képe. A végeredmény pedig így néz ki:



$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

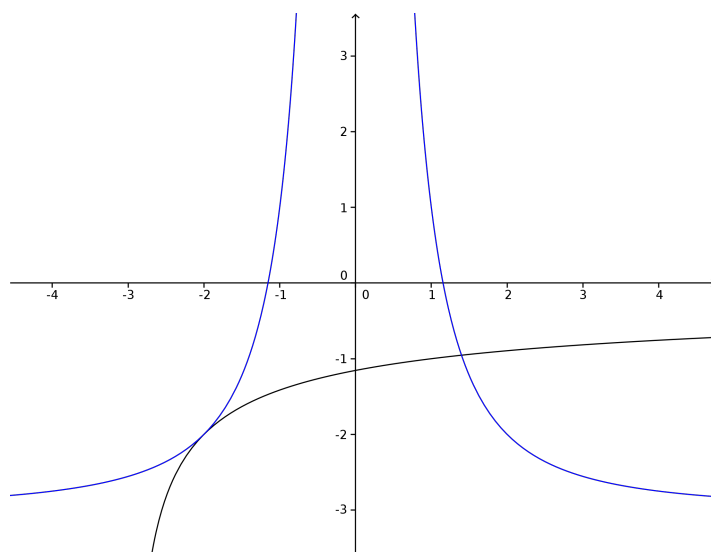
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\arcsin(x)}$$

### 1.1.6. (e)

$$y = \frac{-2}{\sqrt{x+3}}$$

Könnyen látható, hogy a függvény inverze az  $f^{-1}(x) = \frac{4}{x^2} - 3$  lesz, azonban ez pontatlan, ugyanis ekkor  $f^{-1}(x)$  nem bijektív. Tehát az inverz képének, ami egy hiperbola-jellegű kép, csak az

egyik ágát kell venni, ráadásul azt az ágát, aminek az értelmezési tartománya megegyezik az eredeti függvény értékkészletével.



$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x+3}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{x^2} - 3$$

## 1.2. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$$

a divergencia-teszt miatt a sor divergens.

## 1.3. feladat

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

A sor alternál, az elemek nullsorozatot alkotnak, és  $|a_n|$  monoton fogyó, hiszen  $\ln n$  monoton növekvő. Ez alapján a sor egy Leibniz-típusú sor, azaz konvergens.

## 1.4. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n+1}{n+5} \right)^n$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+5} \right)^n = \frac{1}{e^4}$$

a divergencia-teszt miatt a sor divergens.

### 1.5. feladat

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } n = 1 \\ \sqrt{1+x} - 1, & \text{ha } n = 2 \\ \sqrt[3]{1+x} - 1, & \text{ha } n = 3 \end{cases}$$

$$f_n^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } n = 1 \\ (x+1)^2 - 1, & \text{ha } n = 2 \\ (x+1)^3 - 1, & \text{ha } n = 3 \end{cases}$$

$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ [-1, \infty), & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

$$R_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ [-1, \infty), & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

### 1.6. feladat

$$f_n(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{ha } n = 1 \\ (1+x)^2, & \text{ha } n = 2 \\ (1+x)^3, & \text{ha } n = 3 \end{cases}$$

$$f_n^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } n = 1 \\ \sqrt{x}-1, & \text{ha } n = 2 \\ \sqrt[3]{x}-1, & \text{ha } n = 3 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ [0, \infty), & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

### 1.7. feladat

$$(2x^2 - 3x + 1) : (x - 1) = 2x - 1$$

### 1.8. feladat

$$(x^2 + 3x + 2) : (x + 2) = x + 1$$

**1.9. feladat**

$$(x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 2) = x^2 + x + 1$$

a maradék 3, azaz

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x^2 + x + 1)(x - 2) + 3.$$

**1.10. feladat**

$$(x^3 + x - 2) : (x - 2) = x^2 + 2x + 5$$

a maradék 8, azaz

$$x^3 + x - 2 = (x^2 + 2x + 5)(x - 2) + 8.$$

**1.11. feladat****1.11.1. (a)**

$$f \circ k(x) = (x - 1)^2 \quad k \circ f(x) = x^2 - 1$$

**1.11.2. (b)**

$$g \circ h \circ k \circ f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

**1.11.3. (c)**

$$h^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$$